2ª Edición

Topología

a

b

Prentice Hall

James R. Munkres



Topología

Topología

2.ª edición

James R. Munkres

Massachusetts Institute of Technology

Traducción

Ángel Ferrández Izquierdo
Pascual Lucas Saorín
Miguel Ángel Meroño Bayo
M.ª de los Ángeles Hernández Cifre
José Antonio Pastor González
David Cegarra Hernández

Universidad de Murcia



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

MUNKRES, J. R.
TOPOLOGÍA. 2.ª edición

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2002

ISBN: 84-205-3180-0
Materia: Topología 515.1

Formato 170 × 240 Páginas: 624

Núñez de Balboa, 120
28006 MADRID

PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S. A.

MUNKRES, J. R.
TOPOLOGÍA. 2.ª edición

ISBN: 84-205-3180-4
Depósito legal: M. 42.575-2001

Traducido de:
TOPOLOGY 2nd ed.
Copyright© 2000, by Prentice Hall, Inc.
ISBN: 0-13-181629-2

Edición en español

Equipo editorial:
Editora: Isabel Capella
Asistente editorial: Sonia Ayerra
Equipo de producción:
Director: José A. Clares
Técnico: José Hernán
Equipo de diseño: Mario Guindel, Yann Boix y Lía Sáenz
Impreso por: Gráficas Rógar, S. A.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN



Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Para Bárbara

Contenidos

Prólogo

Este libro pretende servir como texto para un curso de introducción a la topología.

La topología, además del interés que tiene por sí misma, sirve para establecer los fundamentos para futuros estudios en análisis, geometría y topología algebraica. No existe un acuerdo general entre los matemáticos en cuanto al contenido de un primer curso de topología; existen muchos tópicos que son apropiados para un curso de tales características y no todos son igual de relevantes para los diferentes propósitos. En la elección del material considerado se ha tratado de establecer un equilibrio entre los diferentes puntos de vista.

Prerrequisitos. No se requieren conocimientos previos formales para estudiar la mayor parte de este libro. Ni siquiera se supone que el lector sepa mucho sobre teoría de conjuntos. Dicho esto, hay que apresurarse en añadir que salvo que el lector haya estudiado algo de análisis o "cálculo riguroso", mucha de la motivación para los conceptos introducidos en la primera parte del libro se perderá. Las cosas irán más suavemente si se ha tenido alguna experiencia con funciones continuas, conjuntos abiertos y cerrados, espacios métricos y cosas por el estilo, aunque ninguna de ellas se supondrá. En la Parte II suponemos cierta familiaridad con la teoría de grupos.

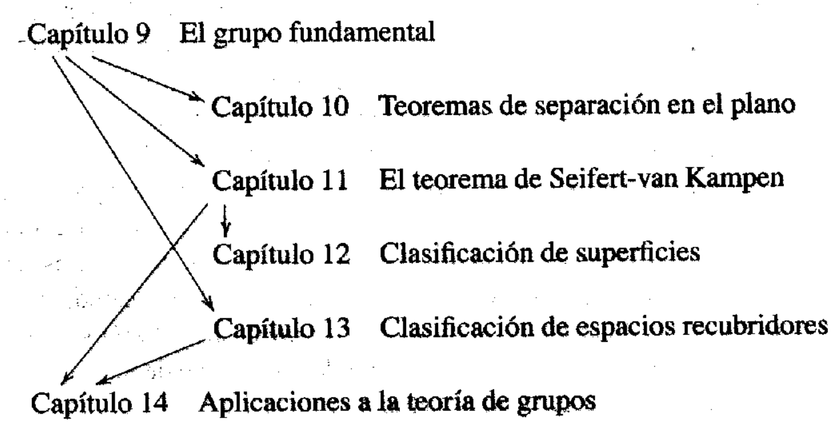
La mayoría de los estudiantes en un curso de topología tienen, por la propia experiencia del autor, algún conocimiento de los fundamentos de la matemática, que varía mucho de un estudiante a otro. Por tanto, comenzamos con un capítulo bastante minucioso sobre teoría de conjuntos y lógica. Se inicia con un nivel elemental y prepara el terreno a un nivel que podríamos llamar "semi-sofisticado". Se tratan aquellos tópicos (y sólo aquellos) que se necesitarán más tarde en el libro. La mayoría de los estudiantes estarán familiarizados con el material de las primeras secciones, pero muchos de ellos verán que su pericia desaparece alrededor de la mitad del capítulo. Cuánto tiempo y esfuerzo necesitará el instructor en este capítulo dependerá en gran medida de la sofisticación matemática y experiencia de los estudiantes. La habilidad para hacer los ejercicios con rapidez (y corrección) debería servir como un criterio razonable para determinar si el dominio del estudiante de teoría de conjuntos es suficiente para comenzar el estudio de topología.

Muchos estudiantes (e instructores) preferirían saltarse el material de fundamentos del Capítulo 1 y pasar al estudio de topología. Si se ignoran los fundamentos, se corre el riesgo de confusiones y errores posteriores. Lo que se *puede* hacer es considerar inicialmente solamente aquellas secciones que se necesitarán enseguida, posponiendo el resto hasta que haga falta. Las primeras siete secciones (sobre numerabilidad) se necesitan a lo largo del libro; habitualmente, alguna de ellas se recomienda de lectura, explicando en clase el resto. Las secciones 9 y 10, sobre el axioma de elección y el buen orden, no hacen falta hasta la discusión de la compacidad en el Capítulo 3. La sección 11, sobre el principio del máximo, se puede posponer aún más; se necesitará sólo para el teorema de Tychonoff (Capítulo 5) y el teorema sobre el grupo fundamental de un grafo lineal (Capítulo 14).

Cómo está organizado el libro. Este libro puede ser utilizado para diferentes cursos. Se ha intentado una organización tan flexible como ha sido posible, de manera que permita al instructor seguir sus propias preferencias.

La Parte I, formada por los primeros ocho capítulos, está dedicada a lo que ordinariamente se conoce como topología general. Los primeros cuatro capítulos tratan con el material que, en opinión del autor, deberían incluirse en cualquier curso de introducción a la topología, digno del nombre. Este puede ser considerado el "núcleo irreducible" de la asignatura, estudiando teoría de conjuntos, espacios topológicos, conexión, compacidad (considerando la compacidad de productos finitos) y los axiomas de numerabilidad y separación (incluyendo el teorema de metrización de Urysohn). Los restantes cuatro capítulos de la Parte I exploran tópicos adicionales; son esencialmente independientes entre sí, dependiendo únicamente del núcleo de los Capítulos 1-4. El instructor puede seleccionarlos en el orden que le parezca.

La Parte II constituye una introducción a la Topología Algebraica. Sólo depende del núcleo de los Capítulos 1-4. Esta parte del libro trata con cierta minuciosidad los conceptos de grupo fundamental y espacio recubridor, junto con sus muchas y variadas aplicaciones. Algunos capítulos de la Parte II son independientes entre sí; la dependencia entre ellos queda reflejada en el siguiente diagrama:



Algunas secciones del libro están señaladas con un asterisco; significa que se pueden omitir o posponer sin pérdida de continuidad. Lo mismo sucede con algunos teoremas. Toda dependencia de material posterior de estas secciones o teoremas señalados queda indicada, así como los resultados que se necesitan. Algunos ejercicios también dependen del material previamente señalado, aunque en tales casos la dependencia resulta obvia.

Conjuntos de ejercicios complementarios aparecen al final de varios de los capítulos. Ellos dan la oportunidad de explorar tópicos que se separan un poco de la línea principal del libro; un estudiante ambicioso podría servirse de uno de ellos para escribir un artículo independiente o un proyecto de investigación. La mayoría son bastante autocontenidos, pero el de grupos topológicos tiene como consecuencia un número de ejercicios adicionales sobre el tópico que aparecen en secciones posteriores del libro.

Posibles esquemas de cursos. La mayoría de los instructores que utilizan este texto para un curso de topología general desean cubrir los Capítulos 1-4, junto con el teorema de Tychonoff del Capítulo 5. Otros muchos también explicarán otros tópicos, por ejemplo, los siguientes: la compactificación de Stone-Čech (§38), los teoremas de metrización (Capítulo 6); la curva de Peano (§44), el teorema de Ascoli (§45 y/o §47) y la teoría de la dimensión (§50). El autor ha seguido, en diferentes cursos, cada una de estas posibles opciones.

Un curso de topología algebraica debería cubrir la mayoría de la Parte II.

Es también posible tratar ambos aspectos de topología en un sólo curso, a costa de no profundizar demasiado. Un esquema factible para un tal curso estaría formado por los Capítulos 1–3, seguido del 9; este último no depende del material del Capítulo 4. (Las secciones no señaladas con asterisco de los Capítulos 10 y 13 tampoco dependen del Capítulo 4.)

Comentarios a esta edición. El lector familiarizado con la primera edición de este libro no encontrará cambios sustanciales en la parte de esta nueva edición relativa a la topología general. El autor se ha limitado en gran medida a la "sintonización fina" del texto y los ejercicios. Sin embargo, el capítulo final de la primera edición, que trataba la topología algebraica, ha sido sustancialmente ampliado y reescrito, convirtiéndose en la Parte II de la nueva edición. Desde que apareció la primera edición, se ha generalizado la costumbre de ofrecer dos cursos de topología, el primero dedicado a la topología general y el segundo a la algebraica. Con objeto de ampliar el tratamiento de esta última, el autor ha intentado que esta revisión responda a las necesidades de un curso de tales características.

Agradecimientos. La mayoría de los topólogos con los que el autor ha estudiado, o cuyos libros ha leído, han contribuido, de una u otra manera, en este libro. Solamente

se citan a Edwin Moise, Raymond Wilder, Gail Young y Raoul Bott, pero existen otros muchos. Por sus provechosos comentarios relativos a este libro, el autor muestra su agradecimiento a Ken Brown, Russ McMillan, Robert Mosher y John Hemperly, así como a sus colegas George Whitehead y Kenneth Hoffman.

El tratamiento de la topología algebraica ha sido sustancialmente influenciado por el excelente libro de William Massey, [M], a quien el autor expresa su gratitud. Finalmente, también agradece a Adam Lewenberg de MacroTeX su extraordinaria habilidad y paciencia en la composición del texto y las figuras mágicas.

Pero sobre todo, sus más sinceros agradecimientos para sus estudiantes. El autor ha aprendido de ellos al menos tanto como ellos de él; sin ellos este libro sería muy diferente.

Una nota para el lector

Dos cosas requieren comentario: los ejercicios y los ejemplos.

Los problemas constituyen una parte crucial del aprendizaje de las matemáticas. Nadie puede aprender topología estudiando detenidamente las definiciones, teoremas y ejemplos resueltos en el texto. Parte de ellos deberían ser resueltos por uno mismo. El propósito de los ejercicios es dar esa oportunidad.

La dificultad de ellos varía, siendo habitualmente los primeros los más fáciles. Algunos son de verificación rutinaria, diseñados para poner a prueba si el lector ha comprendido las definiciones y ejemplos de la sección que les precede. Otros son de menor rutina. Algunos, por ejemplo, piden la generalización de un teorema del texto. Aunque el resultado obtenido puede ser interesante en sí mismo, el principal propósito de un ejercicio semejante es animar al lector a que trabaje con cuidado la demostración en cuestión, dominando sus ideas a fondo —más a fondo (se espera) que la simple memorización demandaría.

Algunos ejercicios están enunciados de una forma "abierta-cerrada". A menudo los estudiantes encuentran esta práctica decepcionante. Cuando se encuentran con un ejercicio que pregunta: "¿es normal todo espacio de Lindelöf regular?", ellos responden con desesperación: "¡no sé qué se supone que debo hacer! ¿Se supone que debo probarlo, o encontrar un contraejemplo, o qué?". Pero la matemática (más allá de los textos) es habitualmente como esto. Muy a menudo, todo matemático ha de trabajar con una conjetura o cuestión y no sabe cuál es la respuesta correcta. El lector debería tener alguna experiencia con una situación semejante.

Algunos ejercicios, que son más difíciles que el resto, están señalados con asteriscos. Pero ninguno llega a ser tan difícil como para que el mejor estudiante de la clase no lo pueda resolver.

Otra parte importante del dominio de cualquier asunto matemático consiste en la adquisición de un repertorio de ejemplos útiles. Por supuesto, uno debería llegar a conocer aquellos ejemplos destacados de cuyo estudio se deriva la propia teoría y sobre los cuales se apoyan las aplicaciones importantes. Pero también se debería tener a mano unos cuantos contraejemplos con los cuales poder someter a prueba conjeturas plausibles.

Ahora bien, al estudiar topología es fácil emplear demasiado tiempo trabajando con "extraños contraejemplos". Su construcción requiere ingenuidad y a menudo es divertido. Pero no son ellos el objeto de la topología. Afortunadamente, no se necesitan demasiados de tales contraejemplos en un primer curso; existe una lista corta y completa que bastará para nuestros propósitos. Son los siguientes:

$\mathbb{R}^J$ el producto de la recta real consigo mismo, con las topologías producto, uniforme y por cajas.

$\mathbb{R}_\ell$ la recta real con la topología que tiene los intervalos $[a, b)$ como elementos básicos.

S_Ω el conjunto bien ordenado no numerable minimal.

I_o^2 el cuadrado unidad cerrado con la topología del orden del diccionario.

Estos son los ejemplos que se deberían dominar y recordar, y que serán explotados continuamente.

Parte I

TOPOLOGÍA GENERAL

Capítulo 1

Teoría de conjuntos y lógica

Vamos a adoptar, como hacen la mayoría de los matemáticos, un punto de vista sencillo en lo referente a la teoría de conjuntos. Supondremos que lo que se entiende por un *conjunto* de objetos es algo intuitivamente claro, y procederemos sobre esa base sin analizar el concepto en su profundidad. Un análisis de este tipo corresponde propiamente a los fundamentos de las matemáticas y a la lógica matemática, y no es nuestro propósito iniciar el estudio de esos campos.

Los especialistas en lógica han analizado la teoría de conjuntos con gran detalle y han formulado axiomas para esta materia. Cada uno de sus axiomas expresa una propiedad de los conjuntos que los matemáticos suelen aceptar, y en conjunto los axiomas proporcionan un fundamento lo bastante amplio y fuerte como para que el resto de las matemáticas puedan ser construidas sobre ellos.

Desgraciadamente es cierto que el uso descuidado de la teoría de conjuntos, confiando exclusivamente en la intuición, puede conducir a contradicciones. De hecho, una de las razones para la axiomatización de la teoría de conjuntos fue formular reglas para el tratamiento de los conjuntos que evitasen esas contradicciones. Aunque no trabajaremos con esos axiomas explícitamente, las reglas que seguimos en el manejo de conjuntos se derivan de ellos. En este libro se aprenderá a manejar conjuntos como un "aprendiz", observando cómo se tratan y trabajando con ellos. Si en algún momento se quiere estudiar la teoría de conjuntos más cuidadosamente y con gran detalle, entonces un curso de lógica o fundamentos será más adecuado.

§1 Conceptos fundamentales

Introducimos aquí las ideas básicas de la teoría de conjuntos y establecemos la terminología y la notación. También discutimos algunos puntos elementales de la lógica pues, en base a nuestra experiencia, se producen graves confusiones cuando no son conocidos de forma explícita.

Notación básica

Habitualmente utilizaremos las letras mayúsculas $A, B, \ldots$ para representar conjuntos, y las letras minúsculas para representar ***objetos*** o ***elementos*** pertenecientes a esos conjuntos. Si un objeto a pertenece a un conjunto A, expresaremos este hecho con la notación

$$a \in A.$$

Si a no pertenece a A, expresaremos esta situación escribiendo

$$a \notin A.$$

El símbolo de igualdad "=" se utiliza a lo largo de todo el libro para significar *identidad lógica*. De modo que cuando escribimos $a = b$ estamos queriendo decir que "a" y "b" son símbolos para el mismo objeto. Es la misma situación, por ejemplo, que en aritmética cuando uno escribe $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Análogamente, la ecuación $A = B$ establece que "A" y "B" son símbolos distintos para el mismo conjunto; esto es, A y B están formados precisamente por los mismos elementos.

Si a y b son objetos distintos, escribiremos $a \neq b$; si A y B son conjuntos diferentes, escribiremos $A \neq B$. Por ejemplo, si A es el conjunto de todos los números reales no negativos y B es el conjunto de los números reales positivos, entonces $A \neq B$ ya que el número 0 pertenece a A pero no a B.

Diremos que A es un ***subconjunto*** de B si cada elemento de A es también un elemento de B y expresaremos este hecho escribiendo

$$A \subset B.$$

Nada en esta definición impide que A sea diferente de B; de hecho, si $A = B$, es cierto que $A \subset B$ y que $B \subset A$. Si $A \subset B$ pero A es distinto de B, diremos que A es un ***subconjunto propio*** de B y escribiremos

$$A \subsetneq B.$$

Las relaciones $\subset$ y $\subsetneq$ se denominan ***inclusión*** e ***inclusión propia***, respectivamente. Si $A \subset B$, también se escribe $B \supset A$, y se lee "B **contiene a** A".

¿Cómo se puede especificar el contenido de un conjunto? Si el conjunto tiene únicamente unos pocos elementos, simplemente basta con enumerarlos escribiendo "A es el conjunto que contiene a los elementos a, b y c". Esta situación se escribe también

$$A = \{a, b, c\},$$

donde las llaves encierran la lista de elementos del conjunto.

De cualquier forma, la manera más común para especificar los elementos de un conjunto consiste en expresar alguna propiedad que dichos elementos verifiquen. Por

ejemplo, podemos tomar el conjunto de los números reales y construir el subconjunto B formado por todos los números enteros pares. En símbolos, esta situación se expresa

$$B = \{x \mid x \text{ es un entero par}\}.$$

Aquí las llaves significan: "el conjunto de", y la barra vertical sustituye a las palabras "tales que". La anterior igualdad se lee "B es el conjunto de los x tales que x es un entero par".

La unión de conjuntos y el significado de "o"

Dados dos conjuntos A y B, se puede construir un nuevo conjunto formado por los elementos de A junto con los elementos de B. Este conjunto se llama la ***unión*** de A y B y se representa por $A \cup B$. Formalmente, se define

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

En este punto debemos analizar detenidamente lo que queremos decir con "$x \in A$ o $x \in B$".

La palabra "o", en el español ordinario, es ambigua. El enunciado "P o Q" significa algunas veces "P o Q o ambos", y otras veces quiere decir "P o Q pero no ambos". Habitualmente, y a partir del contexto, decidimos la interpretación más apropiada. Por ejemplo, supongamos que estamos hablando con dos estudiantes de la manera siguiente:

> "Srta. Sánchez, todos los estudiantes matriculados en este curso han elegido la asignatura de álgebra lineal o la asignatura de análisis."
>
> "Sr. Marín, o consigue una puntuación de al menos 7 en el examen final o suspenderá la asignatura."

La Srta. Sánchez entiende perfectamente que todos los estudiantes se han matriculado en álgebra lineal o en análisis o en ambas asignaturas, y el Sr. Marín estaría completamente desolado si ambos enunciados pudieran cumplirse al mismo tiempo.

En matemáticas no podemos admitir esta ambigüedad. Debemos decidirnos por un significado u otro, pues de lo contrario reinaría la confusión. Los matemáticos han decidido utilizar la palabra "o" con el primer significado, de forma que la frase "P o Q" significará "P o Q o ambos simultáneamente". Si queremos indicar "P o Q pero no ambos" entonces debemos incluir explícitamente la frase "pero no ambos".

Con este significado, la ecuación que define $A \cup B$ no contiene ninguna ambigüedad; establece que $A \cup B$ está formado por los elementos x que pertenecen ya a A, ya a B, ya a ambos simultáneamente.

La intersección de conjuntos, el conjunto vacío y el significado de "si...entonces"

Dados dos conjuntos A y B, otra forma de construir un nuevo conjunto consiste en tomar la parte común de A y B. Este conjunto se llama ***intersección*** de A y B y se representa por $A \cap B$. Formalmente, se define

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Ahora bien, ¿qué ocurre cuando los conjuntos no tienen elementos en común? ¿Qué significa entonces el símbolo $A \cap B$? Para hacer frente a esta situación, necesitamos introducir un conjunto especial que llamaremos ***conjunto vacío***, el cual representaremos por $\varnothing$. El conjunto vacío, tal y como indica su nombre, es el conjunto "que no tiene elementos".

Utilizando esta notación, expresaremos el hecho de que A y B no tengan elementos en común escribiendo

$$A \cap B = \varnothing.$$

También diremos en esta situación que los conjuntos A y B son ***disjuntos***.

Algunos estudiantes pueden sorprenderse con la noción de "conjunto vacío". Podrán decir: "¿cómo puede existir un conjunto que no contiene nada?". El problema es similar al que surgió cuando se necesitó introducir el número 0. Es simplemente una cuestión formal que simplifica mucho el trabajo en matemáticas.

El conjunto vacío es solamente una convención y las matemáticas seguirían funcionando igual de bien sin la introducción de este concepto. Pero es un convenio *adecuado*, ya que nos proporciona una muy buena herramienta para trabajar y previene situaciones difíciles a la hora de demostrar determinados resultados. Sin esta convención, por ejemplo, se debería probar que dos conjuntos A y B tienen elementos en común antes de considerar la intersección de ambos $A \cap B$. Análogamente, la notación

$$C = \{x \mid x \in A \text{ y } x \text{ verifica una cierta propiedad}\}$$

no podría ser utilizada a menos que demostrásemos que realmente existen elementos en A verificando dicha propiedad. Es mucho más conveniente concluir directamente que $A \cap B$ y C podrían ser el conjunto vacío en ambos casos.

Al ser el conjunto vacío $\varnothing$ una mera convención, debemos establecer las relaciones de dicho conjunto con las operaciones que hemos introducido. Como $\varnothing$ es el conjunto que no tiene elementos, resulta evidente que no es posible escribir $x \in \varnothing$ para cualquier objeto x. Análogamente, las definiciones de unión e intersección nos llevan a que, dado un conjunto arbitrario A, se tiene

$$A \cup \varnothing = A \qquad \text{y} \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

En cuanto a la inclusión de conjuntos, su relación con el conjunto vacío $\varnothing$ es algo más delicada. Dado un conjunto A, ¿estamos de acuerdo en que $\varnothing \subset A$? De

nuevo, debemos ser cuidadosos acerca de cómo las matemáticas utilizan el lenguaje ordinario. La expresión $\varnothing \subset A$ es una manera abreviada de escribir: "Cada elemento que pertenece al conjunto vacío también pertenece al conjunto A". Y de un modo más formal: "Para cada objeto x, si x pertenece al conjunto vacío, entonces x también pertenece al conjunto A".

¿Es esta afirmación verdadera o no? Unos podrían decir "sí" y otros decir "no". Nunca seremos capaces de elegir una respuesta utilizando argumentos lógicos, solamente por convenio se puede llegar a una conclusión. Ésta es una afirmación del tipo "si P entonces Q" y, en el hablar diario, el significado de la frase "si ... entonces" es ambiguo. Siempre entendemos cuando escuchamos esta frase que si P es verdad, entonces Q también lo es. A veces es eso únicamente lo que entendemos; sin embargo, en otras ocasiones, entendemos algo más: que si P es falso, entonces Q también debe ser falso. Normalmente, y en función del contexto, uno decide qué interpretación es la correcta.

La situación es análoga a la ambigüedad ya mencionada en el uso de la palabra "o". Supongamos que escuchamos estas dos frases:

> *"Si un estudiante matriculado para este curso no ha cogido la asignatura de álgebra lineal, entonces ha elegido la asignatura de análisis".*
>
> *"Si la nota final es mayor o igual que cinco, entonces aprobarás el examen".*

En la primera de ellas, se entiende que si un estudiante no se ha matriculado en álgebra lineal, entonces ha escogido análisis, y si se ha matriculado en álgebra, entonces puede o no haberse matriculado también en análisis (quizás estime que puede cursar ambas asignaturas simultáneamente). Sin embargo, la segunda frase admite una única interpretación: si la nota es mayor o igual que cinco, entonces aprobará el examen, y si la nota es menor que cinco entonces suspenderá (no cabe la posibilidad de aprobar con una nota tan baja).

De nuevo, en matemáticas no se puede tolerar esta ambigüedad, así que debemos elegir un significado para la construcción "si ... entonces". Los matemáticos han acordado siempre otorgar el significado de la primera frase a la construcción "si ... entonces", así, una afirmación del tipo "si P, entonces Q", significa que si P es verdadero, entonces Q también lo es, pero si P es falso, entonces Q puede ser tanto verdadero como falso.

Como un ejemplo, consideremos la siguiente afirmación acerca de los números reales:

$$\textit{Si } x > 0, \textit{ entonces } x^3 \neq 0.$$

Es una afirmación del tipo "si P entonces Q", donde P es la ***hipótesis*** "$x > 0$" mientras que Q es la ***conclusión*** "$x^3 \neq 0$". Se trata de una afirmación verdadera,

pues en el caso de que la hipótesis sea cierta y el número x verifique $x > 0$, entonces la conclusión $x^3 \neq 0$ también es cierta.

Otra afirmación relativa a los números reales es la siguiente:

$$\textit{Si } x^2 < 0, \textit{ entonces } x = 23;$$

en cada caso en el que la hipótesis sea cierta, la conclusión también lo será. Por supuesto, lo que ocurre es que no hay ningún caso en el que la hipótesis pueda verificarse. Una afirmación de esta clase se dice que es una ***verdad vacía***.

Volviendo ahora al tema del conjunto vacío y su relación con la inclusión, vemos que la inclusión $\varnothing \subset A$ se tiene para cualquier conjunto A. Escribir $\varnothing \subset A$ es lo mismo que decir "si $x \in \varnothing$, entonces $x \in A$", y esta afirmación es también una verdad vacía.

Contrarrecíproco y recíproco

Nuestra discusión de la expresión "si ... entonces" nos lleva a considerar otro punto de la lógica elemental que, en ocasiones, causa serias dificultades. Nos referimos a las relaciones que existen entre una *afirmación*, su *recíproco*, y su *contrarrecíproco*.

Dada una afirmación de la forma "si P, entonces Q", su ***contrarrecíproco*** se define como la afirmación "si Q no es cierto, entonces P no es cierto". Por ejemplo, el contrarrecíproco de la afirmación

$$\textit{Si } x > 0, \textit{ entonces } x^3 \neq 0$$

es la afirmación

$$\textit{Si } x^3 = 0, \textit{ entonces no es cierto que } x > 0.$$

Obsérvese que tanto la afirmación como el contrarrecíproco de la afirmación son verdaderos. Análogamente, la afirmación

$$\textit{Si } x^2 < 0, \textit{ entonces } x = 23$$

tiene como contrarrecíproco la afirmación

$$\textit{Si } x \neq 23, \textit{ entonces no es cierto que } x^2 < 0.$$

De nuevo, ambas son afirmaciones verdaderas sobre números reales.

Estos ejemplos pueden hacernos sospechar que existe alguna relación entre una afirmación y su contrarrecíproco. De hecho, esto es así; existen dos maneras distintas de decir precisamente lo mismo. Cada una de ellas es verdadera si, y sólo si, la otra también lo es; ambas afirmaciones son *lógicamente equivalentes*.

Este hecho no es difícil de comprobar. Introduzcamos primero alguna notación. Para abreviar la expresión "si P, entonces Q", escribiremos

$$P \Longrightarrow Q$$

lo cual se lee "P implica Q". El contrarrecíproco puede ser expresado como

$$(\text{no } Q) \Longrightarrow (\text{no } P),$$

donde "no Q" significa "Q no es verdadero". Ahora, la única manera por la cual la afirmación "$P \Rightarrow Q$" puede dejar de ser verdadera es que la hipótesis P sea verdadera mientras la conclusión Q es falsa. En cualquier otro caso, la afirmación es verdadera. Análogamente, la única forma por la cual la afirmación (no Q) $\Rightarrow$ (no P) puede ser falsa es cuando la hipótesis "no Q" es verdadera y la conclusión "no P" es falsa. Esto es lo mismo que decir que Q es falso y P es verdadero. Y esta es, precisamente, la situación en la cual la afirmación $P \Rightarrow Q$ deja de ser verdadera. De esta forma, vemos que ambas afirmaciones son bien ambas verdaderas, o bien ambas falsas, es decir, son lógicamente equivalentes. Así, aceptaremos una prueba de la afirmación "no $Q \Rightarrow$ no P" como una demostración de la afirmación "$P \Rightarrow Q$".

Existe otra afirmación que se puede formar a partir de la afirmación $P \Rightarrow Q$. Se trata de la afirmación

$$Q \Longrightarrow P$$

que se denomina ***recíproco*** de $P \Rightarrow Q$. Debemos ser cuidadosos para distinguir entre el recíproco de una afirmación y su contrarrecíproco. Mientras una afirmación y su contrarrecíproco son lógicamente equivalentes, la verdad de una afirmación no nos dice nada en absoluto acerca de la verdad o falsedad de su recíproco. Por ejemplo, la afirmación verdadera

$$\textit{Si } x > 0\textit{, entonces } x^3 \neq 0$$

tiene como recíproco la afirmación

$$\textit{Si } x^3 \neq 0\textit{, entonces } x > 0$$

la cual es falsa. Análogamente, la afirmación verdadera

$$\textit{Si } x^2 < 0\textit{, entonces } x = 23$$

tiene como recíproco la afirmación

$$\textit{Si } x = 23\textit{, entonces } x^2 < 0$$

que es falsa.

Si realmente ocurre que tanto la afirmación $P \Rightarrow Q$ como su recíproco $Q \Rightarrow P$ son verdaderos, entonces escribiremos

$$P \Longleftrightarrow Q$$

lo cual se lee "P es verdadero si, y sólo si, Q es verdadero".

Negación

Si uno quiere formar el contrarrecíproco de la afirmación $P \Rightarrow Q$, debe conocer cómo construir la afirmación "no P", es decir, la ***negación*** de P. En la mayor parte de

los casos el proceso de negar una afirmación no entraña dificultad, pero en ocasiones este proceso puede inducir a confusión cuando en las afirmaciones están involucradas expresiones como "para cada" o "al menos uno". Estas expresiones se denominan *cuantificadores lógicos*.

Para ilustrar esta situación, supongamos que X es un conjunto, A es un subconjunto de X y P es una afirmación acerca de los elementos de X. Consideremos la siguiente afirmación:

(∗) *Para cada $x \in A$, la afirmación P es verdadera.*

¿Cómo se forma la negación de esta afirmación? Traslademos el problema al lenguaje de conjuntos. Supongamos que B representa el conjunto de todos los puntos x de X para los cuales P es verdadera. Entonces la afirmación (∗) indica simplemente que A es un subconjunto de B. ¿Cuál es su negación? Obviamente es la afirmación de que A no es un subconjunto de B, esto es, la afirmación de que existe al menos un elemento de A que no pertenece a B. Escribiendo esta última expresión en lenguaje ordinario se tiene

Existe al menos un $x \in A$ para el cual la afirmación P no es cierta.

Por tanto, a la hora de formar la negación de (∗), hay que reemplazar el cuantificador "para cada" por el cuantificador "existe al menos uno", y así construimos la negación de la afirmación P.

De un modo análogo, la negación de la afirmación

Existe al menos un $x \in A$ para el cual la afirmación Q es verdadera,

es la afirmación

Para todo $x \in A$ la afirmación Q no es verdadera.

La diferencia de dos conjuntos

Volvamos ahora a nuestra discusión acerca de los conjuntos. Existe otra operación con conjuntos que, en ocasiones, resulta muy útil. Se trata de la ***diferencia*** de dos conjuntos, que denotaremos por $A - B$, y que se define como el conjunto formado por aquellos elementos de A que no pertenecen a B. Formalmente,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En ocasiones, también se denomina ***complemento*** de B relativo a A, o el complemento de B en A.

Las tres operaciones de conjuntos que hemos definido quedan representadas esquemáticamente en la Figura 1.1.

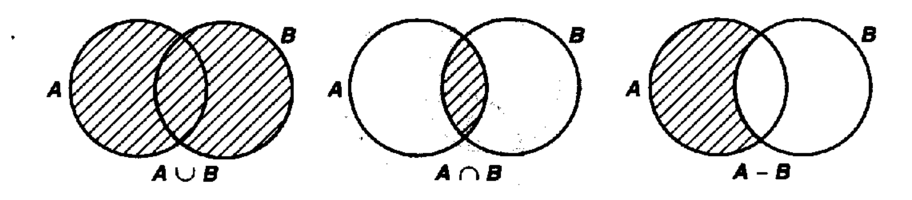


Figura 1.1

Reglas de la teoría de conjuntos

Dados varios conjuntos, podemos formar nuevos conjuntos aplicando las operaciones válidas de la teoría de conjuntos. Como en álgebra, se utilizan paréntesis para indicar en qué orden se están realizando las operaciones. Por ejemplo, $A \cup (B \cap C)$ representa la unión de los conjuntos A y $B \cap C$, mientras que $(A \cup B) \cap C$ representa la intersección de los conjuntos $A \cup B$ y C. En cada uno de los casos, el conjunto resultante es muy diferente tal y como muestra la Figura 1.2.

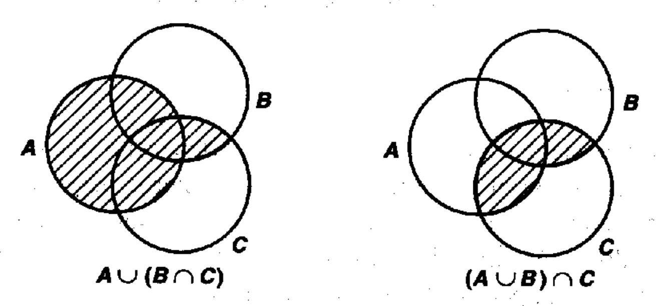


Figura 1.2

En ocasiones, combinaciones distintas de operaciones nos llevan al mismo conjunto; cuando eso ocurre, se tiene una regla de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, es cierto que para tres conjuntos cualesquiera A, B y C la ecuación

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

se satisface. La ecuación está ilustrada en la Figura 1.3; la región sombreada representa el conjunto en cuestión tal y como se puede comprobar de forma intuitiva. Esta ecuación puede pensarse como una "ley distributiva" para las operaciones $\cap$ y $\cup$.

Otros ejemplos de reglas de la teoría de conjuntos incluyen la segunda "ley distributiva"

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$$

y las *leyes de DeMorgan*

$$\begin{aligned} A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C), \\ A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C). \end{aligned}$$

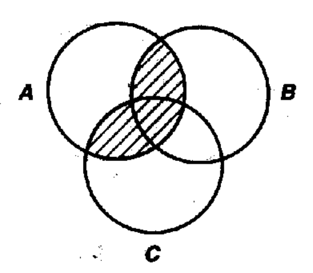


Figura 1.3

Dejamos como ejercicio la comprobación de estas reglas. Se pueden establecer otras reglas de la teoría de conjuntos, pero éstas que hemos mostrado son las más importantes. Las leyes de DeMorgan son más fáciles de recordar si se aprenden según la siguiente regla:

El complemento de la unión es la intersección de los complementos.
El complemento de la intersección es la unión de los complementos.

Colecciones de conjuntos

Los objetos pertenecientes a un conjunto deben pertenecer a una clase determinada. Así, podemos considerar el conjunto de todos los enteros pares, el conjunto de todas las personas con los ojos azules de España, el conjunto de todos los juegos de barajas del mundo... Algunos de estos conjuntos tienen un interés matemático muy limitado, lo admitimos, pero el tercer ejemplo ilustra una situación que todavía no habíamos mencionado: que los objetos pertenecientes a un conjunto bien pueden ser ellos mismos conjuntos a su vez, ya que un juego de barajas es un conjunto de un cierto número de cartas. Así, el conjunto de todos los juegos de barajas del mundo es también un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

Podemos considerar entonces una nueva forma de construir nuevos conjuntos a partir de otros ya dados. Dado un conjunto A, consideramos conjuntos cuyos elementos sean subconjuntos de A. En particular, podemos considerar el conjunto de todos los subconjuntos de A. Este conjunto se representa mediante el símbolo $\mathcal{P}(A)$ y se denomina ***conjunto potencia*** de A (la razón se explicará más adelante).

Cuando tengamos un conjunto cuyos elementos sean a su vez conjuntos, nos referiremos a él como una ***colección*** de conjuntos y lo representaremos por una letra escrita en modo caligráfico, tal como $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$. De esta forma, mantendremos una cierta coherencia cuando realicemos demostraciones donde aparezcan simultáneamente objetos, conjuntos de objetos y colecciones de conjuntos de objetos. Por ejemplo, podríamos usar $\mathcal{A}$ para representar la familia de todos los juegos de barajas del mundo, dejando la letra mayúscula normal A para denotar un juego de cartas y la letra minúscula a para representar una carta en concreto.

Debemos ser cautos en este tipo de cuestiones. Así, haremos una distinción entre el objeto a, el cual es un elemento del conjunto A, y el conjunto unipuntual $\{a\}$, que es un subconjunto de A. Para ilustrar esta diferencia de conceptos, si A es el conjunto $\{a, b, c\}$, entonces las afirmaciones

$$a \in A, \ \{a\} \subset A, \ \text{y} \ \{a\} \in \mathcal{P}(A)$$

están correctamente expresadas, mientras que las afirmaciones $\{a\} \in A$ y $a \subset A$ son incorrectas.

Uniones arbitrarias e intersecciones

Ya hemos definido lo que entendemos por unión e intersección de dos conjuntos. No existe ninguna limitación para restringirnos a dos conjuntos, ya que podemos considerar la unión y la intersección de una cantidad arbitraria de conjuntos.

Dada una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos, se define la ***unión*** de los elementos de $\mathcal{A}$ mediante la ecuación

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}.$$

La ***intersección*** de los elementos de $\mathcal{A}$ se define como

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\}.$$

No existe ningún problema con estas definiciones cuando alguno de los elementos de la familia $\mathcal{A}$ es el conjunto vacío. Pero es un poco delicado decidir qué significan estas definiciones si permitimos que $\mathcal{A}$ sea la familia vacía. Aplicando literalmente las definiciones, vemos que ningún elemento x verifica la propiedad de la definición para la unión de los elementos de $\mathcal{A}$. Así, es razonable concluir que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \varnothing$$

si $\mathcal{A}$ es la familia vacía. Por otro lado, cada x satisface (trivialmente) la propiedad de la definición para la intersección de los elementos de $\mathcal{A}$. La pregunta es: ¿cada x en qué conjunto? Si tenemos un conjunto grande X que se ha precisado al principio del argumento como nuestro "conjunto universal" y se consideran sólo subconjuntos de X, es razonable definir

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X$$

cuando $\mathcal{A}$ es vacío. Sin embargo, no todos los matemáticos siguen este convenio. Para evitar dificultades, *no definiremos la intersección cuando $\mathcal{A}$ es vacío.*

Productos cartesianos

Existe todavía otra forma de construir nuevos conjuntos a partir de unos dados; lleva implícita la noción de un "par ordenado" de objetos. Cuando estudiamos geometría analítica, de lo primero que nos convencemos es de que tenemos que elegir un eje x y un eje y en el plano. Así, cada punto del plano se corresponde de manera única con un par ordenado (x, y) de números reales (de hecho, cuando se estudia geometría de manera más profunda, el plano se *define* como el conjunto de pares ordenados de números reales).

La noción de par ordenado se puede generalizar al caso de los conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, definimos su producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) para los cuales a es un elemento de A y b es un elemento de B. Formalmente,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Esta definición supone que el concepto de "par ordenado" ya es conocido. Puede considerarse aquí de un modo intuitivo, como la noción de "conjunto", o puede expresarse como una definición en términos de operaciones de conjuntos ya introducidas. Esta última sería la ecuación

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

que define el par ordenado (a, b) como una colección de conjuntos. Si $a \neq b$, esta definición nos dice que (a, b) es una colección de dos conjuntos, uno de los cuales es un conjunto unipuntual y el otro un conjunto con dos elementos. La *primera coordenada* del par ordenado se define como el único elemento que pertenece a ambos conjuntos, y la *segunda coordenada* como el elemento que pertenece sólo a uno de los dos conjuntos. Si $a = b$, entonces (a, b) es una colección conteniendo sólo un conjunto $\{a\}$, ya que $\{a, a\} = \{a\}$ en este caso. Su primera y segunda coordenadas son ambas iguales y coinciden con el elemento de este único conjunto.

En honor a la verdad, hay que decir que la mayoría de los matemáticos piensan en un par ordenado como un concepto primitivo más bien que como una colección de conjuntos.

Hagamos un comentario acerca de la notación. Es un hecho desafortunado que la notación (a, b) esté firmemente establecida en las matemáticas actuales, pero tiene dos significados. El primero, es el de un par ordenado de objetos, tal y como acabamos de discutir. El segundo significado proviene del análisis y nos es familiar a todos: si a y b son números reales, el símbolo (a, b) se utiliza para designar el intervalo de todos los números reales x verificando $a < x < b$. En la mayoría de los casos, esta situación no nos causará problemas, ya que se deducirá fácilmente del contexto cuál es el significado preciso. En cualquier situación proclive a confusión o ambigüedad, adoptaremos una notación distinta para el par ordenado (a, b), representándolo mediante el símbolo

$$a \times b.$$

Ejercicios

1. Compruebe las leyes distributivas para $\cup$ y $\cap$ y las leyes de DeMorgan.

2. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todos los conjuntos A, B, C y D. Si una doble implicación falla, determine si alguna de las dos posibles implicaciones se cumple. Si una igualdad falla, determine si el enunciado se vuelve verdadero al cambiar el símbolo "igual" por una de las dos inclusiones $\subset$ o $\supset$.

(a) $A \subset B$ y $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$.
(b) $A \subset B$ o $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$.
(c) $A \subset B$ y $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$.
(d) $A \subset B$ o $A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$.
(e) $A - (A - B) = B$.
(f) $A - (B - A) = A - B$.
(g) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
(h) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$.
(i) $(A \cap B) \cup (A - B) = A$.
(j) $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$.
(k) El recíproco de (j).
(l) El recíproco de (j), suponiendo que A y B son no vacíos.
(m) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.
(n) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
(o) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
(p) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C - B \times C) - A \times D$.
(q) $(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times (B - D)$.

3. (a) Escriba el contrarrecíproco y el recíproco del siguiente enunciado: "Si $x < 0$, entonces $x^2 - x > 0$", y determine cuál (si la hay) de las tres afirmaciones es cierta.

(b) Haga lo mismo para el enunciado "Si $x > 0$, entonces $x^2 - x > 0$".

4. Sean A y B conjuntos de números reales. Escriba la negación de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) Para todo $a \in A$, se verifica que $a^2 \in B$.
(b) Para al menos un $a \in A$, se verifica que $a^2 \in B$.
(c) Para todo $a \in A$, se verifica que $a^2 \notin B$.
(d) Para al menos un $a \notin A$, se verifica que $a^2 \in B$.

5. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de conjuntos. Determine la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones o de sus recíprocos:

(a) $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$.
(b) $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
(c) $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$.
(d) $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

6. Escriba el contrarrecíproco de cada una de las afirmaciones del Ejercicio 5.

7. Dados los conjuntos A, B y C, exprese cada uno de los siguientes conjuntos en términos de A, B y C, utilizando los símbolos $\cup, \cap$ y $-$:

$$D = \{x \mid x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C)\},$$
$$E = \{x \mid (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } x \in C\},$$
$$F = \{x \mid x \in A \text{ y } (x \in B \Rightarrow x \in C)\}.$$

8. Si un conjunto A tiene dos elementos, demuestre que $\mathcal{P}(A)$ tiene cuatro elementos. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$ si A tiene un único elemento? ¿Tres elementos? ¿Ningún elemento? ¿Por qué $\mathcal{P}(A)$ se denomina el conjunto potencia de A?

9. Formule y demuestre las leyes de DeMorgan para uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos.

10. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determine si cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es igual al producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) $\{(x, y) \mid x$ es un entero$\}$.
(b) $\{(x, y) \mid 0 < y \leq 1\}$.
(c) $\{(x, y) \mid y > x\}$.
(d) $\{(x, y) \mid x$ no es un entero e y es un entero$\}$.
(e) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

§2 Funciones

El concepto de *función* ya ha sido visto muchas veces, por lo que apenas es necesario recordar lo importante que es para todas las matemáticas. En esta sección damos la definición matemática precisa y exploramos algunos de los conceptos asociados.

Normalmente, una función se concibe como una *regla* que asigna a cada elemento de un conjunto A un elemento de un conjunto B. En cálculo, una función está dada a menudo por una fórmula sencilla como $f(x) = 3x^2 + 2$, o quizá por una fórmula más complicada como

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

Incluso, a menudo no se mencionan explícitamente los conjuntos A y B, conviniendo en suponer que A es el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla tiene sentido y que B es el conjunto de todos los números reales.

Sin embargo, conforme se profundiza en matemáticas se necesita ser más preciso sobre lo que es una función. Los matemáticos *conciben* las funciones de la forma que acabamos de describir, pero la definición que usan es más exacta. En primer lugar, damos la siguiente definición:

Definición. Una ***regla de asignación*** es un subconjunto r del producto cartesiano $C \times D$ de dos conjuntos, con la propiedad de que cada elemento de C aparece como la primera coordenada de *a lo sumo* un par ordenado de r.

Así, un subconjunto r de $C \times D$ es una regla de asignación si

$$[(c, d) \in r \text{ y } (c, d') \in r] \Rightarrow [d = d'].$$

Concebimos r como una forma de asignar al elemento c de C, el elemento d de D para el cual $(c, d) \in r$.

Dada una regla de asignación r, el ***dominio*** de r se define como el subconjunto de C formado por todas las primeras coordenadas de los elementos de r, y el ***conjunto imagen*** de r se define como el subconjunto de D formado por todas las segundas coordenadas de los elementos de r. Formalmente,

$$\text{dominio } r = \{c \mid \text{existe } d \in D \text{ tal que } (c, d) \in r\},$$
$$\text{imagen } r = \{d \mid \text{existe } c \in C \text{ tal que } (c, d) \in r\}.$$

Obsérvese que dada una regla de asignación r, su dominio y su imagen están completamente determinados.

Ahora podemos decir lo que es una función.

Definición. Una ***función*** f es una regla de asignación r, junto con un conjunto B que contiene al conjunto imagen de r. El dominio A de la regla r también se llama el ***dominio*** de la función f, el conjunto imagen de r también se llama el ***conjunto imagen*** de f, y el conjunto B se llama el ***rango*** de f.[†]

Si f es una función con dominio A y rango B, expresamos este hecho escribiendo

$$f : A \longrightarrow B$$

[†]Los analistas tienden a utilizar la palabra "rango" para describir lo que hemos denominado el "conjunto imagen" de f. Evitan dar un nombre al conjunto B.

que se lee "f es una función de A a B", o "f es una aplicación de A a B", o simplemente "f aplica A en B". Algunas veces se visualiza f como una transformación geométrica que físicamente lleva los puntos de A en puntos de B.

Si $f : A \to B$ y si a es un elemento de A, representamos por $f(a)$ el único elemento de B que la regla que determina f asigna a a; se llama el ***valor*** de f en a, o a veces la ***imagen*** de a por f. Formalmente, si r es la regla de la función f, entonces $f(a)$ representa el único elemento de B tal que $(a, f(a)) \in r$.

Utilizando esta notación, se pueden volver a definir las funciones casi como se hizo antes, sin ninguna pérdida de rigor. Por ejemplo, se puede escribir (representando por $\mathbb{R}$ a los números reales)

> "Sea f la función cuya regla es $\{(x, x^3 + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y cuyo rango es $\mathbb{R}$",

o se puede escribir igualmente

> "Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x^3 + 1$".

Ambas frases especifican exactamente la misma función. Pero la frase "sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x^3 + 1$" no es en absoluto apropiada para definir una función porque no especifica ni el dominio ni el rango de f.

Definición. Si $f : A \to B$ y si A_0 es un subconjunto de A, definimos la ***restricción*** de f a A_0 como la función que aplica A_0 en B cuya regla es

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A_0\}.$$

Se denota por $f \mid A_0$, que se lee "f restringida a A_0."

EJEMPLO 1. Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\bar{\mathbb{R}}_+$ los reales no negativos. Considérense las funciones

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} && \text{definida por} \quad f(x) = x^2, \\ g &: \bar{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathbb{R} && \text{definida por} \quad g(x) = x^2, \\ h &: \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ && \text{definida por} \quad h(x) = x^2, \\ k &: \bar{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ && \text{definida por} \quad k(x) = x^2. \end{aligned}$$

La función g es distinta de la función f porque sus reglas son subconjuntos distintos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; es la restricción de f al conjunto $\bar{\mathbb{R}}_+$. La función h también es distinta de f, aunque sus reglas sean el mismo conjunto, porque el rango especificado por h es distinto del rango especificado por f. La función k es distinta de todas éstas. Estas funciones están representadas en la Figura 2.1.

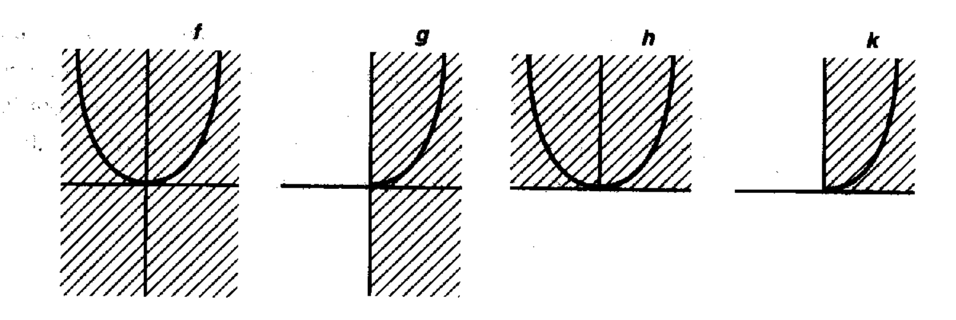


Figura 2.1

Restringir el dominio de una función y cambiar su rango son dos maneras de formar una nueva función a partir de una antigua. Otra manera es formar la composición de dos funciones.

Definición. Dadas las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos la ***composición*** $g \circ f$ de f y g como la función $g \circ f : A \to C$ definida por la ecuación $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Formalmente, $g \circ f : A \to C$ es la función cuya regla es

$$\{(a, c) \mid \text{ para algún } b \in B, f(a) = b \text{ y } g(b) = c\}.$$

A menudo imaginamos la composición $g \circ f$ implicando un movimiento físico del punto a al punto $f(a)$, y luego al punto $g(f(a))$, tal y como se ilustra en la Figura 2.2.

Obsérvese que $g \circ f$ se define sólo cuando el rango de f *es igual* al dominio de g.

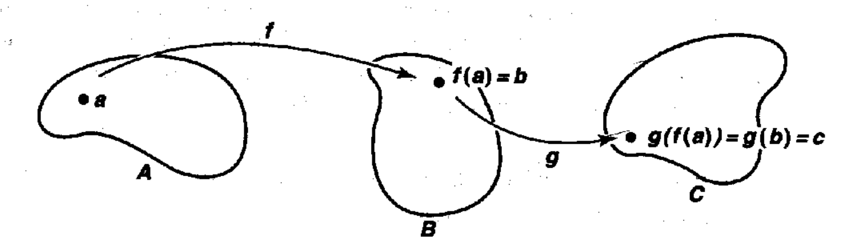


Figura 2.2

EJEMPLO 2. La composición de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 2$ y la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 5x$ es la función $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 2) = 5(3x^2 + 2).$$

En este caso también se puede formar la composición $f \circ g$ que es una función bastante distinta, $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y viene dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x) = 3(5x)^2 + 2.$$

Definición. Se dice que una función $f : A \to B$ es ***inyectiva*** (o ***uno-a-uno***) si para cada par de puntos distintos de A, sus imágenes por f son distintas. Se dice que es ***sobreyectiva*** (o que f aplica A ***sobre*** B) si cada elemento de B es la imagen por la función f de algún elemento de A. Si f es a la vez inyectiva y sobreyectiva, se dice que es ***biyectiva*** (o se llama una ***correspondencia uno-a-uno***).

Más formalmente, f es inyectiva si

$$[f(a) = f(a')] \Rightarrow [a = a']$$

y f es sobreyectiva si

$$[b \in B] \Rightarrow [b = f(a) \text{ para al menos un } a \in A].$$

La inyectividad de f sólo depende de la regla de f; la sobreyectividad depende también del rango de f. Se puede comprobar que la composición de dos funciones inyectivas es inyectiva, y la composición de dos funciones sobreyectivas es sobreyectiva; se sigue entonces que la composición de dos funciones biyectivas es biyectiva.

Si f es biyectiva, existe una función de B a A llamada la ***inversa*** de f. Se representa por f^{-1} y se define haciendo que $f^{-1}(b)$ sea ese único elemento a de A para el cual $f(a) = b$. Dado $b \in B$, el hecho de que f sea sobreyectiva implica que *existe* tal elemento $a \in A$; el hecho de que f sea inyectiva implica que ese elemento a es *único*. Es fácil ver que si f es biyectiva, f^{-1} también es biyectiva.

EJEMPLO 3. Considérense de nuevo las funciones f, g, h y k de la Figura 2.1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Su restricción g a los reales no negativos es inyectiva pero no sobreyectiva. La función $h : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ obtenida a partir de f cambiando el rango es sobreyectiva pero no inyectiva. La función $k : \bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ obtenida a partir de f restringiendo el dominio y cambiando el rango es tanto inyectiva como sobreyectiva, de modo que tiene inversa. Su inversa es, por supuesto, lo que normalmente llamamos la *función raíz cuadrada*.

Un criterio útil para demostrar que una función dada f es biyectiva es el siguiente, cuya demostración se deja para los ejercicios.

Lema 2.1. *Sea $f : A \to B$. Si existen funciones $g : B \to A$ y $h : B \to A$ tales que $g(f(a)) = a$ para todo a de A y $f(h(b)) = b$ para todo b de B, entonces f es biyectiva y $g = h = f^{-1}$.*

Definición. Sea $f : A \to B$. Si A_0 es un subconjunto de A, representamos por $f(A_0)$ el conjunto de todas las imágenes de puntos de A_0 por la función f. Este conjunto se llama ***imagen*** de A_0 por f. Formalmente,

$$f(A_0) = \{b \mid b = f(a) \text{ para al menos un } a \in A_0\}.$$

Por otra parte, si B_0 es un subconjunto de B, denotamos por $f^{-1}(B_0)$ el conjunto de todos los elementos de A cuyas imágenes por f están en B_0; se llama ***preimagen*** de B_0 por f (o la "anti-imagen", o la "imagen inversa" de B_0). Formalmente,

$$f^{-1}(B_0) = \{a \mid f(a) \in B_0\}.$$

Por supuesto, puede que no exista ningún punto a de A cuya imagen esté en B_0, y en ese caso, $f^{-1}(B_0)$ es vacío.

Obsérvese que si $f : A \to B$ es biyectiva y $B_0 \subset B$, tenemos dos significados para la notación $f^{-1}(B_0)$. Se puede tomar para representar la *preimagen* de B_0 por la función f o para denotar la *imagen* de B_0 por la función $f^{-1} : B \to A$. Sin embargo, estos dos significados dan exactamente el mismo subconjunto de A, así que, de hecho, no hay ambigüedad alguna.

Es necesario cierta precaución si se quiere usar correctamente la notación de f y f^{-1}. Por ejemplo, la operación f^{-1}, cuando se aplica a subconjuntos de B, se comporta muy bien; conserva las inclusiones, las uniones, las intersecciones y las diferencias de conjuntos. Usaremos este hecho frecuentemente. Pero la operación f, cuando se aplica a subconjuntos de A, sólo conserva las inclusiones y las uniones. Véanse los Ejercicios 2 y 3.

Obsérvese que no es cierto, en general, que $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$ y $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ (véase el ejemplo siguiente). Las reglas relevantes, que dejamos para que se comprueben, son las siguientes: si $f : A \to B$ y si $A_0 \subset A$ y $B_0 \subset B$, entonces

$$A_0 \subset f^{-1}(f(A_0)) \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0.$$

La primera inclusión es una igualdad si f es inyectiva, y la segunda inclusión es una igualdad si f es sobreyectiva.

EJEMPLO 4. Considérese la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 2$ (Figura 2.3). Representamos por $[a, b]$ el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Entonces

$$f^{-1}(f([0,1])) = f^{-1}([2,5]) = [-1,1] \text{ y}$$

$$f(f^{-1}([0,5])) = f([-1,1]) = [2,5].$$

Ejercicios

1. Sea $f : A \to B$. Sean $A_0 \subset A$ y $B_0 \subset B$.

(a) Demuestre que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.

(b) Demuestre que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

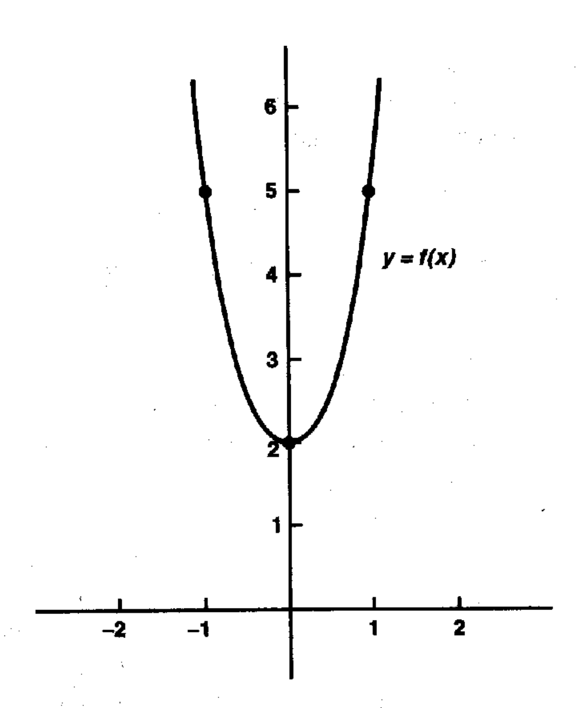


Figura 2.3

2. Sea $f : A \to B$ y sean $A_i \subset A$ y $B_i \subset B$ para $i = 0, 1$. Demuestre que f^{-1} conserva las inclusiones, las uniones, las intersecciones y las diferencias de conjuntos:

(a) $B_0 \subset B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$.
(b) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.
(c) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.
(d) $f^{-1}(B_0 - B_1) = f^{-1}(B_0) - f^{-1}(B_1)$.

Demuestre que f conserva solamente las inclusiones y las uniones:

(e) $A_0 \subset A_1 \Rightarrow f(A_0) \subset f(A_1)$.
(f) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.
(g) $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$. Demuestre que se da la igualdad si f es inyectiva.
(h) $f(A_0 - A_1) \supset f(A_0) - f(A_1)$. Demuestre que se da la igualdad si f es inyectiva.

3. Demuestre que (b), (c), (f) y (g) del Ejercicio 2 se verifican para uniones e intersecciones arbitrarias.

4. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$.

(a) Si $C_0 \subset C$, demuestre que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

(b) Si f y g son inyectivas, demuestre que $g \circ f$ es inyectiva.
(c) Si $g \circ f$ es inyectiva, ¿qué se puede decir sobre la inyectividad de f y de g?
(d) Si f y g son sobreyectivas, demuestre que $g \circ f$ es sobreyectiva.
(e) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, ¿qué se puede decir sobre la sobreyectividad de f y de g?
(f) Resuma las respuestas (b)-(e) en forma de teorema.

5. En general, representamos la ***función identidad*** de un conjunto C por i_C. Es decir, definimos $i_C : C \to C$ como la función dada por la regla $i_C(x) = x$ para todo $x \in C$. Dada $f : A \to B$, decimos que una función $g : B \to A$ es una ***inversa por la izquierda*** de f si $g \circ f = i_A$, y decimos que $h : B \to A$ es una ***inversa por la derecha*** de f si $f \circ h = i_B$.

(a) Demuestre que si f tiene una inversa por la izquierda, f es inyectiva, y si f tiene una inversa por la derecha, f es sobreyectiva.
(b) Dé un ejemplo de una función que tenga inversa por la izquierda pero no inversa por la derecha.
(c) Dé un ejemplo de una función que tenga inversa por la derecha pero no inversa por la izquierda.
(d) ¿Puede tener una función más de una inversa por la izquierda? ¿Y más de una inversa por la derecha?
(e) Demuestre que si f tiene tanto una inversa por la izquierda g como una inversa por la derecha h, entonces f es biyectiva y $g = h = f^{-1}$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^3 - x$. Restringiendo adecuadamente el dominio y el rango de f, obtenga a partir de f una función biyectiva g. Dibuje las gráficas de g y g^{-1} (hay diferentes elecciones posibles para g).

§3 Relaciones

Un concepto que es, en cierto sentido, más general que el de función es el concepto de *relación*. En esta sección, definimos lo que los matemáticos entienden por una relación y consideramos dos tipos de relaciones que se presentan con gran frecuencia en matemáticas: *relaciones de equivalencia* y *relaciones de orden*. Las relaciones de orden se usarán en todo el libro, mientras que las relaciones de equivalencia no se utilizarán hasta la sección §22.

Definición. Una ***relación*** en un conjunto A es un subconjunto C del producto cartesiano $A \times A$.

Si C es una relación en A, usamos la notación xCy para expresar lo mismo que $(x, y) \in C$. Se leerá “x está en la relación C con y”.

Una regla de asignación r de una función $f : A \to A$ es también un subconjunto de $A \times A$. Pero es un subconjunto de una clase muy especial: a saber, de una clase tal que cada elemento de A aparece como la primera coordenada de un elemento de r exactamente una vez. *Cualquier* subconjunto de $A \times A$ es una relación en A.

EJEMPLO 1. Sea P el conjunto de todas las personas del mundo y definimos $D \subset P \times P$ mediante la ecuación

$$D = \{(x, y) \mid x \text{ es un descendiente de } y\}.$$

Entonces D es una relación en el conjunto P. Las afirmaciones "x está en la relación D con y" y "x es un descendiente de y" significan exactamente lo mismo, esto es, que $(x, y) \in D$. Otras dos relaciones en P son las siguientes:

$$S = \{(x, y) \mid x \text{ tiene un antepasado que también es antepasado de } y\},$$
$$H = \{(x, y) \mid \text{los padres de } x \text{ son los padres de } y\}.$$

Podemos llamar a S la "relación de sangre" (juego de palabras intencionado) y podemos llamar a H la "relación de hermano". Estas tres relaciones tienen propiedades bastante diferentes. Por ejemplo, la relación de sangre es simétrica (si x tiene relación de sangre con y, entonces y tiene relación de sangre con x), mientras que la relación de descendencia no lo es. Consideraremos de nuevo estas relaciones dentro de poco.

Relaciones de equivalencia y particiones

Una ***relación de equivalencia*** en un conjunto A es una relación C que verifica las siguientes tres propiedades:

(1) (Reflexividad) xCx para todo $x \in A$.

(2) (Simetría) si xCy, entonces yCx.

(3) (Transitividad) si xCy e yCz, entonces xCz.

EJEMPLO 2. Entre las relaciones definidas en el Ejemplo 1, la relación de descendencia D no es reflexiva ni simétrica, mientras que la relación de sangre S no es transitiva (yo no tengo relación de sangre con mi mujer, aunque mis hijos sí la tienen). La relación de hermano es, sin embargo, una relación de equivalencia, como se puede comprobar.

No hay ninguna razón por la que se deba utilizar una letra mayúscula —ni de hecho una letra de cualquier tipo— para representar una relación, aunque *sea* un conjunto. Otro símbolo lo hará exactamente igual de bien. Un símbolo que se utiliza frecuentemente para representar una relación de equivalencia es el símbolo "tilde" $\sim$. Enunciadas con esta notación, las propiedades de una relación de equivalencia se convierten en

(1) $x \sim x$ para todo $x \in A$.

(2) Si $x \sim y$, entonces $y \sim x$.

(3) Si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Existen otros muchos símbolos que se han ideado para representar relaciones de equivalencia particulares; nos encontraremos con algunos de ellos en las páginas de este libro.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto A y un elemento x de A, definimos un cierto subconjunto E de A, llamado ***clase de equivalencia*** determinada por x, mediante la ecuación

$$E = \{y \mid y \sim x\}.$$

Obsérvese que la clase de equivalencia E determinada por x contiene a x, puesto que $x \sim x$. Las clases de equivalencia tienen la siguiente propiedad:

Lema 3.1. *Dos clases de equivalencia E y E' son ya disjuntas ya iguales.*

Demostración. Sea E la clase de equivalencia determinada por x y E' la clase de equivalencia determinada por x'. Supongamos que $E \cap E'$ no es vacío; sea y un punto de $E \cap E'$ (véase la Figura 3.1). Demostremos que $E = E'$.

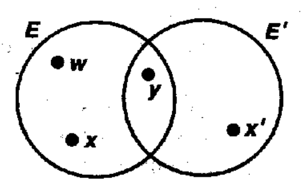


Figura 3.1

Por definición, tenemos $y \sim x$ e $y \sim x'$. La simetría nos permite concluir que $x \sim y$ e $y \sim x'$; por la transitividad se deduce que $x \sim x'$. Si ahora w es cualquier punto de E, se tiene $w \sim x$ por definición; aplicando de nuevo la transitividad se tiene que $w \sim x'$. Concluimos que $E \subset E'$.

La simetría de la situación nos permite deducir también que $E' \subset E$, y por tanto, $E = E'$. ■

Dada una relación de equivalencia en un conjunto A, representamos por $\mathcal{E}$ la familia de todas las clases de equivalencia determinadas por esta relación. El lema anterior demuestra que elementos distintos de $\mathcal{E}$ son disjuntos. Además, la unión de los elementos de $\mathcal{E}$ es igual a todo A ya que cada elemento de A pertenece a una clase de equivalencia. La familia $\mathcal{E}$ es un ejemplo particular de lo que se llama una partición de A:

Definición. Una ***partición*** de un conjunto A es una familia de subconjuntos disjuntos no vacíos de A cuya unión es todo A.

Estudiar relaciones de equivalencia en un conjunto A y estudiar particiones de A es realmente lo mismo. Dada una partición $\mathcal{D}$ de A, hay exactamente una relación de equivalencia en A a partir de la cual se deriva.

La demostración no es difícil. Para probar que la partición $\mathcal{D}$ proviene de alguna relación de equivalencia, definimos una relación C en A haciendo xCy si x e y pertenecen al mismo elemento de $\mathcal{D}$. La simetría de C es obvia; la reflexividad se deduce del hecho de que la unión de los elementos de $\mathcal{D}$ es igual a todo A; la transitividad se sigue del hecho de que elementos distintos de $\mathcal{D}$ son disjuntos. Es sencillo comprobar que la colección de las clases de equivalencia determinadas por C es precisamente la familia $\mathcal{D}$.

Para demostrar que existe una única relación, suponemos que C_1 y C_2 son dos relaciones de equivalencia en A que dan lugar a la misma familia de clases de equivalencia $\mathcal{D}$. Dado $x \in A$, demostramos que yC_1x si y sólo si yC_2x, de lo que se deduce que $C_1 = C_2$. Sea E_1 la clase de equivalencia determinada por x respecto a la relación C_1; sea E_2 la clase de equivalencia determinada por x respecto a la relación C_2. Entonces E_1 es un elemento de $\mathcal{D}$, y por tanto debe ser igual al único elemento D de $\mathcal{D}$ que contiene a x. Análogamente, E_2 debe ser igual a D. Ahora por definición, E_1 está formado por todos los y tales que yC_1x y E_2 está formado por todos los y tales que yC_2x. Como $E_1 = D = E_2$, el resultado queda demostrado.

EJEMPLO 3. Definimos dos puntos del plano como equivalentes si están a la misma distancia del origen. La reflexividad, simetría y transitividad se cumplen trivialmente. La colección $\mathcal{E}$ de las clases de equivalencia está formada por todas las circunferencias centradas en el origen, junto con el conjunto cuyo único elemento es el origen.

EJEMPLO 4. Definimos dos puntos del plano como equivalentes si tienen la misma coordenada y. La familia de las clases de equivalencia es la colección de todas las rectas del plano paralelas al eje x.

EJEMPLO 5. Sea $\mathcal{L}$ la familia de todas las rectas del plano paralelas a la recta $y = -x$. Entonces $\mathcal{L}$ es una partición del plano, ya que cada punto está, exactamente, en una de esas rectas. La partición $\mathcal{L}$ proviene de la relación de equivalencia en el plano definida por: dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son equivalentes si $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$.

EJEMPLO 6. Sea $\mathcal{L}'$ la familia de *todas* las rectas del plano. Entonces $\mathcal{L}'$ no es una partición del plano, ya que elementos distintos de $\mathcal{L}'$ no van a ser necesariamente disjuntos; dos rectas se pueden cortar sin ser iguales.

Relaciones de orden

Una relación C en un conjunto A se denomina ***relación de orden*** (***orden simple***, u ***orden lineal***) si tiene las siguientes propiedades:

(1) (Comparabilidad) para cualesquiera x e y de A tales que $x \neq y$, xCy o yCx.

(2) (No reflexividad) ningún x de A verifica la relación xCx.

(3) (Transitividad) si xCy e yCz, entonces xCz.

Obsérvese que la propiedad (1) no excluye por sí misma la posibilidad de que para algunos pares de elementos x e y de A, se verifiquen ambas relaciones xCy e yCx (puesto que "o" significa "lo uno o lo otro, o ambos"). Pero las propiedades (2) y (3) combinadas sí excluyen esta posibilidad, porque si se dieran ambas xCy e yCx, la transitividad implicaría que xCx, contradiciendo la no reflexividad.

EJEMPLO 7. Consideremos la relación en la recta real consistente en todos los pares (x, y) de números reales tales que $x < y$. Es una relación de orden, llamada la "relación de orden usual", en la recta real. Una relación de orden menos conocida en la recta real es la siguiente: definimos xCy si $x^2 < y^2$, o si $x^2 = y^2$ y $x < y$. Se puede comprobar que ésta es una relación de orden.

EJEMPLO 8. Consideramos de nuevo las relaciones entre las personas dadas en el Ejemplo 1. La relación de sangre S no satisface ninguna de las propiedades de una relación de orden y la relación de hermano H sólo verifica (3). La relación de descendencia D funciona algo mejor, ya que satisface (2) y (3); sin embargo, la comparabilidad aún falla. Las relaciones que verifican (2) y (3) aparecen con la suficiente frecuencia en matemáticas como para que se les dé un nombre especial. Se llaman relaciones de *orden parcial estricto*; las consideraremos más adelante (véase §11).

Así como la tilde, $\sim$, es el símbolo genérico para una relación de equivalencia, el símbolo "menor que", $<$, se utiliza generalmente para representar una relación de orden. Establecida esta notación, las propiedades de una relación de orden se convierten en

(1) Si $x \neq y$, entonces $x < y$ o $y < x$.

(2) Si $x < y$, entonces $x \neq y$.

(3) Si $x < y$ e $y < z$, entonces $x < z$.

Utilizaremos la notación $x \leq y$ para representar el enunciado "bien $x < y$, bien $x = y$", y usaremos $y > x$ para decir "$x < y$". Escribiremos $x < y < z$ cuando queramos decir "$x < y$ e $y < z$".

Definición. Si X es un conjunto y $<$ es una relación de orden en X, y si $a < b$, utilizamos la notación (a, b) para representar el conjunto

$$\{x \mid a < x < b\}$$

y se denomina ***intervalo abierto*** de X. Si este conjunto es vacío, a se denomina ***inmediato predecesor*** de b, y b ***inmediato sucesor*** de a.

Definición. Supongamos que A y B son dos conjuntos con relaciones de orden $<_A$ y $<_B$, respectivamente. Decimos que A y B tienen el mismo ***tipo de orden*** si existe

una correspondencia biyectiva entre ellos que preserva el orden, esto es, si existe una función biyectiva $f : A \to B$ tal que

$$a_1 <_A a_2 \Longrightarrow f(a_1) <_B f(a_2).$$

EJEMPLO 9. El intervalo $(-1, 1)$ de los números reales tiene el mismo tipo de orden que el propio conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, ya que la función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

es una correspondencia biyectiva que conserva el orden, como se puede comprobar. Está dibujada en la Figura 3.2.

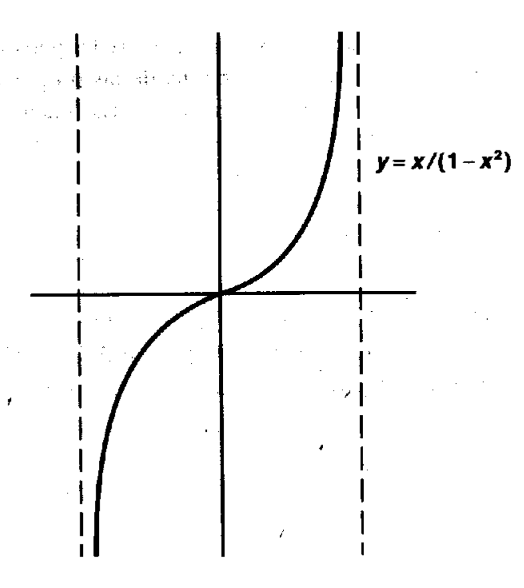


Figura 3.2

EJEMPLO 10. El subconjunto $A = \{0\} \cup (1, 2)$ de $\mathbb{R}$ tiene el mismo tipo de orden que el subconjunto

$$[0, 1) = \{x \mid 0 \le x < 1\}$$

de $\mathbb{R}$. La función $f : A \to [0, 1)$ definida por

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = x - 1 \quad \text{para } x \in (1, 2)$$

es la correspondencia que preserva el orden que se necesita.

Una forma interesante de definir una relación de orden, que nos será útil posteriormente en algunos ejemplos, es la siguiente:

Definición. Supongamos que A y B son dos conjuntos con relaciones de orden $<_A$ y $<_B$, respectivamente. Definimos una relación de orden $<$ en $A \times B$ mediante

$$a_1 \times b_1 < a_2 \times b_2$$

si $a_1 <_A a_2$, o si $a_1 = a_2$ y $b_1 <_B b_2$. Se denomina ***relación de orden del diccionario*** sobre $A \times B$.

Comprobar que ésta es una relación de orden conlleva estudiar varios casos por separado; esto se deja como ejercicio.

La razón por la que se ha elegido esta terminología es bastante evidente. La regla que define $<$ es la misma regla utilizada para ordenar las palabras en el diccionario. Dadas dos palabras, se comparan sus primeras letras y se ordenan las palabras de acuerdo al orden en el cual esas primeras letras aparecen en el alfabeto. Si las primeras letras son iguales, se comparan las segundas letras, y se ordenan en consecuencia. Y así sucesivamente.

EJEMPLO 11. Consideramos el orden del diccionario sobre el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En este orden, el punto p es menor que cualquier otro punto que se sitúe sobre él en la recta vertical que pasa por p, y también es menor que todo punto situado a la derecha de dicha recta vertical.

EJEMPLO 12. Consideremos el conjunto $[0, 1)$ de números reales y el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los enteros positivos, ambos con sus órdenes usuales; damos a $\mathbb{Z}_+ \times [0, 1)$ el orden del diccionario. Este conjunto tiene el mismo tipo de orden que el conjunto de los reales no negativos. La función

$$f(n \times t) = n + t - 1$$

es la correspondencia biyectiva que preserva el orden que se necesita. Por otro lado, el conjunto $[0, 1) \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario tiene realmente un tipo de orden distinto; por ejemplo, todo elemento de este conjunto ordenado tiene un inmediato sucesor. Estos conjuntos aparecen representados en la Figura 3.3.

Una de las propiedades de los números reales que quizá ya se haya visto es la "propiedad del supremo". Se puede definir esta propiedad para un conjunto ordenado arbitrario. En primer lugar, necesitamos algunas definiciones preliminares.

Supongamos que A es un conjunto ordenado por la relación $<$. Sea A_0 un subconjunto de A. Decimos que un elemento b es el ***máximo*** de A_0 si $b \in A_0$ y si $x \leq b$ para todo $x \in A_0$. Análogamente, decimos que a es el ***mínimo*** de A_0 si $a \in A_0$ y si $a \leq x$ para todo $x \in A_0$. Es fácil ver que un conjunto tiene, a lo sumo, un máximo y un mínimo.

Decimos que el subconjunto A_0 de A está ***acotado superiormente*** si existe un elemento b de A tal que $x \leq b$ para todo $x \in A_0$; el elemento b se denomina ***cota superior*** para A_0. Si el conjunto de todas las cotas superiores de A_0 tiene un mínimo,

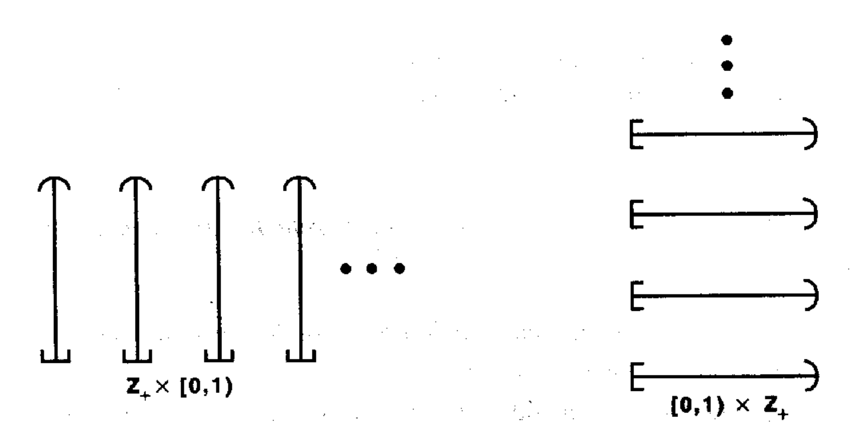


Figura 3.3

ese elemento se denomina el ***extremo superior*** o ***supremo*** de A_0. Se representa por $\sup A_0$; éste puede pertenecer o no a A_0. Si pertenece, es el máximo de A_0.

Análogamente, A_0 está ***acotado inferiormente*** si existe un elemento a de A tal que $a \leq x$ para todo $x \in A_0$; el elemento a se denomina ***cota inferior*** para A_0. Si el conjunto de todas las cotas inferiores de A_0 tiene un máximo, ese elemento se denomina ***extremo inferior*** o ***ínfimo*** de A_0. Se representa por $\inf A_0$; éste puede pertenecer o no a A_0. Si pertenece, es el mínimo de A_0.

Ahora podemos definir la propiedad del supremo.

Definición. Un conjunto ordenado A se dice que tiene la ***propiedad del supremo*** si todo subconjunto no vacío A_0 de A que esté acotado superiormente tiene supremo. Análogamente, se dice que el conjunto A tiene la ***propiedad del ínfimo*** si todo subconjunto no vacío A_0 de A que esté acotado inferiormente tiene ínfimo.

Dejamos para los ejercicios el demostrar que A tiene la propiedad del supremo si, y sólo si, tiene la propiedad del ínfimo.

EJEMPLO 13. Consideremos el conjunto $A = (-1, 1)$ de números reales con el orden usual. Suponiendo el hecho de que los números reales tienen la propiedad del supremo, se deduce que el conjunto A tiene la propiedad del supremo. Para ello, dado cualquier subconjunto de A que tenga una cota superior *en* A, se tiene que su supremo (en los números reales) debe estar en A. Por ejemplo, el subconjunto $\{-1/2n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de A, aunque no tiene un máximo, tiene un supremo en A, el número 0.

Por otro lado, el conjunto $B = (-1, 0) \cup (0, 1)$ no tiene la propiedad del supremo. El subconjunto $\{-1/2n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de B está acotado superiormente por cualquier elemento de $(0, 1)$, pero no tiene un supremo en B.

Ejercicios

Relaciones de equivalencia

1. Decimos que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) del plano son equivalentes si $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$. Compruebe que es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia.

2. Sea C una relación sobre un conjunto A. Si $A_0 \subset A$, definimos la ***restricción*** de C a A_0 como la relación $C \cap (A_0 \times A_0)$. Demuestre que la restricción de una relación de equivalencia es una relación de equivalencia.

3. Aquí hay una "demostración" de que toda relación C que es a la vez simétrica y transitiva es también reflexiva: "Como C es simétrica, aCb implica bCa. Como C es transitiva, aCb y bCa implican aCa, como se quería demostrar". Encuentre el fallo en este argumento.

4. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Definimos una relación en A mediante $a_0 \sim a_1$ si
$$f(a_0) = f(a_1).$$
   (a) Demuestre que es una relación de equivalencia.
   (b) Sea A^* el conjunto de las clases de equivalencia. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre A^* y B.

5. Sean S y S' los siguientes subconjuntos del plano:
$$S = \{(x, y) \mid y = x + 1 \text{ y } 0 < x < 2\}, \quad S' = \{(x, y) \mid y - x \text{ es un entero}\}.$$
   (a) Demuestre que S' es una relación de equivalencia sobre la recta real y que $S' \supset S$. Describa las clases de equivalencia de S'.
   (b) Demuestre que dada cualquier colección de relaciones de equivalencia sobre un conjunto A, su intersección es una relación de equivalencia sobre A.
   (c) Describa la relación de equivalencia T sobre la recta real que es la intersección de todas las relaciones de equivalencia sobre la recta real que contienen a S. Describa las clases de equivalencia de T.

Relaciones de orden

6. Definimos una relación en el plano por
$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$
si ya $y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2$, ya $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ y $x_0 < x_1$. Demuestre que ésta es una relación de orden sobre el plano, y descríbala geométricamente.

7. Demuestre que la restricción de una relación de orden es una relación de orden.

8. Compruebe que la relación definida en el Ejemplo 7 es una relación de orden.

9. Compruebe que el orden del diccionario es una relación de orden.

10. (a) Demuestre que la aplicación $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ del Ejemplo 9 conserva el orden.

(b) Demuestre que la ecuación $g(y) = 2y/[1 + (1 + 4y^2)^{1/2}]$ define una función $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ que es, a la vez, una inversa por la izquierda y por la derecha de f.

11. Demuestre que un elemento en un conjunto ordenado tiene, a lo sumo, un inmediato sucesor y un inmediato predecesor. Demuestre que un subconjunto de un conjunto ordenado tiene, a lo sumo, un mínimo y, a lo sumo, un máximo.

12. Sea $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los enteros positivos. Considere las siguientes relaciones de orden en $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$:

(i) El orden del diccionario.

(ii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ si ya $x_0 - y_0 < x_1 - y_1$, ya $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$ e $y_0 < y_1$.

(iii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$ si ya $x_0 + y_0 < x_1 + y_1$, ya $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$ e $y_0 < y_1$.

Con estas relaciones de orden, ¿qué elementos tienen inmediato predecesor? ¿Tiene el conjunto un mínimo? Demuestre que los tres tipos de órdenes son distintos.

13. Demuestre lo siguiente:
Teorema. *Si un conjunto ordenado A tiene la propiedad del supremo, entonces tiene la propiedad del ínfimo.*

14. Si C es una relación en un conjunto A, se define una nueva relación D en A mediante $(b, a) \in D$ si $(a, b) \in C$.

(a) Demuestre que C es simétrica si, y sólo si, $C = D$.

(b) Demuestre que si C es una relación de orden, D también es una relación de orden.

(c) Demuestre el recíproco del teorema del Ejercicio 13.

15. Asumamos que la recta real tiene la propiedad del supremo.

(a) Demuestre que los conjuntos

$$[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\},$$
$$[0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$$

tienen la propiedad del supremo.

(b) ¿Tiene el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ con el orden del diccionario la propiedad del supremo? ¿Qué ocurre con $[0, 1] \times [0, 1)$? ¿Y con $[0, 1) \times [0, 1]$?

§4 Los enteros y los números reales

Hasta ahora hemos estado discutiendo lo que podrían llamarse los *fundamentos lógicos* para nuestro estudio de la topología —los conceptos elementales de la teoría de conjuntos—. Ahora hacemos un cambio radical a lo que podríamos llamar *fundamentos matemáticos* de nuestro estudio —los enteros y el sistema de números reales—. Ya los hemos utilizado de una manera informal, en los ejemplos y ejercicios de las secciones anteriores. Ahora deseamos tratarlos más formalmente.

Una forma de establecer estos fundamentos es *construir* el sistema de números reales, utilizando únicamente los axiomas de la teoría de conjuntos —construirlos con las manos desnudas, por decirlo de alguna forma—. Esta manera de aproximar el tema conlleva un buen reparto de tiempo y esfuerzo, y es de mayor interés lógico que matemático.

Una segunda forma sería simplemente asumir un conjunto de axiomas para los números reales y trabajar desde esos axiomas. En la presente sección esbozaremos esta aproximación a los números reales. Concretamente, daremos un conjunto de axiomas para dichos números e indicaremos cómo las propiedades más conocidas de los números reales y enteros se deducen de ellos. Pero dejaremos la mayoría de las demostraciones como ejercicios. Si el lector ya ha estudiado todo esto con anterioridad, nuestra descripción refrescará su memoria. En caso contrario, puede interesarle trabajar con detalle todos los ejercicios, para así conocer los fundamentos matemáticos.

En primer lugar necesitamos una definición de la teoría de conjuntos.

Definición. Una ***operación binaria*** en un conjunto A es una función f que aplica $A \times A$ en A.

Cuando se trabaja con una operación binaria f en un conjunto A, usualmente utilizamos una notación diferente a la notación funcional estándar introducida en §2. En lugar de representar el valor de la función f en el punto (a, a') por $f(a, a')$, escribiremos el símbolo que representa dicha función *entre* las dos coordenadas del punto en cuestión, escribiendo así el valor de la función en (a, a') como afa'. Más aún (como en el caso de las relaciones), es más común utilizar otros símbolos distintos a las letras para representar una operación. Los utilizados con mayor frecuencia son la suma $+$, los símbolos para el producto, $\cdot$ y $\circ$, y el asterisco $*$; sin embargo, existen otros muchos.

Hipótesis

Supongamos que existen un conjunto $\mathbb{R}$, llamado el conjunto de los ***números reales***, dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ sobre $\mathbb{R}$, llamadas operaciones suma y multiplica-

ción respectivamente, y una relación de orden $<$ sobre $\mathbb{R}$, tales que se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades algebraicas

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$,
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo x, y, z en $\mathbb{R}$.

(2) $x+y = y+x$,
$x \cdot y = y \cdot x$ para todo x, y en $\mathbb{R}$.

(3) Existe un único elemento de $\mathbb{R}$ llamado ***cero***, representado por 0, de forma que $x+0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Existe un único elemento de $\mathbb{R}$ llamado ***uno***, distinto de 0 y representado por 1, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(4) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$.
Para cada $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0 existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(5) $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Una propiedad mixta algebraica y de orden

(6) Si $x > y$, entonces $x + z > y + z$.
Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

Otras propiedades

(7) La relación de orden $<$ verifica la propiedad del supremo.

(8) Si $x < y$, existe un elemento z tal que $x < z$ y $z < y$.

De las propiedades (1)-(5) se deducen las conocidas “leyes del álgebra”. Dado x, se representa por $-x$ el número y tal que $x + y = 0$; se denomina ***opuesto*** de x. Se define la ***operación sustracción*** mediante la relación $z - x = z + (-x)$. Análogamente, dado $x \neq 0$, se representa por $1/x$ el número y tal que $x \cdot y = 1$; se denomina ***inverso*** de x. Así, definimos el ***cociente*** z/x mediante la fórmula $z/x = z \cdot (1/x)$. Las leyes usuales de los signos y las reglas para la suma y la multiplicación de fracciones se deducen como teoremas. Estas leyes del álgebra aparecen enumeradas en el Ejercicio 1 al final de la sección. Frecuentemente, representaremos $x \cdot y$ simplemente por xy.

Cuando se une la propiedad (6) a las propiedades (1)-(5), se pueden demostrar las conocidas “leyes de las desigualdades”, como por ejemplo:

$$\text{Si } x > y \text{ y } z < 0, \text{ entonces } x \cdot y < y \cdot z.$$

$$-1 < 0 \ \text{ y } \ 0 < 1.$$

Las leyes de las desigualdades aparecen recogidas en el Ejercicio 2.

Decimos que un número es ***positivo*** si $x > 0$, y ***negativo*** si $x < 0$. Representaremos los reales positivos por $\mathbb{R}_+$ y los reales no negativos (por razones que se

explicarán posteriormente) por $\bar{\mathbb{R}}_+$. Las propiedades (1)-(6) son conocidas en el álgebra moderna. Cualquier conjunto con dos operaciones binarias verificando (1)-(5) se denomina ***cuerpo***; si el cuerpo tiene una relación de orden que satisface (6), se denomina ***cuerpo ordenado***.

Por otro lado, las propiedades (7) y (8) son propiedades conocidas en topología. Éstas implican sólo a la relación de orden; cualquier conjunto con una relación de orden verificando (7) y (8) se denomina ***continuo lineal***.

Ahora bien, cuando a los axiomas correspondientes a un cuerpo ordenado [propiedades (1)-(6)] se unen los axiomas relativos a un continuo lineal [propiedades (7) y (8)], la lista resultante contiene algunas redundancias. En particular, la propiedad (8) se puede obtener como una consecuencia de las demás; dados $x < y$ se demuestra que $z = (x + y)/(1 + 1)$ verifica los requisitos de (8). Por lo tanto, en el tratamiento estándar de los números reales, se toman como axiomas las propiedades (1)-(7), convirtiéndose la propiedad (8) en un teorema. Nosotros hemos incluido (8) en nuestra lista simplemente para enfatizar el hecho de que ésta y el principio del supremo son las dos propiedades fundamentales de la relación de orden para $\mathbb{R}$. De estas dos se pueden deducir muchas de las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$, como se verá en el Capítulo 3.

Ahora bien, no hay nada en esta lista, tal y como aparece, que nos diga qué es un entero. Vamos a definir ahora los *enteros*, utilizando únicamente las propiedades (1)-(6).

Definición. Se dice que un subconjunto A de los números reales es ***inductivo*** si contiene el número 1, y si para todo x de A, el número $x + 1$ también está en A. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Entonces, el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los ***enteros positivos*** se define de la forma

$$\mathbb{Z}_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Obsérvese que el conjunto $\mathbb{R}_+$ de los números reales positivos es inductivo, pues contiene el 1, y la afirmación $x > 0$ implica $x + 1 > 0$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{R}_+$, y de esta forma los elementos de $\mathbb{Z}_+$ son efectivamente positivos, tal y como la elección de la terminología sugiere. De hecho, se comprueba fácilmente que 1 es el elemento más pequeño de $\mathbb{Z}_+$, ya que el conjunto de todos los números reales x para los cuales $x \geq 1$ es inductivo.

Las propiedades básicas de $\mathbb{Z}_+$, las cuales se deducen inmediatamente de la definición, son las siguientes:

(1) $\mathbb{Z}_+$ es inductivo.

(2) (Principio de inducción). Si A es un conjunto inductivo de enteros positivos, entonces $A = \mathbb{Z}_+$.

Vamos a definir el conjunto $\mathbb{Z}$ de los ***enteros*** como el conjunto formado por los enteros positivos $\mathbb{Z}_+$, el número 0, y los negativos de los elementos de $\mathbb{Z}_+$. Se demuestra que la suma, la diferencia y el producto de dos enteros son enteros, pero el cociente no tiene por qué ser necesariamente un entero. El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los cocientes de los enteros se denomina el conjunto de los ***números racionales***.

Se puede demostrar también que, dado el entero n, no existe ningún entero a tal que $n < a < n + 1$.

Si n es un entero positivo, utilizaremos el símbolo S_n para representar el conjunto de todos los enteros positivos menores que n; lo llamaremos una ***sección*** de los enteros positivos. El conjunto S_1 es vacío y S_{n+1} representa el conjunto de los enteros positivos entre 1 y n inclusive. También emplearemos la notación

$$\{1, \ldots, n\} = S_{n+1}$$

para el conjunto anterior.

Vamos a demostrar ahora dos propiedades de los enteros positivos que pueden ser no demasiado conocidas, pero que son bastante útiles. Se pueden considerar como versiones alternativas del principio de inducción.

Teorema 4.1 (Principio del buen orden). *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene un mínimo.*

Demostración. En primer lugar vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, se verifica la siguiente afirmación: *Todo subconjunto no vacío de $\{1, \ldots, n\}$ tiene un mínimo.*

Sea A el conjunto de todos los enteros positivos n para los cuales se cumple dicha afirmación. Entonces A contiene al 1, ya que si $n = 1$, el único subconjunto no vacío de $\{1, \ldots, n\}$ es el propio conjunto $\{1\}$. Por tanto, suponiendo que A contiene a n, vamos a demostrar que también contiene a $n + 1$. Sea C un subconjunto no vacío del conjunto $\{1, \ldots, n + 1\}$. Si C está formado únicamente por $n + 1$, entonces dicho elemento es el menor elemento de C. En caso contrario, consideremos el conjunto $C \cap \{1, \ldots, n\}$, que es no vacío. Como $n \in A$, este conjunto tiene un mínimo, que automáticamente será también el mínimo de C. Así A es inductivo, y podemos concluir que $A = \mathbb{Z}_+$; por tanto, la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ahora vamos a demostrar el teorema. Supongamos que D es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$. Elijamos un elemento $n \in D$. Entonces, el conjunto $A = D \cap \{1, \ldots, n\}$ es no vacío, y A tendrá un mínimo k. El elemento k será también el mínimo de D. ∎

Teorema 4.2 (Principio de inducción fuerte). *Sea A un conjunto de enteros positivos. Supongamos que para cada entero positivo n, la afirmación $S_n \subset A$ implica $n \in A$. Entonces $A = \mathbb{Z}_+$.*

Demostración. Si A es distinto de $\mathbb{Z}_+$, sea n el menor entero positivo que no pertenece a A. Entonces, todo entero positivo menor que n está en A, y por tanto $S_n \subset A$. Nuestra hipótesis implica que $n \in A$, lo cual es una contradicción. ■

En todo lo que se ha hecho hasta ahora se han utilizado únicamente los axiomas para un cuerpo ordenado, propiedades (1)-(6) de los números reales. ¿En qué punto se necesita (7), el axioma del supremo?

Para una cosa, se necesita el axioma del supremo para demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los enteros positivos no tiene ninguna cota superior en $\mathbb{R}$. Ésta es la ***propiedad arquimediana*** de la recta real. Para demostrarlo, suponemos que existe una cota superior para $\mathbb{Z}_+$, con lo que llegaremos a una contradicción. Si $\mathbb{Z}_+$ tiene una cota superior, debe tener un supremo b. Existe un $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n > b - 1$, pues en caso contrario $b-1$ sería una cota superior de $\mathbb{Z}_+$ más pequeña que b. Por tanto, $n+1 > b$, contradiciendo el hecho de que b es cota superior de $\mathbb{Z}_+$.

El axioma del supremo se utiliza también para demostrar otras muchas cosas de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, se usa para probar que $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del ínfimo. También se utiliza para demostrar la existencia de una única raíz cuadrada positiva $\sqrt{x}$ para cada número real positivo. Este hecho permite comprobar la existencia de números reales que no son racionales; el número $\sqrt{2}$ es un sencillo ejemplo.

Utilizamos el símbolo 2 para representar $1 + 1$, el símbolo 3 para denotar $2 + 1$, y así sucesivamente todos los símbolos estándar que representan los enteros positivos. Es un hecho que este procedimiento asigna, a cada entero positivo, un único símbolo, pero no encierra interés y no lo demostraremos aquí.

Las demostraciones de estas propiedades relativas a los enteros y a los números reales, junto con otras propiedades que necesitaremos posteriormente, están esbozadas en los ejercicios que se presentan a continuación.

Ejercicios

1. Demuestre las siguientes "leyes del álgebra" para $\mathbb{R}$, utilizando únicamente los axiomas (1)-(5):

(a) Si $x + y = x$, entonces $y = 0$.

(b) $0 \cdot x = 0$. [*Indicación*: calcule $(x + 0) \cdot x$.]

(c) $-0 = 0$.

(d) $-(-x) = x$.

(e) $x(-y) = -(xy) = (-x)y$.

(f) $(-1)x = -x$.

(g) $x(y - z) = xy - xz$.

(h) $-(x + y) = -x - y$; $-(x - y) = -x + y$.

(i) Si $x \neq 0$ y $x \cdot y = x$, entonces $y = 1$.
(j) $x/x = 1$ si $x \neq 0$.
(k) $x/1 = x$.
(l) $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.
(m) $(1/y)(1/z) = 1/(yz)$ si $y, z \neq 0$.
(n) $(x/y)(w/z) = (xw)/(yz)$ si $y, z \neq 0$.
(o) $(x/y) + (w/z) = (xz + wy)/(yz)$ si $y, z \neq 0$.
(p) $x \neq 0 \Rightarrow 1/x \neq 0$.
(q) $1/(w/z) = z/w$ si $w, z \neq 0$.
(r) $(x/y)/(w/z) = (xz)/(yw)$ si $y, w, z \neq 0$.
(s) $(ax)/y = a(x/y)$ si $y \neq 0$.
(t) $(-x)/y = x/(-y) = -(x/y)$ si $y \neq 0$.

2. Demuestre las siguientes "leyes de las desigualdades" para $\mathbb{R}$, utilizando los axiomas (1)-(6) junto con los resultados del Ejercicio 1:

(a) $x > y$ y $w > z \Rightarrow x + w > y + z$.
(b) $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ y $x \cdot y > 0$.
(c) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$.
(d) $x > y \Leftrightarrow -x < -y$.
(e) $x > y$ y $z < 0 \Rightarrow xz < yz$.
(f) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, donde $x^2 = x \cdot x$.
(g) $-1 < 0 < 1$.
(h) $xy > 0 \Leftrightarrow x$ e y son ambos positivos o ambos negativos.
(i) $x > 0 \Rightarrow 1/x > 0$.
(j) $x > y > 0 \Rightarrow 1/x < 1/y$.
(k) $x < y \Rightarrow x < (x + y)/2 < y$.

3. (a) Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos inductivos, entonces la intersección de los elementos de $\mathcal{A}$ también es un conjunto inductivo.
(b) Demuestre las propiedades básicas (1) y (2) de $\mathbb{Z}_+$.

4. (a) Demuestre por inducción que dado $n \in \mathbb{Z}_+$, todo subconjunto no vacío de $\{1, \ldots, n\}$ tiene un mayor elemento.
(b) Explique por qué no se puede deducir de (a) que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$ tiene un mayor elemento.

5. Demuestre las siguientes propiedades de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_+$:

(a) $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}_+$. [*Indicación*: demuestre que dado $a \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ y $a + x \in \mathbb{Z}_+\}$ es inductivo.]
(b) $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}_+$.

(c) Demuestre que $a \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a - 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. [*Indicación*: sea $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ y $x - 1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}$; demuestre que X es inductivo.]

(d) $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow c + d \in \mathbb{Z}$ y $c - d \in \mathbb{Z}$. [*Indicación*: demuéstrelo en primer lugar para $d = 1$.]

(e) $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow c \cdot d \in \mathbb{Z}$.

6. Sea $a \in \mathbb{R}$. Defina inductivamente

$$a^1 = a,$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

para $n \in \mathbb{Z}_+$ (véase §7 para el estudio del proceso de la definición inductiva).

Demuestre que si $n, m \in \mathbb{Z}_+$ y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^n a^m = a^{n+m},$$
$$(a^n)^m = a^{nm},$$
$$a^m b^m = (ab)^m.$$

Estas relaciones se denominan ***leyes de los exponentes***. [*Indicación*: para un n fijo, demuestre las fórmulas por inducción sobre m.]

7. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Definimos $a^0 = 1$, y para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $a^{-n} = 1/a^n$. Demuestre que las leyes de los exponentes se verifican para $a, b \neq 0$ y $n, m \in \mathbb{Z}$.

8. (a) Demuestre que $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del ínfimo.

(b) Demuestre que $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = 0$.

(c) Demuestre que dado a con $0 < a < 1$, $\inf\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = 0$. [*Indicación*: sea $h = (1 - a)/a$. Demuestre que $(1 + h)^n \geq 1 + nh$.]

9. (a) Demuestre que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado superiormente tiene un máximo.

(b) Si $x \notin \mathbb{Z}$, demuestre que existe exactamente un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < x < n + 1$.

(c) Si $x - y > 1$, demuestre que existe al menos un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y < n < x$.

(d) Si $y < x$, demuestre que existe un número racional z tal que $y < z < x$.

10. Demuestre, como se indica a continuación, que todo número positivo a tiene exactamente una raíz cuadrada positiva:

(a) Demuestre que si $x > 0$ y $0 \leq h < 1$, entonces

$$(x + h)^2 \leq x^2 + h(2x + 1),$$
$$(x - h)^2 \geq x^2 - h(2x).$$

(b) Sea $x > 0$. Demuestre que si $x^2 < a$, entonces $(x+h)^2 < a$ para algún $h > 0$, y que si $x^2 > a$, entonces $(x-h)^2 > a$ para algún $h > 0$.

(c) Dado $a > 0$, sea B el conjunto de todos los números reales x tales que $x^2 < a$. Demuestre que B está acotado superiormente y que contiene, al menos, un número positivo. Sea $b = \sup B$; demuestre que $b^2 = a$.

(d) Demuestre que si b y c son positivos y $b^2 = c^2$, entonces $b = c$.

11. Dado $m \in \mathbb{Z}$, decimos que m es ***par*** si $m/2 \in \mathbb{Z}$, y que m es ***impar*** en caso contrario.

(a) Demuestre que si m es impar, $m = 2n+1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. [*Indicación*: elija n de forma que $n < m/2 < n+1$.]

(b) Demuestre que si p y q son impares, también lo son $p \cdot q$ y p^n, para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$.

(c) Demuestre que si $a > 0$ es un número racional, entonces $a = m/n$ para ciertos $m, n \in \mathbb{Z}_+$, donde m y n no pueden ser a la vez pares. [*Indicación*: sea n el menor elemento del conjunto $\{x \mid x \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } x \cdot a \in \mathbb{Z}_+\}$.]

(d) *Teorema:* $\sqrt{2}$ *es irracional.*

§5 Productos cartesianos

Ya hemos definido lo que se entiende por producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos. Ahora vamos a introducir productos cartesianos más generales.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una colección no vacía de conjuntos. Una ***función indexante*** para $\mathcal{A}$ es una función sobreyectiva f de un conjunto J, denominado ***conjunto de índices***, en $\mathcal{A}$. La familia $\mathcal{A}$, junto con la función indexante f, se denomina ***familia indexada de conjuntos***. Dado $\alpha \in J$, representaremos el conjunto $f(\alpha)$ por A_α. Y denotaremos la familia indexada, propiamente dicha, mediante

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$$

que se lee como "la familia de todos los A_α, cuando α recorre J". En ocasiones, escribiremos simplemente $\{A_\alpha\}$, si no ofrece dudas cuál es el conjunto de índices.

Obsérvese que, aunque es necesario que una función indexante sea sobreyectiva, no se necesita que sea *inyectiva*. A_α y A_β pueden ser el mismo conjunto de $\mathcal{A}$, incluso si $\alpha \neq \beta$.

Una forma de usar funciones indexantes es dar una nueva notación para uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos. Supongamos que $f : J \to \mathcal{A}$ es una función indexante para $\mathcal{A}$; representemos $f(\alpha)$ por A_α. Entonces, definimos

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid \text{ al menos para un } \alpha \in J,\ x \in A_\alpha\}$$

y

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid \text{ para todo } \alpha \in J,\ x \in A_\alpha\}.$$

Éstas son simplemente nuevas notaciones para conceptos que ya han sido previamente definidos; se puede ver de inmediato (utilizando la sobreyectividad de la función indexante) que la primera representa la unión de todos los elementos de $\mathcal{A}$ y la segunda representa la intersección de todos los elementos de $\mathcal{A}$.

Dos conjuntos de índices utilizados especialmente son el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ de los enteros positivos desde 1 hasta n y el conjunto $\mathbb{Z}_+$ de todos los enteros positivos. Para estos conjuntos de índices vamos a introducir algunas notaciones especiales. Si una colección de conjuntos está indexada por el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, representaremos la familia indexada mediante los símbolos $\{A_1, \ldots A_n\}$, y denotaremos, respectivamente, la unión y la intersección de los miembros de esta familia por

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{y} \quad A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

En el caso de que el conjunto de índices sea $\mathbb{Z}_+$, representaremos la familia indexada por $\{A_1, A_2, \ldots\}$, y la unión e intersección por

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \quad \text{y} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots .$$

Definición. Sea m un entero positivo. Dado un conjunto X, definimos una ***m-upla*** de elementos de X como una función

$$\mathbf{x} : \{1, \ldots m\} \to X.$$

Si $\mathbf{x}$ es una m-upla, con frecuencia representaremos el valor de $\mathbf{x}$ en i por x_i en lugar de $\mathbf{x}(i)$, y lo llamaremos la i-ésima ***coordenada*** de $\mathbf{x}$. Además, denotaremos la propia función $\mathbf{x}$ mediante la expresión

$$(x_1, \ldots x_m).$$

Ahora, sea $\{A_1, \ldots, A_m\}$ una familia indexada con el conjunto $\{1, \ldots, m\}$. Sea $X = A_1 \cup \cdots \cup A_m$. Definimos el ***producto cartesiano*** de esta familia indexada, y lo representaremos por

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \quad \text{o} \quad A_1 \times \cdots \times A_m,$$

como el conjunto de todas las m-uplas $(x_1, \ldots, x_m)$ de elementos de X, tal que $x_i \in A_i$ para cada i.

EJEMPLO 1. En este momento tenemos dos definiciones para el símbolo $A \times B$. Una primera definición es, desde luego, la establecida anteriormente, según la cual $A \times B$ representa el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. La segunda definición, que acabamos de ver, define $A \times B$ como el conjunto de todas las funciones $\mathbf{x}:\{1,2\} \to A \cup B$ tales que $\mathbf{x}(1) \in A$ y $\mathbf{x}(2) \in B$. Es obvia la existencia de una correspondencia biyectiva entre estos dos conjuntos, bajo la cual el par ordenado (a, b) corresponde a la función $\mathbf{x}$ definida por $\mathbf{x}(1) = a$ y $\mathbf{x}(2) = b$. Ya que frecuentemente representamos esta función $\mathbf{x}$ en "notación de upla" mediante el símbolo (a, b), la notación en sí misma sugiere la correspondencia. Así para el producto cartesiano de dos conjuntos, la definición más general de producto cartesiano se reduce esencialmente a la dada en primer lugar.

EJEMPLO 2. ¿En qué se diferencia el producto cartesiano $A \times B \times C$ de los productos cartesianos $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$? En muy poco. Existen correspondencias biyectivas obvias entre estos conjuntos, que indicamos a continuación:

$$(a, b, c) \longleftrightarrow (a, (b, c)) \longleftrightarrow ((a, b), c).$$

Definición. Dado un conjunto X, definimos una ***ω-upla*** de elementos de X como una función

$$\mathbf{x} : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow X;$$

también llamaremos a tal función una ***sucesión***, o ***sucesión infinita***, de elementos de X. Si $\mathbf{x}$ es una ω-upla, frecuentemente representaremos el valor de $\mathbf{x}$ en i por x_i, en lugar de $\mathbf{x}(i)$, y lo llamaremos la i-ésima ***coordenada*** de $\mathbf{x}$. Denotaremos la propia función $\mathbf{x}$ mediante el símbolo

$$(x_1, x_2, \ldots) \quad \text{o} \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}.$$

Sea ahora $\{A_1, A_2, \ldots\}$ una familia de conjuntos, indexada con los enteros positivos; sea X la unión de todos los conjuntos de esta familia. El ***producto cartesiano*** de esta familia indexada de conjuntos, representado por

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}_+} A_i \quad \text{o} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots,$$

se define como el conjunto de todas las ω-uplas $(x_1, x_2, \ldots)$ de elementos de X tales que $x_i \in A_i$ para cada i.

No hay nada en estas definiciones que requiera que los conjuntos A_i sean distintos entre sí. De hecho, podrían ser todos iguales al mismo conjunto X. En ese caso, el producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_m$ es simplemente el conjunto de *todas* las m-uplas de elementos de X, lo cual representaremos por X^m. Análogamente, el producto $A_1 \times A_2 \times \cdots$ sería, en este caso, el conjunto de todas las ω-uplas de elementos de X, denotándose entonces por X^ω.

Posteriormente definiremos el producto cartesiano de una familia indexada *arbitraria* de conjuntos.

EJEMPLO 3. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces $\mathbb{R}^m$ representa el conjunto de todas las m-uplas de números reales; éste es denominado frecuentemente ***m-espacio euclídeo*** (a pesar de que Euclides nunca lo reconocería). Análogamente, $\mathbb{R}^\omega$ se denomina a veces "espacio euclídeo infinito-dimensional", que es el conjunto de todas las ω-uplas $(x_1, x_2, \dots)$ de números reales, esto es, el conjunto de todas las funciones $\mathbf{x}\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$.

Ejercicios

1. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre $A \times B$ y $B \times A$.

2. (a) Demuestre que si $n > 1$, existe una correspondencia biyectiva entre

$$A_1 \times \cdots \times A_n \quad \text{y} \quad (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

(b) Dada una familia indexada $\{A_1, A_2, \dots\}$, sea $B_i = A_{2i-1} \times A_{2i}$ para cada entero positivo i. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre $A_1 \times A_2 \times \cdots$ y $B_1 \times B_2 \times \cdots$.

3. Sean $A = A_1 \times A_2 \times \cdots$ y $B = B_1 \times B_2 \times \cdots$.

(a) Demuestre que si $B_i \subset A_i$ para todo i, entonces $B \subset A$ (estrictamente hablando, si tenemos una función que aplica el conjunto de índices $\mathbb{Z}_+$ en la unión de los conjuntos B_i, debemos cambiar su rango antes de considerarla como una función que aplica $\mathbb{Z}_+$ en la unión de los A_i. Ignoraremos este detalle técnico cuando trabajemos con productos cartesianos).

(b) Demuestre que se verifica el recíproco de (a) si B es no vacío.

(c) Demuestre que si A es no vacío, cada A_i es no vacío. ¿Es cierto el recíproco? (Volveremos a considerar esta cuestión en los ejercicios de §19).

(d) ¿Cuál es la relación entre el conjunto $A \cup B$ y el producto cartesiano de los conjuntos $A_i \cup B_i$? ¿Cuál es la relación entre el conjunto $A \cap B$ y el producto cartesiano de los conjuntos $A_i \cap B_i$?

4. Sean $m, n \in \mathbb{Z}_+$ y $X \neq \varnothing$.

(a) Si $m \leq n$, encuentre una aplicación inyectiva $f : X^m \to X^n$.

(b) Encuentre una aplicación biyectiva $g : X^m \times X^n \to X^{m+n}$.

(c) Encuentre una aplicación inyectiva $h : X^n \to X^\omega$.

(d) Encuentre una aplicación biyectiva $k : X^n \times X^\omega \to X^\omega$.

(e) Encuentre una aplicación biyectiva $l : X^\omega \times X^\omega \to X^\omega$.

(f) Si $A \subset B$, encuentre una aplicación inyectiva $m : (A^\omega)^n \to B^\omega$.

5. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^\omega$ puede expresarse como el producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$?

(a) $\{\mathbf{x} \mid x_i \text{ es un entero para todo } i\}$.

(b) $\{\mathbf{x} \mid x_i \geq i \text{ para todo } i\}$.

(c) $\{\mathbf{x} \mid x_i \text{ es un entero para todo } i \geq 100\}$.

(d) $\{\mathbf{x} \mid x_2 = x_3\}$.

§6 Conjuntos finitos

Conjuntos finitos y conjuntos infinitos, conjuntos numerables y conjuntos no numerables, éstos son algunos de los tipos de conjuntos que han podido aparecer hasta ahora. No obstante, los estudiaremos en esta sección y en la siguiente, no sólo para estar seguros de que se han comprendido a fondo, sino también para aclarar algunos puntos concretos que aparecerán posteriormente. En primer lugar, consideraremos los conjuntos finitos.

Recuérdese que si n es un entero positivo, utilizamos S_n para representar el conjunto de enteros positivos menores que n; S_n se denomina una *sección* de los enteros positivos. Los conjuntos S_n son los prototipos de lo que llamamos los conjuntos finitos.

Definición. Se dice que un conjunto es ***finito*** si existe una correspondencia biyectiva entre A y alguna sección de los enteros positivos. Esto es, A es finito si es vacío o si existe una biyección

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

para algún entero positivo n. En el primer caso decimos que A tiene ***cardinal 0*** y en el segundo caso decimos que A tiene ***cardinal n***.

Por ejemplo, el propio conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tiene cardinal n, ya que está en correspondencia biyectiva consigo mismo por la función identidad.

Ahora observemos cuidadosamente: *todavía no hemos demostrado que el cardinal de un conjunto finito está únicamente determinado por el conjunto*. Desde luego, es evidente que el conjunto vacío debe tener cardinal cero. Pero hasta donde nosotros conocemos, podrían existir correspondencias biyectivas de un conjunto no vacío dado A con dos conjuntos distintos $\{1, \ldots, n\}$ y $\{1, \ldots, m\}$. Esta posibilidad puede parecer ridícula, ya que es como decir que es posible para dos personas contar las canicas que hay en una caja y regresar con dos respuestas diferentes, *ambas correctas*. Nuestra experiencia en la vida diaria nos sugiere que esto es imposible, y de hecho esto es fácil de probar cuando n es un número pequeño como 1, 2 ó 3. Pero una demostración directa cuando n vale 5 millones sería algo imposible.

Incluso las demostraciones empíricas serían difíciles para un valor tan elevado de n. Se podría, por ejemplo, construir un experimento tomando un vagón de mercancías lleno de canicas, y contratando 10 personas diferentes para que las contasen de forma independiente. Si uno piensa en los problemas físicos que esto implica, parece que

los contadores no llegarían a la misma respuesta. Desde luego, la conclusión que se podría obtener es que al menos una persona comete un error. Pero eso supondría asumir la inexactitud del resultado que uno estaba intentando demostrar empíricamente. Una explicación alternativa podría ser la existencia de correspondencias biyectivas entre el conjunto dado de canicas y dos secciones diferentes de los enteros positivos.

En la vida real aceptamos la primera explicación. Simplemente confiamos en que nuestra experiencia en contar comparativamente pequeños conjuntos de objetos, demuestra una verdad que se verifica también para conjuntos arbitrariamente grandes.

Sin embargo, en las matemáticas (al contrario que en la vida real) no se pueden hacer estos actos de fe. Si se formula en términos de la existencia de una correspondencia biyectiva en lugar del acto físico de contar, es posible una demostración matemática. Demostraremos brevemente que si $n \neq m$, no existen funciones biyectivas que apliquen un conjunto dado A en ambos conjuntos $\{1,\ldots,n\}$ y $\{1,\ldots,m\}$.

Hay un gran número de hechos "intuitivamente obvios" sobre conjuntos finitos que son demostrables matemáticamente; demostraremos algunos de ellos en esta sección y dejaremos el resto como ejercicios. La siguiente es una propiedad sencilla para empezar:

Lema 6.1. *Sea n un entero positivo. Sean A un conjunto y a_0 un elemento de A. Entonces existe una correspondencia biyectiva f entre el conjunto A y el conjunto $\{1,\ldots,n+1\}$ si, y solamente si, existe una correspondencia biyectiva del conjunto $A-\{a_0\}$ con $\{1,\ldots,n\}$.*

Demostración. Hay dos implicaciones que demostrar. Supongamos, en primer lugar, que existe una correspondencia biyectiva

$$g : A-\{a_0\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}.$$

Definimos entonces una función $f : A \longrightarrow \{1,\ldots,n+1\}$ de la forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \qquad \text{si } x \in A-\{a_0\} \\ f(a_0) &= n+1. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que f es biyectiva.

Para probar el recíproco, supongamos que existe una correspondencia biyectiva

$$f : A \longrightarrow \{1,\ldots,n+1\}.$$

Si f asocia a_0 al número $n+1$, todo es especialmente sencillo; en ese caso, la restricción $f \mid A-\{a_0\}$ nos da la correspondencia biyectiva buscada entre $A-\{a_0\}$ y $\{1,\ldots,n\}$.

En caso contrario, sea $f(a_0) = m$, y sea a_1 el punto de A tal que $f(a_1) = n + 1$. Entonces $a_1 \neq a_0$. Definimos una nueva función

$$h : A \longrightarrow \{1, \ldots, n + 1\}$$

mediante

$$\begin{aligned} h(a_0) &= n + 1, \\ h(a_1) &= m, \\ h(x) &= f(x) \quad \text{para } x \in A - \{a_0\} - \{a_1\}. \end{aligned}$$

Véase la Figura 6.1. Es fácil ver que h es una biyección.

Retomemos de nuevo el caso sencillo; la restricción $h \mid A - \{a_0\}$ es la biyección buscada entre $A - \{a_0\}$ y $\{1, \ldots, n\}$. ■

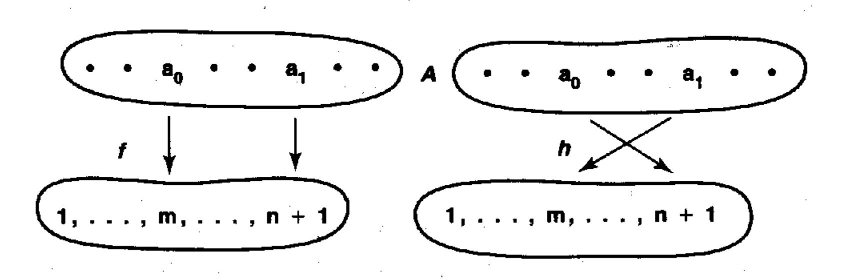


Figura 6.1

Del lema anterior se pueden obtener una serie de consecuencias útiles:

Teorema 6.2. *Sea A un conjunto; supongamos que existe una biyección $f : A \rightarrow \{1, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$. Sea B un subconjunto propio de A. Entonces no existe biyección alguna $g : B \rightarrow \{1, \ldots n\}$, pero (si $B \neq \varnothing$) sí existe una biyección $h : B \rightarrow \{1, \ldots, m\}$ para algún $m < n$.*

Demostración. El caso en que $B = \varnothing$ es trivial, ya que no puede existir una biyección entre el conjunto vacío B y el conjunto no vacío $\{1, \ldots, n\}$.

Demostraremos el teorema "por inducción". Sea C el subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ formado por aquellos enteros n para los cuales el teorema es cierto. Vamos a ver que C es inductivo. Así concluiremos que $C = \mathbb{Z}_+$ y, por tanto, el teorema es cierto para todos los enteros positivos n.

En primer lugar demostraremos el resultado para $n = 1$. En este caso A está formado por un único elemento $\{a\}$ y su único subconjunto propio B es el conjunto vacío.

Supongamos ahora que el teorema es cierto para n; vamos a ver que también lo es para $n + 1$. Sea $f : A \rightarrow \{1, \ldots, n + 1\}$ una biyección y sea B un subconjunto

propio no vacío de A. Elegimos un elemento a_0 de B y un elemento a_1 de $A - B$. Aplicando el lema anterior, podemos deducir que existe una biyección

$$g : A - \{a_0\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Por otro lado, $B - \{a_0\}$ es un subconjunto propio de $A - \{a_0\}$, ya que a_1 pertenece a $A - \{a_0\}$ y no a $B - \{a_0\}$. Como el teorema se supone cierto para el entero n, podemos concluir lo siguiente:

(1) No existe ninguna biyección $h : B - \{a_0\} \to \{1, \dots, n\}$.

(2) Bien $B - \{a_0\} = \varnothing$, bien existe una biyección

$$k : B - \{a_0\} \longrightarrow \{1, \dots, p\} \quad \text{para algún } p < n.$$

El lema anterior, junto con (1), implica que no existe ninguna biyección entre B y $\{1, \dots, n + 1\}$. Esto completa la primera mitad del resultado al que queremos llegar. Para demostrar la segunda parte, obsérvese que si $B - \{a_0\} = \varnothing$, existe una biyección entre B y el conjunto $\{1\}$, mientras que si $B - \{a_0\} \neq \varnothing$, podemos aplicar el lema anterior, junto con (2), para concluir que existe una biyección entre B y $\{1, \dots, p + 1\}$. En cualquiera de los casos, va a existir una biyección de B con $\{1, \dots, m\}$ para algún $m < n + 1$, tal y como se buscaba. El principio de inducción demuestra ahora que el teorema es cierto para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. ■

Corolario 6.3. *Si A es un conjunto finito, no existe ninguna biyección de A con un subconjunto propio de sí mismo.*

Demostración. Supongamos que B es un subconjunto propio de A y que $f : A \to B$ es una biyección. Por hipótesis, existe una biyección $g : A \to \{1, \dots, n\}$ para algún n. La composición $g \circ f^{-1}$ es, por tanto, una biyección entre B y $\{1, \dots, n\}$. Esto contradice el teorema anterior. ■

Corolario 6.4. *$\mathbb{Z}_+$ no es finito.*

Demostración. La función $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ - \{1\}$ definida por $f(n) = n + 1$ es una biyección entre $\mathbb{Z}_+$ y un subconjunto propio de sí mismo. ■

Corolario 6.5. *El cardinal de un conjunto finito A está unívocamente determinado por A.*

Demostración. Sea $m < n$. Supongamos que existen biyecciones

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$
$$g : A \longrightarrow \{1, \ldots, m\}.$$

Entonces, la composición

$$g \circ f^{-1} : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$$

es una biyección de un conjunto finito $\{1, \ldots, n\}$ con un subconjunto propio de sí mismo, contradiciendo el corolario que acabamos de probar. ■

Corolario 6.6. *Si B es un subconjunto de un conjunto finito A, entonces B es finito. Si B es un subconjunto propio de A, entonces el cardinal de B es menor que el cardinal de A.*

Corolario 6.7. *Sea B un conjunto no vacío. Son equivalentes:*

(1) B es finito.

(2) Existe una función sobreyectiva de una sección de los enteros positivos en B.

(3) Existe una función inyectiva de B en una sección de los enteros positivos.

Demostración. (1) ⇒ (2). Ya que B es no vacío, existe, para algún n, una función biyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to B$.

(2) ⇒ (3). Si $f : \{1, \ldots, n\} \to B$ es sobreyectiva, definimos $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ mediante la ecuación

$$g(b) = \text{ mínimo de } f^{-1}(\{b\}).$$

Como f es sobreyectiva, el conjunto $f^{-1}(\{b\})$ es no vacío; entonces, el principio del buen orden de $\mathbb{Z}_+$ nos asegura que $g(b)$ está definido unívocamente. La aplicación g es inyectiva, ya que si $b \neq b'$, los conjuntos $f^{-1}(\{b\})$ y $f^{-1}(\{b'\})$ son disjuntos y, por tanto, sus mínimos deben ser distintos.

(3) ⇒ (1). Si $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ es inyectiva, cambiando el rango de g obtenemos una biyección entre B y un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$. Del corolario anterior se deduce que B es finito. ■

Corolario 6.8. *Las uniones finitas y los productos cartesianos finitos de conjuntos finitos son finitos.*

Demostración. Demostraremos primero que si A y B son conjuntos finitos, también lo es $A \cup B$. El resultado es trivial si A o B es vacío. En caso contrario, existirán biyecciones $f : \{1, \ldots, m\} \to A$ y $g : \{1, \ldots, n\} \to B$ para determinados m

ı. Definimos entonces una función $h : \{1, \dots, m+n\} \to A \cup B$ de la forma) $= f(i)$ si $i = 1, 2, \dots, m$ y $h(i) = g(i-m)$ si $i = m+1, \dots, m+n$. Es fácil que h es sobreyectiva, de lo que se deduce que $A \cup B$ es finito.

Ahora demostraremos por inducción que la finitud de los conjuntos $A_1, \dots, A_n$, plica que su unión también es finita. El resultado es trivial para $n = 1$. Supongamos es cierto para $n-1$. Entonces, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es la unión de dos conjuntos finitos $\cup \cdots \cup A_{n-1}$ y A_n, y no hay más que aplicar el resultado demostrado en el párrafo erior.

Demostremos ahora que el producto cartesiano de dos conjuntos finitos A y B nbién es finito. Dado $a \in A$, el conjunto $\{a\} \times B$ es finito, estando en correspon- ıcia biyectiva con B. Pero $A \times B$ no es más que la unión de estos conjuntos, ya hay sólo un número finito de ellos, $A \times B$ es una unión finita de conjuntos finitos, or tanto finito.

Para probar que el producto $A_1 \times \cdots \times A_n$ es finito si cada A_i lo es, se procede inducción. ■

jercicios

. (a) Haga una lista de todas las aplicaciones inyectivas

$$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}.$$

Demuestre que ninguna es biyectiva (esto constituye una demostración *directa* de que un conjunto A con cardinal tres no tiene cardinal cuatro).

(b) ¿Cuántas aplicaciones inyectivas

$$f : \{1, \dots, 8\} \longrightarrow \{1, \dots, 10\}$$

existen? (Aquí se puede ver por qué uno no desearía intentar demostrar *directamente* que no existe ninguna correspondencia biyectiva entre estos dos conjuntos).

2. Demuestre que si B no es finito y $B \subset A$, entonces A no es finito.

3. Sea X el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. Encuentre una correspondencia biyectiva entre X^ω y un subconjunto propio de sí mismo.

4. Sea A un conjunto finito, no vacío, simplemente ordenado.

(a) Demuestre que A tiene un máximo. [*Indicación*: proceda por inducción sobre el cardinal de A.]

(b) Demuestre que A tiene el tipo de orden de una sección de los enteros positivos.

5. Si $A \times B$ es finito, ¿se deduce que A y B también lo son?

6. (a) Sea $A = \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que existe una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y el producto cartesiano X^n, donde X es el conjunto de dos elementos $X = \{0, 1\}$.

(b) Demuestre que si A es finito, entonces $\mathcal{P}(A)$ es finito.

7. Si A y B son finitos, demuestre que el conjunto de todas las funciones $f : A \rightarrow B$ es finito.

§7 Conjuntos numerables y no numerables

Así como las secciones de los enteros positivos son los prototipos para los conjuntos finitos, el conjunto de todos los enteros positivos es el prototipo de lo que llamaremos conjuntos *infinito-numerables*. En esta sección estudiaremos dichos conjuntos y además construiremos algunos conjuntos que no son ni finitos ni infinito-numerables. Este estudio nos conducirá a un debate sobre lo que se entiende por proceso de "definición inductiva".

Definición. Un conjunto A se dice ***infinito*** si no es finito. Se dice que es ***infinito-numerable*** si existe una correspondencia biyectiva

$$f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_+.$$

EJEMPLO 1. El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros es infinito-numerable. Se puede ver fácilmente que la función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ -2n + 1 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

es una biyección.

EJEMPLO 2. El producto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable. Si representamos los elementos del producto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ por los puntos con coordenadas enteras del primer cuadrante, entonces la parte de la izquierda de la Figura 7.1 sugiere cómo "contar" los puntos, esto es, cómo ponerlos en correspondencia biyectiva con los enteros positivos. Un dibujo no es, desde luego, una demostración, pero esta figura sugiere dicha demostración. En primer lugar definimos una biyección $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$, donde A es el subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ formado por todos los pares (x, y) para los cuales $y \leq x$, mediante la ecuación

$$f(x, y) = (x + y - 1, y).$$

Entonces, construimos una biyección de A con los enteros positivos, definiendo $g : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ por la fórmula

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x - 1)x + y.$$

Dejamos al lector la demostración de que f y g son biyecciones.

Posteriormente se dará otra demostración de que $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable.

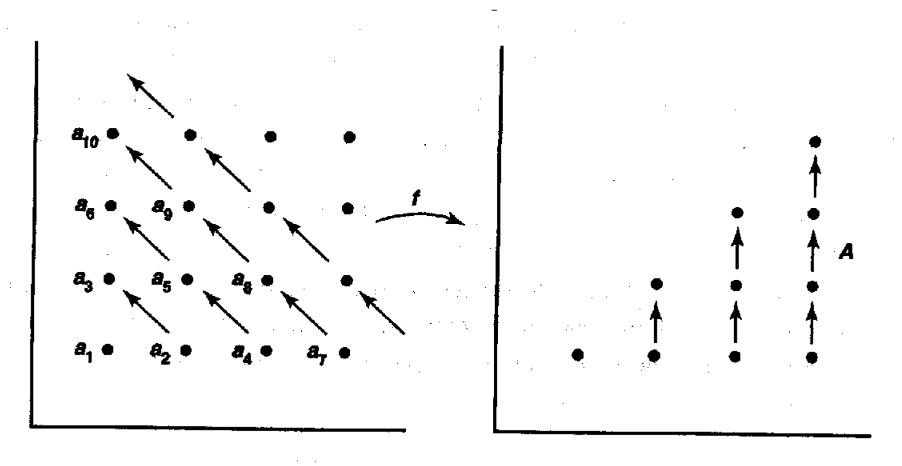


Figura 7.1

Definición. Se dice que un conjunto es ***numerable*** si es ya finito, ya infinito-numerable. Un conjunto que no es numerable se dice ***no numerable***.

Existe un criterio muy útil para demostrar que un conjunto es numerable. Es el siguiente:

Teorema 7.1. *Sea B un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:*

(1) B es numerable.

(2) Existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to B$.

(3) Existe una función inyectiva $g : B \to \mathbb{Z}_+$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que B es numerable. Si B es infinito-numerable, existe una biyección $f : \mathbb{Z}_+ \to B$ por definición, y el resultado es directo. Si B es finito, existe una biyección $h : \{1, \ldots, n\} \to B$ para algún $n \geq 1$ (recordemos que $B \neq \varnothing$). Podemos entonces extender h a una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to B$ definiendo

$$f(i) = \begin{cases} h(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ h(1) & \text{si } i > n. \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $f : \mathbb{Z}_+ \to B$ una función sobreyectiva. Definimos $g : B \to \mathbb{Z}_+$ mediante la ecuación

$$g(b) = \text{mínimo de } f^{-1}(\{b\}).$$

Como f es sobreyectiva, $f^{-1}(\{b\})$ es no vacío y, por tanto, g está bien definida. La aplicación g es inyectiva, ya que si $b \neq b'$, los conjuntos $f^{-1}(\{b\})$ y $f^{-1}(\{b'\})$ son disjuntos y, por tanto, sus mínimos son distintos.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $g : B \to \mathbb{Z}_+$ una aplicación inyectiva; queremos probar que B es numerable. Cambiando el rango de g, podemos obtener una biyección de B con un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$. Así, para demostrar el resultado, es suficiente probar que todo subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ es numerable. Por tanto, sea C un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$.

Si C es finito, es numerable por definición. Así pues, lo que necesitamos demostrar es que todo subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable. Esta afirmación es ciertamente plausible. Los elementos de C pueden ordenarse fácilmente en una sucesión infinita; simplemente se tomaría el conjunto $\mathbb{Z}_+$ con su orden usual, "borrando" los elementos de $\mathbb{Z}_+$ que no están en C.

La viabilidad de este argumento puede hacer que se pase por alto su informalidad. Proporcionar una demostración formal requiere una cierta atención y cuidado. Establecemos este resultado como un lema aparte, que damos a continuación. ∎

Lema 7.2. *Si C es un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}_+$, entonces C es infinito-numerable.*

Demostración. Definimos una biyección $h : \mathbb{Z}_+ \to C$, por inducción: sea $h(1)$ el mínimo de C, que existe porque todo subconjunto no vacío C de $\mathbb{Z}_+$ tiene un mínimo. Entonces, suponiendo que $h(1), \ldots, h(n-1)$ están definidos, construimos

$$h(n) = \text{mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, n-1\})].$$

El conjunto $C - h(\{1, \ldots, n-1\})$ es no vacío; si lo fuese, $h : \{1, \ldots, n-1\} \to C$ sería sobreyectiva, y por tanto C finito (por el Corolario 6.7). Luego $h(n)$ está bien definida. Por inducción tenemos definida $h(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Demostrar que h es inyectiva es sencillo. Dado $m < n$, obsérvese que $h(m)$ pertenece al conjunto $h(\{1, \ldots, n-1\})$, mientras que $h(n)$, por definición, no pertenece. Por tanto, $h(n) \neq h(m)$.

Para demostrar que h es sobreyectiva, sea c un elemento de C; vamos a ver que c se encuentra en el conjunto imagen de h. En primer lugar, observemos que $h(\mathbb{Z}_+)$ no puede estar contenido en el conjunto finito $\{1, \ldots, c\}$, ya que $h(\mathbb{Z}_+)$ es infinito (por ser h inyectiva). Por lo tanto, existe un n en $\mathbb{Z}_+$ tal que $h(n) > c$. Sea m el menor elemento de $\mathbb{Z}_+$ tal que $h(m) \geq c$. Entonces, para todo $i < m$, se tiene que $h(i) < c$. Luego c no pertenece al conjunto $h(\{1, \ldots, m-1\})$. Ya que $h(m)$ se ha definido como el mínimo del conjunto $C - h(\{1, \ldots, m-1\})$, se tiene ahora que $h(m) \leq c$. Uniendo ambas desigualdades, obtenemos $h(m) = c$, como se quería demostrar. ∎

Hay un punto en la demostración anterior en el que hemos estirado un poco los principios de la lógica. Concretamente cuando se dice que "utilizando el principio de inducción" se ha definido la función h para todos los enteros positivos n. Puede que el lector haya visto argumentos de este tipo utilizados en otras ocasiones, sin que haya

cuestionado su legitimidad. En este libro ya hemos usado este tipo de argumentos, en los ejercicios de §4, cuando definíamos a^n.

Pero aquí aparece un problema. Después de todo, el principio de inducción sólo establece que si A es un conjunto inductivo de enteros positivos, entonces $A = \mathbb{Z}_+$. Para utilizar el principio y demostrar un teorema "por inducción", uno comienza la demostración con la afirmación "sea A el conjunto de todos los enteros positivos n para los cuales el teorema es cierto", y entonces continúa adelante para probar que A es inductivo, así que A debe ser todo $\mathbb{Z}_+$.

En el teorema anterior, sin embargo, no estamos demostrando realmente un teorema por inducción, sino definiendo algo por inducción. ¿Cómo deberíamos entonces comenzar la demostración? ¿Podemos empezarla diciendo "sea A el conjunto de todos los enteros n para los cuales la función h está definida"? Pero eso es estúpido, ya que el símbolo h no tiene ningún *significado* al principio de la demostración. Sólo adquiere un sentido en el transcurso de la prueba. Por tanto, se necesita algo más.

Lo que se requiere es otro principio, que llamaremos ***principio de definición recursiva***. En la demostración del teorema anterior queremos asegurar lo siguiente:

> Dado el subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ verificando la fórmula:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &h(1) = \text{mínimo de } C, \\ &h(i) = \text{mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para todo } i > 1. \end{aligned}$$

La expresión $(*)$ se denomina ***fórmula de recursión*** para h, que define la función h *en términos de sí misma*. Una definición dada por este tipo de fórmulas se llama ***definición recursiva***.

Ahora bien, es posible encontrarse con dificultades lógicas cuando se intenta definir algo recursivamente. No todas las fórmulas recursivas tienen sentido. Por ejemplo, la fórmula recursiva

$$h(i) = \text{ menor elemento de } [C - h(\{1, \ldots, i+1\})]$$

es contradictoria en sí misma, y aunque $h(i)$ es necesariamente un elemento del conjunto $h(\{1, \ldots, i+1\})$, esta fórmula afirma que no pertenece al conjunto. Otro ejemplo es la clásica paradoja

> Supongamos que el barbero de Sevilla afeita a todos los hombres de Sevilla que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeitará al barbero?

En este enunciado el barbero aparece dos veces, una vez en la frase "el barbero de Sevilla", y otra como un elemento del conjunto "hombres de Sevilla"; esta definición de quién afeitará al barbero es recursiva. Pero también es contradictoria.

Algunas fórmulas recursivas, sin embargo, tienen sentido. Concretamente, se tiene el siguiente principio:

Principio de definición recursiva. *Sea A un conjunto. Si tenemos una fórmula que define $h(1)$ como un único elemento de A, y que para $i > 1$ define $h(i)$ unívocamente como un elemento de A en función de los valores de h para los enteros positivos menores que i, esta fórmula determina una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to A$.*

Este principio es el que realmente utilizamos en la demostración del Lema 7.2. Se puede simplemente aceptar y creer si se prefiere. Sin embargo, puede ser demostrado rigurosamente, utilizando el principio de inducción. Lo formularemos con mayor precisión en la próxima sección, indicando cómo se demuestra. Los matemáticos rara vez se refieren a este principio de forma específica. Es mucho más probable que escriban una demostración como la de nuestro anterior Lema 7.2, una demostración en la cual recurren al "principio de inducción" para definir una función, cuando lo que realmente están utilizando es el principio de definición recursiva. Evitaremos una pedantería excesiva en este libro siguiendo su ejemplo.

Corolario 7.3. *Un subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Supongamos que $A \subset B$, siendo B numerable. Existe una aplicación inyectiva f de B en $\mathbb{Z}_+$; la restricción de f en A es una inyección de A en $\mathbb{Z}_+$. ■

Corolario 7.4. *El conjunto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es infinito-numerable.*

Demostración. En vista del Teorema 7.1, es suficiente construir una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. Definimos f mediante la ecuación

$$f(n, m) = 2^n 3^m.$$

Es fácil ver que f es inyectiva. Para ello supongamos que $2^n 3^m = 2^p 3^q$. Si $n < p$, entonces $3^m = 2^{p-n} 3^q$, contradiciendo el hecho de que 3^m es impar para todo m. Por lo tanto, $n = p$. Como consecuencia, $3^m = 3^q$. Entonces, si $m < q$, se sigue que $1 = 3^{q-m}$, otra contradicción. Luego $m = q$. ■

EJEMPLO 3. El conjunto $\mathbb{Q}_+$ de los números positivos racionales es infinito-numerable. Para demostrarlo, definimos una aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}_+$ mediante la ecuación

$$g(n, m) = m/n.$$

Como $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ es numerable, existe otra aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Entonces, la composición $g \circ f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}_+$ es también sobreyectiva, y por tanto $\mathbb{Q}_+$ es numerable. Y, desde luego, $\mathbb{Q}_+$ es infinito ya que contiene a $\mathbb{Z}_+$.

Dejamos como un ejercicio demostrar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de *todos* los números racionales es infinito-numerable.

Teorema 7.5. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n\in J}$ una familia indexada de conjuntos numerables, donde el conjunto de índices J es bien $\{1,\ldots,N\}$ o bien $\mathbb{Z}_+$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que cada conjunto A_n es no vacío.

Como cada A_n es numerable, podemos elegir, para cada n, una función sobreyectiva $f_n : \mathbb{Z}_+ \to A_n$. Análogamente, es posible encontrar otra aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{Z}_+ \to J$. Ahora definimos

$$h : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \bigcup_{n\in J} A_n$$

mediante la ecuación

$$h(k,m) = f_{g(k)}(m).$$

Es fácil ver que h así definida es sobreyectiva. Ya que $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{Z}_+$, la numerabilidad de la unión se deduce del Teorema 7.1. ■

Teorema 7.6. *El producto finito de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. En primer lugar demostraremos que el producto de dos conjuntos numerables A y B es numerable. El resultado es trivial si A o B es vacío. En caso contrario, elegimos aplicaciones sobreyectivas $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ y $g : \mathbb{Z}_+ \to B$. Entonces, la función $h : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to A \times B$ definida mediante la ecuación $h(n,m) = (f(n), g(m))$ es sobreyectiva, y por tanto $A \times B$ es numerable.

En general, procedemos por inducción. Suponiendo que $A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ es numerable si cada A_i es numerable, demostraremos esta afirmación para el producto $A_1 \times \cdots \times A_n$. En primer lugar, obsérvese que existe una correspondencia biyectiva

$$g : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$$

definida por la ecuación

$$g(x_1,\ldots,x_n) = ((x_1,\ldots,x_{n-1}), x_n).$$

Como el conjunto $A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ es numerable por hipótesis de inducción, y A_n es numerable por hipótesis, el producto de esos dos conjuntos es numerable, como se ha demostrado previamente. Concluimos, pues, que $A_1 \times \cdots \times A_n$ es también numerable. ■

Es muy tentador asegurar que los productos numerables de conjuntos numerables deberían ser también numerables, pero esto no es cierto:

Teorema 7.7. *Sea X el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. Entonces, el conjunto X^ω es no numerable.*

Demostración. Vamos a demostrar que cualquier función

$$g : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow X^\omega$$

no es sobreyectiva. Para ello, representemos $g(n)$ de la siguiente forma:

$$g(n) = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}, \ldots)$$

donde cada x_{ij} es 0 ó 1. Entonces definimos un elemento $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ de X^ω mediante

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{nn} = 1 \\ 1 & \text{si } x_{nn} = 0. \end{cases}$$

(Si escribimos los números x_{ni} en una matriz rectangular, los elementos particulares x_{nn} aparecen como las entradas diagonales de esta matriz; elegimos $\mathbf{y}$ para que su n-ésima coordenada *difiera* del elemento de la diagonal x_{nn}.)

Ahora bien, $\mathbf{y}$ es un elemento de X^ω, e $\mathbf{y}$ no pertenece a la imagen de g; dado n, el punto $g(n)$ y el punto $\mathbf{y}$ se diferencian en, al menos, una coordenada, digamos la n-ésima. Por lo tanto, g no es sobreyectiva. ■

El producto cartesiano $\{0, 1\}^\omega$ es un ejemplo de un conjunto no numerable. Otro ejemplo sería el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$, como se puede deducir del siguiente teorema:

Teorema 7.8. *Sea A un conjunto. No existe ninguna aplicación inyectiva $f : \mathcal{P}(A) \to A$, y no existe ninguna aplicación sobreyectiva $g : A \to \mathcal{P}(A)$.*

Demostración. En general, si B es un conjunto no vacío, la existencia de una aplicación inyectiva $f : B \to C$ implica la existencia de una aplicación sobreyectiva $g : C \to B$; basta definir $g(c) = f^{-1}(c)$ para cada c en el conjunto imagen de f, y definir g arbitrariamente en el resto del conjunto C.

Por lo tanto, es suficiente demostrar que dada una aplicación $g : A \to \mathcal{P}(A)$, esta aplicación g no es sobreyectiva. Para cada $a \in A$, la imagen $g(a)$ de a es un subconjunto de A, el cual puede o no contener al propio punto a. Sea B el subconjunto de A formado por todos esos puntos a tales que $g(a)$ no contiene a a,

$$B = \{a \mid a \in A - g(a)\}.$$

Ahora bien, B podría ser vacío, o quizá todo el conjunto A, pero esto no importa. Se puede asegurar que B es un subconjunto de A que no está contenido en la imagen

de g. Para ver esto, supongamos que $B = g(a_0)$ para algún $a_0 \in A$. Hacemos la siguiente pregunta: ¿pertenece a_0 a B, o no? Por definición de B,

$$a_0 \in B \iff a_0 \in A - g(a_0) \iff a_0 \in A - B.$$

En cualquier caso, obtenemos una contradicción. ∎

Se ha demostrado ya la existencia de conjuntos no numerables. Pero todavía no hemos mencionado el conjunto no numerable más conocido de todos —el conjunto de los números reales—. Probablemente se conozca la demostración de que $\mathbb{R}$ no es numerable. Si se asume que todo número real se puede representar de forma única por un decimal infinito (con la condición de que esta representación no puede acabar en una cadena infinita de nueves), entonces la no numerabilidad de los reales se puede demostrar mediante una variación del método de la diagonal utilizado en la demostración del Teorema 7.7. Pero esta prueba no es del todo satisfactoria. Una razón es que la representación decimal infinita de un número real no es en absoluto una consecuencia elemental de los axiomas, sino que requiere mucho trabajo demostrarla. Otra razón es que, de hecho, la no numerabilidad de $\mathbb{R}$ no depende de la expansión decimal infinita de $\mathbb{R}$, o incluso de cualquiera de las propiedades algebraicas de estos números. Demostraremos que $\mathbb{R}$ es no numerable utilizando exclusivamente sus propiedades de orden, en un capítulo posterior.

Ejercicios

1. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es infinito-numerable.

2. Demuestre que las aplicaciones f y g de los Ejemplos 1 y 2 son biyecciones.

3. Sea X el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. Demuestre que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y el producto cartesiano X^ω.

4. (a) Un número real se dice que es ***algebraico*** (sobre los racionales) si satisface alguna ecuación polinómica de grado positivo

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes racionales a_i. Suponiendo que cada ecuación polinómica tiene sólo una cantidad finita de raíces, demuestre que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

(b) Un número real se dice ***trascendente*** si no es algebraico. Suponiendo que los reales son no numerables, demuestre que los números trascendentes son no numerables. (Es un hecho algo sorprendente que sólo dos números trascendentes nos sean familiares: e y π. Incluso probar que esos dos números son trascendentes no es algo en absoluto trivial.)

5. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es o no numerable. Justifique la respuesta.

(a) El conjunto A de todas las funciones $f : \{0, 1\} \to \mathbb{Z}_+$.

(b) El conjunto B_n de todas las funciones $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_+$.

(c) El conjunto $C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} B_n$.

(d) El conjunto D de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$.

(e) El conjunto E de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$.

(f) El conjunto F de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$ que son "finalmente cero". [Se dice que f es ***finalmente cero*** si existe un entero positivo N tal que $f(n) = 0$ para todo $n \geq N$.]

(g) El conjunto G de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ que son finalmente uno.

(h) El conjunto H de todas las funciones $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ que son finalmente constante.

(i) El conjunto I de todos los subconjuntos de dos elementos de $\mathbb{Z}_+$.

(j) El conjunto J de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}_+$.

6. Decimos que dos conjuntos A y B ***tienen el mismo cardinal*** si existe una biyección entre A y B.

(a) Demuestre que si $B \subset A$ y existe una función inyectiva

$$f : A \longrightarrow B,$$

entonces A y B tienen el mismo cardinal. [*Indicación*: defina $A_1 = A$, $B_1 = B$ y, para $n > 1$, $A_n = f(A_{n-1})$ y $B_n = f(B_{n-1})$ (de nuevo definición recursiva). Obsérvese que $A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Defina una biyección $h : A \to B$ mediante la regla

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_n - B_n \text{ para algún } n \\ x & \text{en caso contrario.]} \end{cases}$$

(b) *Teorema (Schroeder-Bernstein). Si existen aplicaciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : C \to A$, entonces A y C tienen el mismo cardinal.*

7. Demuestre que los conjuntos D y E del Ejercicio 5 tienen el mismo cardinal.

8. Sea X el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$; sea $\mathcal{B}$ el conjunto de los subconjuntos numerables de X^ω. Demuestre que X^ω y $\mathcal{B}$ tienen el mismo cardinal.

9. (a) A la fórmula

$$(*) \qquad \begin{aligned} h(1) &= 1, \\ h(2) &= 2, \\ h(n) &= [h(n+1)]^2 - [h(n-1)]^2 \quad \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

no se le puede aplicar el principio de definición recursiva. Demuestre que, no obstante, existe una función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ que satisface dicha fórmula. [*Indicación*: reformule (*) de modo que el principio sea aplicable, e imponga que h sea positiva.]

(b) Demuestre que la fórmula (*) del apartado (a) no determina h unívocamente. [*Indicación*: si h es una función positiva que verifica (*), sea $f(i) = h(i)$ para $i \neq 3$, y sea $f(3) = -h(3)$.]

(c) Demuestre que no existe ninguna función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ verificando la fórmula

$$\begin{aligned} h(1) &= 1, \\ h(2) &= 2, \\ h(n) &= [h(n+1)]^2 + [h(n-1)]^2 \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

*§8 El principio de definición recursiva

Antes de considerar la forma general del principio de definición recursiva, lo demostraremos primero para un caso específico, el del Lema 7.2. Esto debería ayudarnos a entender la idea subyacente de la demostración mucho más claramente cuando veamos el caso general.

Así, dado el subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, consideremos la siguiente fórmula recursiva para una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$:

$$(*) \qquad \begin{aligned} h(1) &= \text{mínimo de } C, \\ h(n) &= \text{mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Demostraremos que existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ verificando esta fórmula de recursión.

El primer paso consiste en demostrar que existen funciones definidas sobre *secciones* $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{Z}_+$ que satisfacen (*).

Lema 8.1. *Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, existe una función*

$$f : \{1, \ldots, n\} \to C$$

que satisface (*) para todo i de su dominio.

Demostración. Lo significativo de este lema es que es un resultado que depende de n y, por tanto, es posible demostrarlo por inducción. Sea A el conjunto de todos los n para los cuales el lema se verifica. Demostremos que A es inductivo. Entonces se deducirá que $A = \mathbb{Z}_+$.

El lema es cierto para $n = 1$, ya que la función $f : \{1\} \to C$ definida por la ecuación

$$f(1) = \text{mínimo de } C$$

verifica $(*)$.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$, y vamos a demostrarlo para n. Por hipótesis, existe una función $f' : \{1, \ldots, n-1\} \to C$ que satisface $(*)$ para todo i de su dominio. Definimos $f : \{1, \ldots, n\} \to C$ mediante las ecuaciones

$$f(i) = f'(i) \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, n-1\},$$
$$f(n) = \text{mínimo de } [C - f'(\{1, \ldots, n-1\})].$$

Como C es infinito, f' no es sobreyectiva, por lo tanto el conjunto $C - f'(\{1, \ldots, n-1\})$ es no vacío, y $f(n)$ está bien definida. Obsérvese que esta definición es admisible, ya que no define a f en términos de *sí misma*, sino de la función dada f'.

Es fácil ver que f verifica $(*)$ para todo i de su dominio. La función f satisface $(*)$ si $i \leq n-1$ porque coincide con f'. Y f verifica $(*)$ si $i = n$ ya que, por definición,

$$f(n) = \text{mínimo de } [C - f'(\{1, \ldots, n-1\})] \text{ y}$$

$$f'(\{1, \ldots, n-1\}) = f(\{1, \ldots, n-1\}).$$

■

Lema 8.2. *Supongamos que $f : \{1, \ldots, n\} \to C$ y $g : \{1, \ldots, m\} \to C$ verifican $(*)$ para todo i de sus respectivos dominios. Entonces $f(i) = g(i)$ para todo i de ambos dominios.*

Demostración. Supongamos que no es así. Sea i el *menor* entero para el cual $f(i) \neq g(i)$. Este entero i no puede ser 1, ya que

$$f(1) = \text{mínimo de } C = g(1)$$

por $(*)$. Ahora, para todo $j < i$, se tiene que $f(j) = g(j)$. Como f y g verifican $(*)$,

$$f(i) = \text{mínimo de } [C - f(\{1, \ldots, i-1\})],$$
$$g(i) = \text{mínimo de } [C - g(\{1, \ldots, i-1\})].$$

Ya que $f(\{1, \ldots, i-1\}) = g(\{1, \ldots, i-1\})$, se tiene que $f(i) = g(i)$, lo que contradice la elección de i. ■

Teorema 8.3. *Existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ verificando $(*)$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$.*

Demostración. Por el Lema 8.1 existe, para cada n, una función que aplica el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en C y que verifica $(*)$ para todo i de su dominio. Dado n, el Lema 8.2 demuestra que esta función es única; dos funciones de este tipo teniendo el mismo dominio deben ser iguales. Sea $f_n : \{1, \ldots, n\} \to C$ esta única función.

Ahora viene el paso crucial. Elegimos una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ definiendo su regla como la *unión* U de las reglas de las funciones f_n. La regla de f_n es un subconjunto de $\{1, \ldots, n\} \times C$, por lo que U es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times C$. Tenemos que demostrar que U es la regla de una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$.

Esto es, debemos probar que cada elemento i de $\mathbb{Z}_+$ aparece como la primera coordenada de, exactamente, un elemento de U. Esto es sencillo. El entero i pertenece al dominio de f_n si, y solamente si, $n > i$. Por lo tanto, el conjunto de elementos de U que tienen a i como primera coordenada es precisamente el conjunto de todos los pares de la forma $(i, f_n(i))$, para $n \geq i$. Ahora bien, el Lema 8.2 nos asegura que $f_n(i) = f_m(i)$ si $n, m \geq i$. Luego todos estos elementos de U son iguales, esto es, existe un único elemento de U que tiene a i como su primera coordenada.

Demostrar que h verifica $(*)$ es también sencillo; es una consecuencia de los siguientes hechos:

$$h(i) = f_n(i) \quad \text{para } i \leq n,$$

$$f_n \text{ verifica } (*) \text{ para todo } i \text{ de su dominio.}$$

La demostración de la unicidad es una copia de la demostración del Lema 8.2. ∎

Ahora formularemos el principio general de definición recursiva. No hay nuevas ideas implicadas en su demostración, así que quedará como un ejercicio.

Teorema 8.4 (Principio de definición recursiva). *Sean A un conjunto y a_0 un elemento de A. Supongamos que ρ es una función que asigna, a cada función f que aplica una sección no vacía de los enteros positivos en A, un elemento de A. Entonces existe una única función*

$$h : \mathbb{Z}_+ \to A$$

tal que

$$(*) \qquad \begin{aligned} &h(1) = a_0, \\ &h(i) = \rho(h \,|\, \{1, \ldots, i-1\}) \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

La fórmula $(*)$ se denomina ***fórmula recursiva*** para h. Ésta especifica $h(1)$, y expresa el valor de h en $i > 1$ en función de los valores de h en los enteros positivos menores que i.

EJEMPLO 1. Demostremos que el Teorema 8.3 es un caso particular de este teorema. Dado el subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, sea a_0 el mínimo de C, y definamos ρ mediante la ecuación

$$\rho(f) = \text{mínimo de } [C - (\text{conjunto imagen de } f)].$$

Como C es infinito y f es una función que lleva un conjunto finito a C, el conjunto imagen de f no es todo C, por lo que ρ está bien definida. Por el Teorema 8.4 existe una función $h : \mathbb{Z}_+ \to C$ tal que $h(1) = a_0$, y para $i > 1$,

$$\begin{aligned} h(i) &= \rho(h \mid \{1, \dots, i-1\}) \\ &= \text{mínimo de } [C - (\text{conjunto imagen de } h \mid \{1, \dots, i-1\})] \\ &= \text{mínimo de } [C - h(\{1, \dots, i-1\})] \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

EJEMPLO 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, "definimos" a^n, en los ejercicios de §4, mediante la fórmula de recursión

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^n &= a^{n-1} \cdot a. \end{aligned}$$

Queremos utilizar el Teorema 8.4 para definir rigurosamente una función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ de forma que $h(n) = a^n$. Para aplicar este teorema, representamos por a_0 el elemento a de $\mathbb{R}$, y definimos ρ mediante la ecuación $\rho(f) = f(m) \cdot a$, donde $f : \{1, \dots, m\} \to \mathbb{R}$. Entonces existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} h(1) &= a_0, \\ h(i) &= \rho(h \mid \{1, \dots, i-1\}) \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $h(1) = a$, y $h(i) = h(i-1) \cdot a$ para $i > 1$. Si representamos $h(i)$ mediante a^i, tenemos

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^i &= a^{i-1} \cdot a, \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Ejercicios

1. Sea $(b_1, b_2, \dots)$ una sucesión infinita de números reales. La suma $\sum_{k=1}^{n} b_k$ se define por inducción de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= b_1 & &\text{para } n = 1, \\ \sum_{k=1}^{n} b_k &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right) + b_n & &\text{para } n > 1. \end{aligned}$$

Sea A el conjunto de los números reales y elija ρ de forma que se aplique el Teorema 8.4 para definir esta suma rigurosamente. En ocasiones representaremos la suma $\sum_{k=1}^{n} b_k$ mediante $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

2. Sea $(b_1, b_2, \dots)$ una sucesión infinita de números reales. Definimos el producto $\prod_{k=1}^{n} b_k$ mediante las ecuaciones

$$\prod_{k=1}^{1} b_k = b_1$$
$$\prod_{k=1}^{n} b_k = (\prod_{k=1}^{n-1} b_k) \cdot b_n \text{ para } n > 1.$$

Utilice el Teorema 8.4 para definir este producto rigurosamente. En ocasiones representaremos el producto $\prod_{k=1}^{n} b_k$ mediante $b_1 b_2 \cdots b_n$.

3. Obtenga las definiciones de a_n y $n!$ para $n \in \mathbb{Z}_+$ como casos particulares del Ejercicio 2.

4. Los *números de Fibonacci* de la teoría de números se definen recursivamente mediante la fórmula

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$
$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \quad \text{para } n > 2.$$

Defínalos rigurosamente utilizando el Teorema 8.4.

5. Demuestre que existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando la fórmula

$$h(1) = 3,$$
$$h(i) = [h(i-1) + 1]^{1/2} \quad \text{para } i > 1.$$

6. (a) Demuestre que no existe ninguna función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando la fórmula

$$h(1) = 3,$$
$$h(i) = [h(i-1) - 1]^{1/2} \quad \text{para } i > 1.$$

Explique por qué este ejemplo no viola el principio de definición recursiva.

(b) Considere la fórmula de recursión

$$h(1) = 3,$$
$$h(i) = \left\{ \begin{array}{ll} [h(i-1) - 1]^{1/2} & \text{si } h(i-1) > 1 \\ 5 & \text{si } h(i-1) \leq 1 \end{array} \right\} \quad \text{para } i > 1.$$

Demuestre que existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando esta fórmula.

7. Demuestre el Teorema 8.4.

8. Verifique la siguiente versión del principio de definición recursiva:
Sea A un conjunto. Sea ρ una función que asigna, a cada función f que aplica una sección S_n de $\mathbb{Z}_+$ en A, un elemento $\rho(f)$ de A. Entonces existe una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to A$ tal que $h(n) = \rho(h \mid S_n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

§9 Conjuntos infinitos y el axioma de elección

Ya hemos obtenido varios criterios para que un conjunto sea infinito. Sabemos, por ejemplo, que un conjunto A es infinito si tiene un subconjunto infinito-numerable o si existe una biyección entre A y un subconjunto propio de sí mismo. Pues bien, cualquiera de estas dos propiedades es suficiente para caracterizar conjuntos infinitos. Probaremos esto ahora. La demostración nos conducirá a un debate sobre un punto de lógica que todavía no hemos mencionado, el axioma de elección.

Teorema 9.1. *Sea A un conjunto. Son equivalentes:*

(1) Existe una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$.

(2) Existe una biyección de A con un subconjunto propio de sí mismo.

(3) A es infinito.

Demostración. Probaremos las implicaciones (1)⇒(2)⇒(3)⇒(1).

Para probar (1)⇒(2), suponemos que existe una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$. Representemos por B el conjunto imagen $f(\mathbb{Z}_+)$, y denotemos $f(n)$ por a_n. Como f es inyectiva, $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$. Definimos

$$g : A \longrightarrow A - \{a_1\}$$

mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} g(a_n) &= a_{n+1} && \text{para } a_n \in B, \\ g(x) &= x && \text{para } x \in A - B. \end{aligned}$$

La aplicación g está indicada de forma esquemática en la Figura 9.1, y se puede ver fácilmente que es una biyección.

La implicación (2)⇒(3) es el recíproco del Corolario 6.3, por lo tanto ya está demostrada. Para probar (3)⇒(1), suponemos que A es infinito y construimos "por inducción" una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$.

En primer lugar, ya que el conjunto A es no vacío, podemos elegir un punto a_1 de A, y definimos $f(1)$ como el punto así elegido.

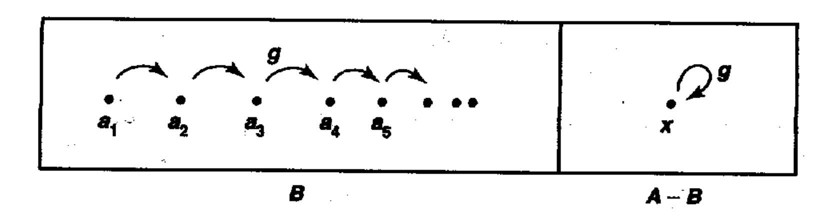


Figura 9.1

Entonces, suponiendo que tenemos definidos $f(1), \ldots, f(n-1)$, queremos definir $f(n)$. El conjunto $A - f(\{1, \ldots, n-1\})$ no es vacío, pues si lo fuese, la aplicación $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ sería sobreyectiva y A finito. Por lo tanto, podemos elegir un elemento del conjunto $A - f(\{1, \ldots, n-1\})$ y definir $f(n)$ como este elemento. "Utilizando el principio de inducción", hemos definido f para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Es fácil ver que f es inyectiva. Para ello, supongamos que $m < n$. Entonces, $f(m)$ pertenece al conjunto $f(\{1, \ldots, n-1\})$, mientras que $f(n)$, por definición, no pertenece. Por tanto, $f(n) \neq f(m)$. ■

Intentemos reformular esta demostración por "inducción" más cuidadosamente, de forma que hagamos explícito el uso del principio de definición recursiva.

Dado el conjunto infinito A, intentamos definir $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ recursivamente mediante la fórmula

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(1) &= a_1, \\ f(i) &= \text{ un elemento arbitrario de } [A - f(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, en absoluto ésta es una fórmula recursiva aceptable, ya que no define $f(i)$ *unívocamente* en términos de $f \mid \{1, \ldots, i-1\}$.

A este respecto, esta fórmula difiere notablemente de la fórmula de recursión que consideramos en la demostración del Lema 7.2. Allí teníamos un subconjunto infinito C de $\mathbb{Z}_+$, y definíamos h de la forma

$$\begin{aligned} h(1) &= \text{ mínimo de } C, \\ h(i) &= \text{ mínimo de } [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Esta fórmula define $h(i)$ unívocamente en términos de $h \mid \{1, \ldots, i-1\}$.

Otro modo de ver que $(*)$ no es una fórmula recursiva válida es observar que, si lo fuese, el principio de definición recursiva implicaría que existe una *única* función $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ verificando $(*)$. Pero $(*)$ nunca determinará f de forma única. En efecto, esta "definición" de f implica infinitas y arbitrarias elecciones.

Lo que estamos diciendo es que la demostración que hemos dado para el Teorema 9.1 no es realmente una demostración. De hecho, en base a las propiedades de la

teoría de conjuntos que hemos debatido hasta ahora, no es *posible* demostrar este teorema. Se necesita algo más.

Anteriormente, describimos determinados métodos posibles para conjuntos específicos:

(1) Definir un conjunto listando sus elementos, o tomar un conjunto dado A y especificar un subconjunto B dando una propiedad que los elementos de B tienen que verificar.

(2) Tomar uniones o intersecciones de los elementos de una colección dada de conjuntos, o tomar la diferencia de dos conjuntos.

(3) Tomar el conjunto de todos los subconjuntos de uno dado.

(4) Tomar productos cartesianos de conjuntos.

Ahora bien, la regla de la función f es realmente un conjunto, un subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times A$. Por lo tanto, para demostrar la existencia de la función f, debemos construir el subconjunto apropiado de $\mathbb{Z}_+ \times A$, utilizando los métodos permitidos para construir conjuntos. Los métodos ya dados, simplemente no son adecuados para este propósito. Necesitamos una nueva forma de asegurar la existencia de un conjunto. Por lo tanto, añadimos a la lista de los métodos permitidos para formar conjuntos el siguiente:

Axioma de elección. *Dada una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto C formado exactamente por un elemento de cada elemento de $\mathcal{A}$, esto es, un conjunto C tal que C está contenido en la unión de los elementos de $\mathcal{A}$, y que para cada $A \in \mathcal{A}$, el conjunto $C \cap A$ contiene un único elemento.*

El conjunto C puede verse como el que se ha obtenido eligiendo un solo elemento de cada uno de los conjuntos de $\mathcal{A}$.

El axioma de elección parece ciertamente una afirmación bastante inocente. Y, de hecho, la mayoría de los matemáticos hoy en día lo aceptan como parte de la teoría de conjuntos en la cual basan sus matemáticas. Pero en años anteriores se desató una gran controversia alrededor de esta afirmación particular de la teoría de conjuntos, ya que hay teoremas que se pueden demostrar con su ayuda y que algunos matemáticos eran reacios a aceptar. Un ejemplo es el teorema del buen orden, que discutiremos brevemente. De momento, utilizaremos simplemente el axioma de elección para resolver la dificultad que mencionamos en la demostración anterior. En primer lugar, probaremos una sencilla consecuencia del axioma de elección.

Lema 9.2 (Existencia de una función de elección). *Dada una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos no vacíos (no necesariamente disjuntos), existe una función*

$$c : \mathcal{B} \longrightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

tal que $c(B)$ es un elemento de B, para cada $B \in \mathcal{B}$.

La función c se denomina ***función de elección*** para la familia $\mathcal{B}$.

La diferencia entre este lema y el axioma de elección radica en que en este lema no se requiere que los conjuntos de la familia $\mathcal{B}$ sean disjuntos. Por ejemplo, se puede permitir que $\mathcal{B}$ sea la familia de *todos* los subconjuntos no vacíos de un conjunto dado.

Demostración. Dado un elemento B de $\mathcal{B}$, definimos un conjunto B' de la siguiente forma:

$$B' = \{(B, x) \mid x \in B\}.$$

Esto es, B' es la familia de todos los pares ordenados, donde la primera coordenada del par ordenado es el conjunto B y la segunda coordenada es un elemento de B. El conjunto B' es un subconjunto del producto cartesiano

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Como B contiene al menos un elemento x, el conjunto B' contiene al menos a (B, x), luego no es vacío.

Ahora bien, aseguramos que si B_1 y B_2 son dos conjuntos distintos en $\mathcal{B}$, entonces los correspondientes conjuntos B_1' y B_2' son disjuntos. Un típico elemento de B_1' sería un par de la forma (B_1, x_1) y para B_2 sería (B_2, x_2). Dos de tales elementos no pueden ser iguales, ya que sus primeras coordenadas son diferentes. Ahora construyamos la familia

$$\mathcal{C} = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$$

que es una colección de subconjuntos disjuntos no vacíos de

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Por el axioma de elección, existe un conjunto c formado exactamente por un elemento de cada elemento de $\mathcal{C}$. Afirmamos que c es la regla para la función de elección buscada.

En primer lugar, c es un subconjunto de

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

En segundo lugar, c contiene exactamente un elemento de cada conjunto B', por lo que para cada $B \in \mathcal{B}$, el conjunto c contiene exactamente un par ordenado (B, x) cuya primera coordenada es B. Así c es, en efecto, la regla para una función que va de la familia $\mathcal{B}$ al conjunto $\cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Finalmente, si $(B, x) \in c$, entonces x pertenece a B, y por lo tanto $c(B) \in B$, como se quería demostrar. ∎

Una segunda demostración del Teorema 9.1. Utilizando este lema, se puede hacer la demostración del Teorema 9.1 más precisa. Dado el conjunto infinito A, queremos construir una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$. Formemos la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos no vacíos de A. El lema inmediatamente anterior asegura la existencia de una función de elección para $\mathcal{B}$, esto es, una función

$$c : \mathcal{B} \longrightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = A$$

tal que $c(B) \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Definamos ahora un función $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ mediante la fórmula de recursión

$$(*) \qquad \begin{aligned} &f(1) = c(A), \\ &f(i) = c(A - f(\{1, \ldots, i-1\})) \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Como A es infinito, el conjunto $A - f(\{1, \ldots, i-1\})$ es no vacío, por lo que la parte derecha de esta ecuación tiene sentido. Ya que esta fórmula define $f(i)$ unívocamente en términos de $f \mid \{1, \ldots, i-1\}$, se aplica el principio de definición recursiva. Concluimos que existe una única función $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ verificando $(*)$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. La inyectividad de f se deduce como antes. ■

Habiendo enfatizado que para construir una demostración del Teorema 9.1, que sea lógicamente correcta, se debe hacer un uso específico de una función de elección, volvemos ahora hacia atrás y admitimos que en la práctica, la mayoría de los matemáticos no hacen tal cosa. Ellos continúan sin escrúpulos dando demostraciones como nuestra primera versión, que implican un número infinito de elecciones arbitrarias. Ellos saben que realmente utilizan el axioma de elección, y saben también que si fuese necesario, podrían rehacer sus demostraciones de una forma lógicamente más satisfactoria introduciendo una función de elección específica. Pero usualmente no se preocupan.

Y tampoco lo haremos nosotros. Encontraremos unos pocos usos específicos más de una función de elección en este libro; introduciremos una función de elección sólo cuando la demostración se vuelva confusa sin ella. Pero habrá muchas demostraciones en las cuales hagamos un número infinito de elecciones arbitrarias, y en cada caso estaremos utilizando realmente el axioma de elección de forma implícita.

Ahora bien, debemos confesar que, en una sección anterior de este libro, hay una demostración en la cual construimos una determinada función haciendo un número infinito de elecciones arbitrarias. Y eludimos esa demostración sin incluso mencionar el axioma de elección: nuestras disculpas por la decepción. Dejamos que el lector descubra qué demostración era.

Hagamos un último comentario sobre el axioma de elección. Existen dos versiones de este axioma. Una podría denominarse ***axioma de elección finito***, el cual

asegura que dada una colección *finita* $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto C formado exactamente por un elemento de cada elemento de $\mathcal{A}$. Se necesita esta forma débil del axioma de elección todo el tiempo; nosotros la hemos utilizado libremente en las secciones anteriores sin hacer ningún comentario. Ningún matemático tiene ningún escrúpulo sobre el axioma finito de elección, es parte de la teoría de conjuntos de todo el mundo. Dicho de otra forma, nadie tiene escrúpulos sobre una demostración que implica sólo finitas elecciones arbitrarias.

La versión más fuerte del axioma de elección, la que se aplica a una familia *arbitraria* $\mathcal{A}$ de conjuntos no vacíos, es la que se denomina propiamente "el axioma de elección". Cuando un matemático escribe "esta demostración depende del axioma de elección", se refiere invariablemente a esta forma más fuerte del axioma.

Ejercicios

1. Defina una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to X^\omega$, donde X es el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$, sin utilizar el axioma de elección.
2. Encuentre, cuando sea posible, una función de elección para cada una de las siguientes familias, sin utilizar el axioma de elección:
   (a) La familia $\mathcal{A}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}_+$.
   (b) La familia $\mathcal{B}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}$.
   (c) La familia $\mathcal{C}$ de los subconjuntos no vacíos de los números racionales $\mathbb{Q}$.
   (d) La familia $\mathcal{D}$ de los subconjuntos no vacíos de X^ω, donde $X = \{0, 1\}$.
3. Supongamos que A es un conjunto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es una familia indexada dada de funciones inyectivas
$$f_n : \{1, \dots, n\} \longrightarrow A.$$
Demuestre que A es infinito. ¿Es posible definir una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$ sin utilizar el axioma de elección?
4. En §7 hay un teorema cuya demostración implica un número infinito de elecciones arbitrarias. ¿Cuál es? Reescriba la demostración de forma que se haga explícito el uso del axioma de elección (varios de los ejercicios anteriores han utilizado también el axioma de elección).
5. (a) Utilice el axioma de elección para demostrar que si $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces f tiene una inversa por la derecha $h : B \to A$.
   (b) Demuestre que si $f : A \to B$ es inyectiva y A es no vacío, entonces f tiene inversa por la izquierda. ¿Se necesita el axioma de elección?
6. La mayoría de las paradojas famosas de la teoría de conjuntos sencilla están asociadas de una u otra forma al concepto de "conjunto de todos los conjuntos". Ninguna de las reglas que hemos dado para construir conjuntos nos permite

considerar tal conjunto. Y por un buen motivo —el concepto en sí mismo es contradictorio—. Supongamos que $\mathcal{A}$ representa el "conjunto de todos los conjuntos".

(a) Demuestre que $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$; deduzca una contradicción.

(b) (*Paradoja de Russell*). Sea $\mathcal{B}$ el subconjunto de $\mathcal{A}$ formado por todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos,

$$\mathcal{B} = \{A \mid A \in \mathcal{A} \text{ y } A \notin A\}.$$

(Desde luego, no puede haber *ningún* conjunto A tal que $A \in A$; si este fuera el caso, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$). ¿Es $\mathcal{B}$ un elemento de sí mismo o no?

7. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Si existe una aplicación inyectiva de B en A, pero no existe ninguna inyección de A en B, decimos que A tiene ***mayor cardinal*** que B.

(a) Deduzca del Teorema 9.1 que todo conjunto no numerable tiene mayor cardinal que $\mathbb{Z}_+$.

(b) Demuestre que si A tiene mayor cardinal que B y B tiene mayor cardinal que C, entonces A tiene mayor cardinal que C.

(c) Encuentre una sucesión $A_1, A_2, \ldots$ de conjuntos infinitos tales que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, el conjunto A_{n+1} tenga mayor cardinal que A_n.

(d) Halle un conjunto que para todo n tenga mayor cardinal que A_n.

***8.** Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal. [*Indicación*: puede utilizar el hecho de que todo número real tiene un desarrollo decimal, que es único si se prohiben los desarrollos que terminen en una cadena infinita de nueves.]

Una famosa conjetura de la teoría de conjuntos, llamada la *hipótesis del continuo*, asegura que no existe ningún conjunto que tenga mayor cardinal que $\mathbb{Z}_+$ y menor cardinal que $\mathbb{R}$. La *hipótesis del continuo generalizada* afirma que, dado el conjunto infinito A, no existe ningún conjunto que tenga mayor cardinal que A y menor cardinal que $\mathcal{P}(A)$. Sorprendentemente, se ha demostrado que ambas afirmaciones son independientes de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. Para un informe claro y legible véase [Sm].

§10 Conjuntos bien ordenados

Una de las propiedades más útiles del conjunto $\mathbb{Z}_+$ de los enteros positivos es el hecho de que cada uno de sus subconjuntos no vacíos tiene un mínimo. La generalización de esta propiedad conduce al concepto de un conjunto bien ordenado.

Definición. Un conjunto A con una relación de orden $<$ se dice que está ***bien ordenado***si todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo.

EJEMPLO 1. Considérese el conjunto $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario. Esquemáticamente, se puede representar como una sucesión infinita seguida por otra sucesión infinita:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$$

con el convenio de que cada elemento es menor que cualquier otro elemento que haya a su derecha. No es difícil ver que todo subconjunto no vacío C de este conjunto ordenado tiene un mínimo: si C contiene cualquiera de los a_n, simplemente hay que tomar el mínimo de la intersección de C con la sucesión $a_1, a_2, \ldots$, mientras que si C no contiene ningún a_n, entonces es un subconjunto de la sucesión $b_1, b_2, \ldots$, y como tal tiene un mínimo.

EJEMPLO 2. Considérese el conjunto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario. Esquemáticamente, se puede representar como una sucesión infinita de sucesiones infinitas. Demostremos que es un conjunto bien ordenado. Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Sea A el subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ formado por todas las *primeras coordenadas* de elementos de X. A tiene un primer elemento, llamémoslo a_0. Entonces la familia

$$\{b \mid a_0 \times b \in X\}$$

es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_+$, siendo b_0 su primer elemento. Por definición del orden del diccionario, $a_0 \times b_0$ es el mínimo de X (véase la Figura 10.1).

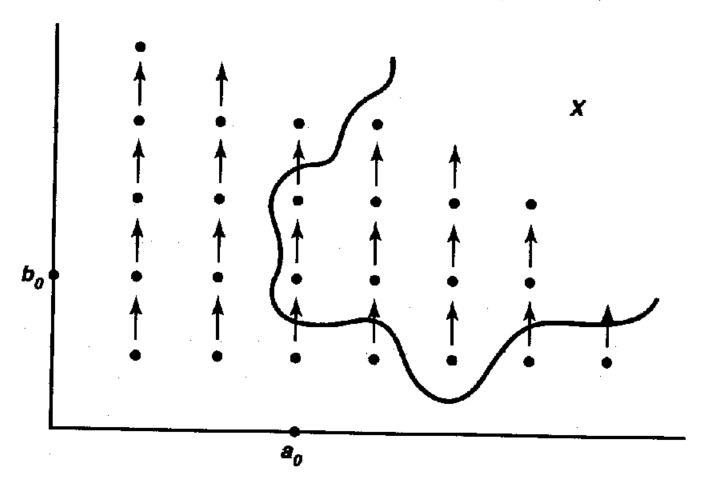


Figura 10.1

EJEMPLO 3. El conjunto de los enteros no está bien ordenado con el orden usual; el subconjunto formado por los enteros negativos no tiene un mínimo. Ni el conjunto de los números reales del intervalo $\{0 \leq x \leq 1\}$ está bien ordenado; el subconjunto formado por los x para los cuales $0 < x < 1$ no tiene un mínimo (aunque tiene un ínfimo, desde luego).

Hay varias formas de construir conjuntos bien ordenados. Dos de ellas son las siguientes:

(1) Si A es un conjunto bien ordenado, entonces cualquier subconjunto de A está bien ordenado con la relación de orden inducida.

(2) Si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces $A \times B$ está bien ordenado con el orden del diccionario.

La demostración de (1) es trivial y la demostración de (2) sigue el modelo dado en el Ejemplo 2.

Se deduce de esto que el conjunto $\mathbb{Z}_+ \times (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ está bien ordenado con el orden del diccionario y se puede representar como una sucesión infinita de sucesiones infinitas de sucesiones infinitas. Análogamente, $(\mathbb{Z}_+)^4$ es un conjunto bien ordenado con el orden del diccionario, y así sucesivamente. Pero si se intenta generalizar a un producto infinito de $\mathbb{Z}_+$ consigo mismo, aparece un problema. Examinaremos esta situación brevemente.

Ahora, dado un conjunto A sin una relación de orden, es natural preguntarse si existe una relación de orden en A que lo convierta en un conjunto bien ordenado. Si A es finito, cualquier biyección

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

puede utilizarse para definir una relación de orden en A, y bajo esta relación, A tiene el mismo tipo de orden que el conjunto ordenado $\{1, \ldots, n\}$. En efecto, toda relación de orden sobre un conjunto finito puede obtenerse de la siguiente forma:

Teorema 10.1. *Todo conjunto no vacío, finito y ordenado tiene el tipo de orden de una sección $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{Z}_+$, y por tanto está bien ordenado.*

Demostración. Ésta se propuso como un ejercicio en §6 y lo demostraremos aquí. En primer lugar, demostremos que todo conjunto finito y ordenado A tiene un máximo. Si A tiene un solo elemento, esto es trivial. Supongamos que es cierto para conjuntos con $n - 1$ elementos, sea A un conjunto con n elementos y sea $a_0 \in A$. Entonces $A - \{a_0\}$ tiene un máximo a_1, y el mayor de $\{a_0, a_1\}$ es el máximo de A.

En segundo lugar, demostremos que existe una biyección que preserva el orden entre A y $\{1, \ldots, n\}$ para algún n. Si A tiene un solo elemento, este hecho es trivial. Supongamos que es cierto para conjuntos que tengan $n - 1$ elementos y sea b el máximo de A. Por hipótesis, existe una biyección que preserva el orden

$$f' : A - \{b\} \longrightarrow \{1, \ldots, n - 1\}.$$

Definimos una biyección que preserva el orden $f : A \to \{1, \ldots, n\}$ por

$$f(x) = f'(x) \text{ para } x \neq b,$$
$$f(b) = n.$$

■

Así, un conjunto finito ordenado tiene sólo un tipo de orden posible. Para un conjunto infinito, las cosas son bastante diferentes. Los conjuntos bien ordenados

$$\begin{aligned}&\mathbb{Z}_+,\\&\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{Z}_+,\\&\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+,\\&\mathbb{Z}_+\times(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+)\end{aligned}$$

son infinito numerables, pero todos tienen distintos tipos de orden, como se puede comprobar.

Todos los ejemplos que hemos dado de conjuntos bien ordenados tienen órdenes de conjuntos numerables. Es natural preguntarse si se pueden encontrar conjuntos no numerables bien ordenados.

El conjunto no numerable más obvio de estudiar es el producto infinito numerable

$$X=\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\times\cdots=(\mathbb{Z}_+)^\omega$$

de $\mathbb{Z}_+$ consigo mismo. Se puede generalizar el orden del diccionario a este conjunto de una forma natural, definiendo

$$(a_1,a_2,\ldots)<(b_1,b_2,\ldots)$$

si para algún $n\geq 1$,

$$a_i=b_i,\qquad \text{para } i<n \quad \text{y} \quad a_n<b_n.$$

Ésta es, en efecto, una relación de orden para el conjunto X, pero desgraciadamente no es un buen orden. Considérese el conjunto A de todos los elementos $\mathbf{x}$ de X de la forma

$$\mathbf{x}=(1,\ldots,1,2,1,1,\ldots),$$

donde exactamente una coordenada de $\mathbf{x}$ es igual a 2 y todas las demás son iguales a 1. Claramente, el conjunto A no tiene un mínimo.

Por tanto, el orden del diccionario no da, al menos, un buen orden para el conjunto $(\mathbb{Z}_+)^\omega$. ¿Existe alguna otra relación de orden en este conjunto que sea una buena ordenación? Nadie ha construido nunca un buen orden específico de $(\mathbb{Z}_+)^\omega$. Sin embargo, hay un famoso teorema que dice que el citado buen orden existe:

Teorema (Teorema del buen orden). *Si A es un conjunto, existe una relación de orden sobre A que es un buen orden.*

Este teorema fue demostrado por Zermelo en 1904 y sobrecogió al mundo de las matemáticas. Hubo un considerable debate sobre la corrección de la demostración; la ausencia de cualquier tipo de procedimiento constructivo para establecer un buen orden en un conjunto no numerable arbitrario conducía a muchos a ser escépticos. Cuando la demostración fue analizada cuidadosamente, el único punto que se encontró que podía cuestionarse fue una construcción que implicaba un número infinito de elecciones arbitrarias, esto es, una construcción que utilizaba el axioma de elección.

Algunos matemáticos rechazaban el axioma de elección como un resultado y durante muchos años una pregunta legítima sobre cada nuevo teorema era: ¿utiliza su demostración el axioma de elección o no? Un teorema se consideraba un tanto en el aire si se tenía que utilizar el axioma de elección en su demostración. Los matemáticos actuales, en general, no tienen tales dudas. Ellos aceptan el axioma de elección como una hipótesis razonable sobre la teoría de conjuntos y aceptan por tanto el teorema del buen orden.

La demostración de que el axioma de elección implica el teorema del buen orden es bastante larga (aunque no excesivamente complicada), y principalmente de interés para los especialistas en lógica; nosotros la omitiremos. Si está interesado, se ha esbozado una demostración en los ejercicios suplementarios al final del capítulo. En su lugar, simplemente aceptaremos el teorema del buen orden cuando lo necesitemos. Considérelo como un axioma adicional de la teoría de conjuntos, si lo prefiere.

En efecto, necesitaremos la fuerza de esta hipótesis sólo de forma ocasional. La mayor parte del tiempo, todo lo que se necesitará será el siguiente resultado más débil:

Corolario. *Existe un conjunto bien ordenado no numerable.*

Utilizaremos ahora este resultado para construir un conjunto bien ordenado particular que nos será muy útil.

Definición. Sea X un conjunto bien ordenado. Dado $\alpha \in X$, sea S_α el conjunto

$$S_\alpha = \{x \mid x \in X \text{ y } x < \alpha\}.$$

Se denomina ***sección*** de X por α.

Lema 10.2. *Existe un conjunto bien ordenado A teniendo un máximo Ω, tal que la sección S_Ω de A por Ω es no numerable, pero tal que cualquier otra sección de A es numerable.*

Demostración. Comenzamos con un conjunto no numerable bien ordenado B. Sea C el conjunto bien ordenado $\{1, 2\} \times B$ con el orden del diccionario, entonces alguna

sección de C es no numerable (en efecto, la sección de C por un elemento de la forma $2 \times b$ es no numerable). Sea Ω el mínimo de C para el cual la sección de C por Ω es no numerable. Entonces A consiste en esta sección junto con el elemento Ω. ∎

Obsérvese que S_Ω es un conjunto bien ordenado no numerable, toda sección del cual es numerable. Su tipo de orden está, en efecto, unívocamente determinado por esta condición. Lo llamaremos un *conjunto bien ordenado no numerable minimal.* Más aún, representaremos el conjunto bien ordenado $A = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ mediante el símbolo $\bar{S}_\Omega$ (por razones que veremos más adelante).

La propiedad del conjunto S_Ω más útil para nuestros propósitos viene expresada en el siguiente teorema:

Teorema 10.3. *Si A es un subconjunto numerable de S_Ω, entonces A tiene una cota superior en S_Ω.*

Demostración. Sea A un subconjunto numerable de S_Ω. Para cada $a \in A$, la sección S_a es numerable. Por lo tanto, la unión $B = \cup_{a \in A} S_a$ es también numerable. Como S_Ω es no numerable, el conjunto B no puede ser todo S_Ω; sea x un punto de S_Ω que no está en B. Entonces, x es una cota superior para A. Efectivamente, si $x < a$ para algún a de A, entonces x pertenece a S_a, y por lo tanto a B, contradiciendo la elección. ∎

Ejercicios

1. Demuestre que todo conjunto bien ordenado tiene la propiedad del supremo.

2. (a) Demuestre que en un conjunto bien ordenado, todo elemento excepto el máximo (si lo hay) tiene un inmediato sucesor.

(b) Encuentre un conjunto que no esté bien ordenado y en el cual todo elemento tenga un inmediato sucesor.

3. Los dos conjuntos $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{Z}_+ \times \{1, 2\}$ están bien ordenados con el orden del diccionario. ¿Tienen el mismo tipo de orden?

4. (a) Sea $\mathbb{Z}_-$ el conjunto de los enteros negativos con el orden usual. Demuestre que un conjunto simplemente ordenado A no está bien ordenado si, y sólo si, contiene un subconjunto que tiene el mismo tipo de orden que $\mathbb{Z}_-$.

(b) Demuestre que si A es simplemente ordenado y todo subconjunto numerable de A está bien ordenado, entonces A está bien ordenado.

5. Demuestre que el teorema del buen orden implica el axioma de elección.

6. Sea S_Ω el conjunto bien ordenado no numerable minimal.

(a) Demuestre que S_Ω no tiene un máximo.

(b) Demuestre que, para todo $\alpha \in S_\Omega$, el subconjunto $\{x \mid \alpha < x\}$ es no numerable.

(c) Sea X_0 el subconjunto de S_Ω formado por todos los elementos x tales que x no tiene un inmediato predecesor. Demuestre que X_0 es no numerable.

7. Sea J un conjunto bien ordenado. Un subconjunto J_0 de J se dice que es ***inductivo*** si para todo $\alpha \in J$,

$$(S_\alpha \subset J_0) \Longrightarrow \alpha \in J_0.$$

Teorema (El principio de inducción transfinita). Si J es un conjunto bien ordenado y J_0 es un subconjunto inductivo de J, entonces $J_0 = J$.

8. (a) Sean A_1 y A_2 conjuntos disjuntos, bien ordenados por $<_1$ y $<_2$, respectivamente. Defina una relación de orden en $A_1 \cup A_2$ mediante $a < b$ si bien $a, b \in A_1$ y $a <_1 b$, bien $a, b \in A_2$ y $a <_2 b$, o bien $a \in A_1$ y $b \in A_2$. Demuestre que es un buen orden.

(b) Generalice (a) a una familia arbitraria de conjuntos disjuntos bien ordenados, indexada por un conjunto bien ordenado.

9. Considere el subconjunto A de $(\mathbb{Z}_+)^\omega$ formado por todas las sucesiones infinitas de enteros positivos $\mathbf{x}= (x_1, x_2, \ldots)$ que terminan en una cadena infinita de unos. Dote a A del siguiente orden: $\mathbf{x}<\mathbf{y}$ si $x_n < y_n$ y $x_i = y_i$ para $i > n$. Llamamos a éste el "orden antidiccionario" en A.

(a) Demuestre que, para todo n, existe una sección de A que tiene el mismo tipo de orden que $(\mathbb{Z}_+)^n$ con el orden del diccionario.

(b) Demuestre que A está bien ordenado.

10. *Teorema. Sean J y C conjuntos bien ordenados; supongamos que no existe ninguna función sobreyectiva aplicando una sección de J en C. Entonces existe una única función $h : J \to C$ verificando la ecuación*

$$(*) \qquad h(x) = \textit{mínimo}\,[C - h(S_x)]$$

para cada $x \in J$, donde S_x es la sección de J por x.
Demostración.

(a) Si h y k aplican secciones de J, o todo J, en C y satisfacen $(*)$ para todo x de sus respectivos dominios, demuestre que $h(x) = k(x)$ para todo x de ambos dominios.

(b) Si existe una función $h : S_\alpha \to C$ verificando $(*)$, demuestre que existe una función $k : S_\alpha \cup \{\alpha\} \to C$ verificando $(*)$.

(c) Si $K \subset J$ y para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ verificando $(*)$, demuestre que existe una función

$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \longrightarrow C$$

que satisface $(*)$.

(d) Demuestre por inducción transfinita que para todo $\beta \in J$, existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ verificando $(*)$. [*Indicación*: si β tiene un inmediato predecesor α, entonces $S_\beta = S_\alpha \cup \{\alpha\}$. Si no, S_β es la unión de todos los S_α con $\alpha < \beta$.]

(e) Demuestre el teorema.

11. Sean A y B dos conjuntos. Utilizando el teorema del buen orden, demuestre que tienen el mismo cardinal, o uno tiene mayor cardinal que el otro. [*Indicación*: si no existe ninguna aplicación sobreyectiva $f : A \to B$, aplique el ejercicio anterior.]

*§11 El principio del máximo†

Ya hemos señalado que el axioma de elección conduce al importante teorema que nos asegura que todo conjunto puede ser bien ordenado. El axioma de elección tiene otras consecuencias que son incluso más importantes en matemáticas. Referidas en su conjunto como "principios del máximo", tienen muchas versiones. Formuladas independientemente por un gran número de matemáticos, entre los que se incluyen F. Hausdorff, K. Kuratowski, S. Bochner y M. Zorn, durante los años 1914-1935, se demostraron frecuentemente como consecuencia del teorema del buen orden. Posteriormente, se observó que todas ellas eran, de hecho, *equivalentes* al teorema del buen orden. Consideraremos aquí varias de ellas.

En primer lugar, damos una definición. Dado un conjunto A, una relación $\prec$ sobre A se denomina ***orden parcial estricto*** sobre A si tiene las siguientes dos propiedades:

(1) (No-reflexividad) la relación $a \prec a$ nunca se cumple.

(2) (Transitividad) si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$.

Éstas son, sencillamente, la segunda y tercera propiedades de un orden simple (véase §3); la propiedad de comparabilidad es la única que se ha omitido. En otras palabras, un orden parcial estricto se comporta como un orden simple excepto que no necesita que para cada par de puntos distintos x e y del conjunto, bien $x \prec y$, bien $y \prec x$.

†Esta sección se utilizará en los Capítulos 5 y 14.

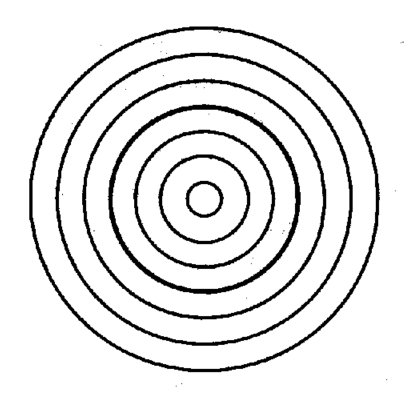
Si $\prec$ es un orden parcial estricto sobre el conjunto A, fácilmente puede ocurrir que algún subconjunto B de A sea simplemente ordenado por esta relación; todo lo que se necesita es que todo par de elementos de B sean comparables por $\prec$.

Ahora podemos establecer el siguiente principio, que fue formulado por primera vez por Hausdorff en 1914.

Teorema (El principio del máximo). *Sean A un conjunto y $\prec$ un orden parcial estricto sobre A. Entonces existe un subconjunto simplemente ordenado maximal B de A.*

Dicho de otro modo, existe un subconjunto B de A tal que B está simplemente ordenado por $\prec$ y tal que ningún subconjunto de A que contenga propiamente a B está simplemente ordenado por $\prec$.

EJEMPLO 1. Si $\mathcal{A}$ es cualquier familia de conjuntos, la relación "es un subconjunto propio de" es un orden parcial estricto sobre $\mathcal{A}$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es la familia de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Una subfamilia simplemente ordenada maximal de $\mathcal{A}$ está formada por todas las regiones circulares con centros en el origen. Otra subfamilia simplemente ordenada maximal sería la formada por todas las regiones circulares acotadas por círculos tangentes en el origen desde la derecha al eje y (véase la Figura 11.1).



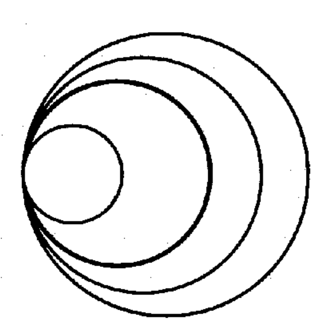


Figura 11.1

EJEMPLO 2. Si (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$, definimos

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$$

si $y_0 = y_1$ y $x_0 < x_1$. Éste es un orden parcial de $\mathbb{R}^2$ bajo el cual dos puntos son comparables solamente si están en la misma recta horizontal. Los conjuntos simplemente ordenados maximales son las rectas horizontales de $\mathbb{R}^2$.

Se puede dar una "demostración" intuitiva del principio del máximo que es bastante atractiva. Utiliza un procedimiento paso-a-paso, que se puede describir en términos físicos como sigue.

Supongamos que tenemos una caja y colocamos en su interior algunos elementos de A de acuerdo con el siguiente plan: primero, tomamos un elemento arbitrario de A y lo ponemos en la caja. Después cogemos otro elemento de A. Si es comparable con el elemento de la caja, lo introducimos también en ella; en caso contrario, lo desechamos. En general, tendremos una colección de elementos metidos en la caja y una colección de elementos que han sido eliminados. Tomamos uno de los elementos restantes de A. Si es comparable con todos los que hay en la caja, también lo ponemos en ella; en caso contrario, lo desechamos. Y continuamos de forma análoga. Después de haber comprobado todos los elementos de A, los elementos que se tienen en la caja serán todos comparables unos con otros, y así formarán un conjunto simplemente ordenado. Todo elemento que no esté en la caja no será comparable con, al menos, uno de los de la caja, motivo por el cual fue desechado. Por lo tanto, el conjunto simplemente ordenado de la caja es maximal, ya que ningún subconjunto de A mayor que él puede verificar la condición de comparabilidad.

Ahora bien, el punto débil en la anterior "demostración" se presenta cuando decimos "después de haber comprobado todos los elementos de A". ¿Cómo se sabe que se han "conseguido" comprobar todos los elementos de A? Si sucediese que A es numerable, no es difícil convertir esta demostración intuitiva en una verdadera demostración. Consideremos el caso infinito numerable; el caso finito es aún más sencillo. Numeramos los elementos de A biyectivamente con los enteros positivos, así que $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Esta numeración da una forma de decidir en qué orden se comprueban los elementos de A, y cómo saber cuándo se han comprobado todos.

Ahora definimos una función $h : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$, asignando el valor 0 a i si "ponemos a_i en la caja", y el valor 1 si "desechamos a_i". Esto quiere decir que $h(1) = 0$, y que para $i > 1$, se tiene $h(i) = 0$ si, y sólo si, a_i es comparable con todos los elementos del conjunto

$$\{a_j \mid j < i \text{ y } h(j) = 0\}.$$

Por el principio de definición recursiva, esta fórmula determina una única función $h : \mathbb{Z}_+ \to \{0, 1\}$. Es fácil comprobar que el conjunto de los a_j para los cuales $h(j) = 0$ es un subconjunto simplemente ordenado maximal de A.

Si A es no numerable, una variante de este método funcionará, *si nos permitimos utilizar el teorema del buen orden*. En lugar de numerar los elementos de A con el conjunto $\mathbb{Z}_+$, los numeramos (biyectivamente) con los elementos de algún conjunto bien ordenado J, así que $A = \{a_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Para ello necesitamos el teorema del buen orden, por lo que sabemos que existe una biyección entre A y algún conjunto bien ordenado J. Entonces, podemos proceder como en el párrafo anterior, cambiando i por α en el argumento. Estrictamente hablando, también se necesita generalizar el principio de definición recursiva a conjuntos bien ordenados, pero esto no es particularmente difícil (véanse los ejercicios complementarios).

Por lo tanto, el teorema del buen orden implica el principio del máximo.

Aunque el principio del máximo de Hausdorff fue el primero en ser formulado y es, probablemente, el más sencillo de entender, existe otro principio de este tipo que es citado con más frecuencia hoy en día. Popularmente es conocido como "el lema de Zorn", aunque Kuratowski (1922) y Bochner (1922) precedieron a Zorn (1935) enunciando y demostrando algunas versiones de este resultado. Para conocer los antecedentes y discusión de la intrincada historia de estas ideas, véase [C] o [Mo]. Para establecer este principio, necesitamos cierta terminología.

Definición. Sean A un conjunto y $\prec$ un orden parcial estricto sobre A. Si B es un subconjunto de A, una ***cota superior*** sobre B es un elemento c de A tal que para todo b de B bien $b = c$, o bien $b \prec c$. Un ***elemento maximal*** de A es un elemento m de A tal que ningún elemento a de A verifica la relación $m \prec a$.

Lema de Zorn. *Sea A un conjunto estrictamente parcialmente ordenado. Si todo subconjunto simplemente ordenado de A tiene una cota superior en A, entonces A tiene un elemento maximal.*

El lema de Zorn es una sencilla consecuencia del principio del máximo: dado A, el principio del máximo implica que A tiene un subconjunto simplemente ordenado maximal B. La hipótesis del lema de Zorn nos dice que B tiene una cota superior c en A. Entonces, el elemento c es automáticamente un elemento maximal de A. Ya que si $c \prec d$ para algún d de A, entonces el conjunto $B \cup \{d\}$, que contiene propiamente a B, es simplemente ordenado, pues $b \prec d$ para todo $b \in B$. Este hecho contradice la maximalidad de B.

También es cierto que el principio del máximo es una sencilla consecuencia del lema de Zorn (véanse los Ejercicios 5-7).

Una observación final. Hemos definido lo que queremos decir por un orden parcial estricto en un conjunto, pero no hemos dicho qué es un orden parcial en sí mismo. Sea $\prec$ un orden parcial estricto sobre un conjunto A. Supongamos que definimos $a \preceq b$ si bien $a \prec b$, bien $a = b$. Entonces la relación $\preceq$ se denomina ***orden parcial*** sobre A. Por ejemplo, la relación de inclusión $\subset$ en una familia de conjuntos es un orden parcial, mientras que la inclusión propia es un orden parcial estricto.

Muchos autores prefieren trabajar con órdenes parciales más que con órdenes parciales estrictos; el principio del máximo y el lema de Zorn se expresan con frecuencia en esos términos. La formulación que se utilice es simplemente una cuestión de gusto y conveniencia.

Ejercicios

1. Si a y b son números reales, definimos $a \prec b$ si $b - a$ es positivo y racional. Demuestre que éste es un orden parcial estricto sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuáles son los subconjuntos simplemente ordenados maximales?

2. (a) Sea $\prec$ un orden parcial estricto sobre el conjunto A. Definimos una relación en A mediante $a \preceq b$ si bien $a \prec b$, bien $a = b$. Demuestre que esta relación tiene las siguientes propiedades, que se denominan ***axiomas del orden parcial***:

(i) $a \preceq a$ para todo $a \in A$.
(ii) $a \preceq b$ y $b \preceq a \Rightarrow a = b$.
(iii) $a \preceq b$ y $b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$.

(b) Sea P una relación sobre A que verifica las propiedades (i)-(iii). Definimos una relación S en A mediante aSb si aPb y $a \neq b$. Demuestre que S es un orden parcial estricto sobre A.

3. Sean A un conjunto con un orden parcial estricto $\prec$ y $x \in A$. Supongamos que queremos encontrar un subconjunto simplemente ordenado maximal B de A que contiene a x. Una forma plausible de intentar definir B es igualarlo al conjunto de todos los elementos de A que son *comparables* con x:

$$B = \{y \mid y \in A \text{ y bien } x \prec y, \text{ bien } y \prec x\}.$$

Pero esto no siempre funciona. ¿En cuáles de los Ejemplos 1 y 2 tendrá éxito este procedimiento y en cuáles no?

4. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$, definimos

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1)$$

si $x_0 < x_1$ e $y_0 \leq y_1$. Demuestre que las curvas $y = x^3$ e $y = 2$ son subconjuntos simplemente ordenados maximales de $\mathbb{R}^2$, y que la curva $y = x^2$ no lo es. Encuentre todos los subconjuntos simplemente ordenados maximales.

5. Demuestre que el lema de Zorn implica lo siguiente:
Lema (Kuratowski). *Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Supongamos que para toda subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que esté simplemente ordenada por la inclusión propia, la unión de los elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$.*

6. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice *de tipo finito* si se cumple que un subconjunto B de X pertenece a $\mathcal{A}$ si, y sólo si, todo subconjunto finito de B pertenece a $\mathcal{A}$. Demuestre que el lema de Kuratowski implica lo siguiente:
Lema (Tukey, 1940). *Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Si $\mathcal{A}$ es de tipo finito, entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$.*

7. Demuestre que el lema de Tukey implica el principio del máximo de Hausdorff. [*Indicación*: si $\prec$ es un orden parcial estricto sobre A, sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos de A que están simplemente ordenados por $\prec$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es de tipo finito.]

8. Una típica aplicación del lema de Zorn en álgebra es la demostración de que todo espacio vectorial tiene una base. Recordemos que si A es un subconjunto cualquiera de un espacio vectorial V, decimos que un vector pertenece al *subespacio generado* por A si se puede expresar como una combinación lineal finita de elementos de A. El conjunto A es *independiente* si la única combinación lineal finita de elementos de A que es igual al vector cero es la trivial que tiene todos los coeficientes cero. Si A es independiente y todo vector de V pertenece al subespacio generado por A, entonces A es una *base* de V.

(a) Si A es independiente y $v \in V$ no pertenece al subespacio generado por A, demuestre que $A \cup \{v\}$ es independiente.

(b) Demuestre que la familia de todos los conjuntos independientes de V tiene un elemento maximal.

(c) Demuestre que V tiene una base.

*Ejercicios complementarios: el buen orden

En los siguientes ejercicios se debe demostrar la equivalencia entre el axioma de elección, el teorema del buen orden y el principio del máximo. De estos ejercicios, sólo el Ejercicio 7 utiliza el axioma de elección.

1. *Teorema (Principio general de definición recursiva). Sean J un conjunto bien ordenado y C un conjunto. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones que aplican secciones de J en C. Dada una función $\rho : \mathcal{F} \to C$, existe una única función $h : J \to C$ tal que $h(\alpha) = \rho(h \mid S_\alpha)$ para cada $\alpha \in J$.*
[*Indicación*: siga el modelo esbozado en el Ejercicio 10 de §10.]

2. (a) Sean J y E conjuntos bien ordenados y $h : J \to E$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) h preserva el orden y su imagen es E o una sección de E.

(ii) $h(\alpha) =$ mínimo $[E - h(S_\alpha)]$ para todo α.

[*Indicación*: demuestre que cada una de estas condiciones implica que $h(S_\alpha)$ es una sección de E; concluya que debe ser la sección por $h(\alpha)$.]

(b) Si E es un conjunto bien ordenado, demuestre que ninguna sección de E tiene el tipo de orden de E, ni dos secciones diferentes de E tienen el mismo tipo de orden. [*Indicación*: dado J, existe a lo sumo una aplicación que preserva el orden de J en E cuya imagen es E o una sección de E.]

3. Sean J y E conjuntos bien ordenados y supongamos que existe una aplicación que preserva el orden $k : J \to E$. Utilizando los ejercicios 1 y 2, demuestre que J tiene el tipo de orden de E o de una sección de E. [*Indicación*: elija $e_0 \in E$. Defina $h : J \to E$ mediante la fórmula de recursión

$$h(\alpha) = \text{ mínimo } [E - h(S_\alpha)] \quad \text{si } h(S_\alpha) \neq E$$

y $h(\alpha) = e_0$ en caso contrario. Demuestre que $h(\alpha) \leq k(\alpha)$ para todo α; concluya que $h(S_\alpha) \neq E$ para todo α.]

4. Utilice los Ejercicios 1–3 para demostrar lo siguiente:

(a) Si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces se verifica exactamente una de las siguientes tres condiciones: A y B tienen el mismo tipo de orden, o A tiene el tipo de orden de una sección de B, o B tiene el tipo de orden de una sección de A. [*Indicación*: obtenga un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B, como en el Ejercicio 8 de §10; entonces aplique el ejercicio anterior.]

(b) Supongamos que A y B son conjuntos bien ordenados no numerables, tales que toda sección de A y de B es numerable. Demuestre que A y B tienen el mismo tipo de orden.

5. Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, <)$, donde A es un subconjunto de X y $<$ es un buen orden de A. Definimos

$$(A, <) \prec (A', <')$$

si $(A, <)$ *es igual* a una sección de $(A', <')$.

(a) Demuestre que $\prec$ es un orden parcial estricto sobre $\mathcal{A}$.

(b) Sea $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$ simplemente ordenada por $\prec$. Definimos B' como la unión de los conjuntos B, para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$; y definimos $<'$ como la unión de las relaciones $<$, para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$. Demuestre que $(B', <')$ es un conjunto bien ordenado.

6. Utilice los Ejercicios 1–5 para demostrar lo siguiente:
Teorema. *El principio del máximo es equivalente al teorema del buen orden.*

7. Utilice los Ejercicios 1–5 para demostrar lo siguiente:
Teorema. *El axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.*
Demostración. Sean X un conjunto y c una función de elección fijada para los subconjuntos no vacíos de X. Si T es un subconjunto de X y $<$ es una relación sobre T, decimos que $(T, <)$ es una ***torre*** en X si $<$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$,

$$x = c(X - S_x(T))$$

donde $S_x(T)$ es la sección de T por x.

(a) Sean $(T_1, <_1)$ y $(T_2, <_2)$ dos torres en X. Demuestre que estos dos conjuntos ordenados son el mismo o uno es igual a una sección del otro. [*Indicación*: permutando los índices si es necesario, podemos suponer que $h : T_1 \to T_2$ preserva el orden y $h(T_1)$ es igual a T_2 o a una sección de T_2. Utilice el Ejercicio 2 para demostrar que $h(x) = x$ para todo x.]

(b) Si $(T, <)$ es una torre en X y $T \neq X$, demuestre que existe una torre en X de la cual $(T, <)$ es una sección.

(c) Sea $\{(T_k, <_k) \mid k \in K\}$ la familia de todas las torres de X. Sean

$$T = \bigcup_{k \in K} T_k \qquad \text{y} \qquad <= \bigcup_{k \in K} (<_k).$$

Demuestre que $(T, <)$ es una torre en X. Concluya que $T = X$.

8. Utilizando los Ejercicios 1–4, construya un conjunto bien ordenado no numerable, como sigue. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, <)$, donde A es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ y $<$ es un buen orden de A (se permite que A sea vacío). Definimos $(A, <) \sim (A', <')$ si $(A, <)$ y $(A', <')$ tienen el mismo tipo de orden. Es trivial demostrar que ésta es una relación de equivalencia. Si $[(A, <)]$ es la clase de equivalencia de $(A, <)$, representamos por E la familia de todas estas clases de equivalencia. Definimos

$$[(A, <)] \ll [(A', <')]$$

si $(A, <)$ tiene el tipo de orden de una *sección* de $(A', <')$.

(a) Demuestre que la relación $\ll$ está bien definida y es un orden simple sobre E. Obsérvese que la clase de equivalencia $[(\varnothing, \varnothing)]$ es el mínimo de E.

(b) Demuestre que si $\alpha = [(A, <)]$ es un elemento de E, entonces $(A, <)$ tiene el mismo tipo de orden que la sección $S_\alpha(E)$ de E por α. [*Indicación*: defina una aplicación $f : A \to E$ mediante $f(x) = [(S_x(A),$ restricción de $<)]$ para cada $x \in A$.]

(c) Concluya que E está bien ordenado por la relación $\ll$.

(d) Demuestre que E es no numerable. [*Indicación*: si $h : E \to \mathbb{Z}_+$ es una biyección, entonces h da lugar a un buen orden de $\mathbb{Z}_+$.]

Este mismo argumento, cambiando $\mathbb{Z}_+$ por un conjunto bien ordenado arbitrario X, demuestra (sin utilizar el axioma de elección) la existencia de un conjunto bien ordenado E cuyo cardinal es mayor que el de X.

Este ejercicio demuestra que es posible construir un conjunto bien ordenado no numerable,y por tanto el conjunto bien ordenado no numerable minimal, mediante una construcción explícita que no utiliza el axioma de elección. Sin embargo, este resultado es menos interesante de lo que podría parecer. La propiedad fundamental de S_Ω, la que utilizamos continuamente, es el hecho de que todo subconjunto numerable de S_Ω tiene una cota superior en S_Ω. Ese hecho depende, a su vez, del hecho de que una unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Y la demostración de *ese* resultado (si se examina cuidadosamente) implica un número infinito de elecciones arbitrarias —esto es, depende del axioma de elección.

Dicho de otro modo, sin el axioma de elección podemos construir el conjunto bien ordenado no numerable minimal, pero no podemos utilizarlo para nada.

Capítulo 2

Espacios topológicos y funciones continuas

El concepto de espacio topológico se extiende más allá del estudio de la recta real y del espacio euclídeo, y del estudio de las funciones continuas sobre estos espacios. En este capítulo definimos lo que es un espacio topológico y estudiaremos algunos caminos para construir una topología sobre un conjunto, para convertirlo en un espacio topológico. También consideraremos algunos de los conceptos elementales que tienen que ver con espacios topológicos. Conjuntos abiertos y cerrados, puntos límite y funciones continuas se introducen como generalizaciones naturales de las correspondientes ideas para la recta real y el espacio euclídeo.

§12 Espacios topológicos

La definición de espacio topológico, que ahora mismo está estandarizada, tardó mucho tiempo en ser formulada. Varios matemáticos —Fréchet, Hausdorff y otros— propusieron distintas definiciones a lo largo de muchos años en las primeras décadas del siglo veinte, pero fue bastante más tarde cuando los matemáticos establecieron la definición que parecía más apropiada. Querían, por supuesto, una definición que fuera lo más general posible, de manera que incluyera como casos especiales todos los distintos ejemplos que eran útiles en matemáticas —espacio euclídeo, espacio euclídeo de dimensión infinita y espacios de funciones, entre ellos— pero también querían que la definición fuese lo suficientemente estricta para que los teoremas habituales sobre estos espacios familiares se adaptaran a espacios topológicos en general. Éste es siempre el problema cuando uno está intentando formular un nuevo concepto matemático, decidir lo general que podría ser su definición. La definición finalmente adoptada puede parecer un poco abstracta, pero a medida en que se trabaje con las

distintas formas de construir espacios topológicos, se tendrá una mejor impresión de lo que el concepto significa.

Definición. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing$ y X están en $\mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama ***espacio topológico***.

Hablando con propiedad, un espacio topológico es un par ordenado $(X, \mathcal{T})$, formado por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X, pero a menudo omitiremos hacer mención específica de $\mathcal{T}$ si no existe confusión.

Si X es un espacio topológico con una topología $\mathcal{T}$, diremos que un subconjunto U de X es un ***conjunto abierto*** de X si U pertenece a la colección $\mathcal{T}$. Usando esta terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X, llamados *conjuntos abiertos*, tales que $\varnothing$ y X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

EJEMPLO 1. Sea X un conjunto de tres elementos, $X = \{a, b, c\}$. Hay muchas topologías posibles sobre X, algunas de las cuales se indican esquemáticamente en la Figura 12.1. El diagrama de la esquina superior derecha representa la topología en la que los conjuntos abiertos son $X, \varnothing, \{a, b\}, \{b\}$ y $\{b, c\}$. La topología de la esquina superior izquierda contiene sólo a X y $\varnothing$, mientras que la topología de la esquina inferior derecha contiene cada uno de los subconjuntos de X. Se pueden obtener otras topologías sobre X permutando a, b y c.

A partir de este ejemplo, se puede ver que incluso un conjunto de tres elementos tiene muchas topologías distintas. Pero no toda colección de subconjuntos de X es una topología sobre X. Ninguna de las colecciones indicadas en la Figura 12.2 es una topología, por ejemplo.

EJEMPLO 2. Si X es un conjunto cualquiera, la colección de *todos* los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina ***topología discreta***. La colección compuesta únicamente por X y $\varnothing$ es también una topología sobre X y la llamaremos ***topología indiscreta***, o ***topología trivial***.

EJEMPLO 3. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}_f$ la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es finito o es todo X. Entonces $\mathcal{T}_f$ es una topología sobre X, llamada ***topología de los complementos finitos***. Tanto X como $\varnothing$ están dentro de $\mathcal{T}_f$, puesto que

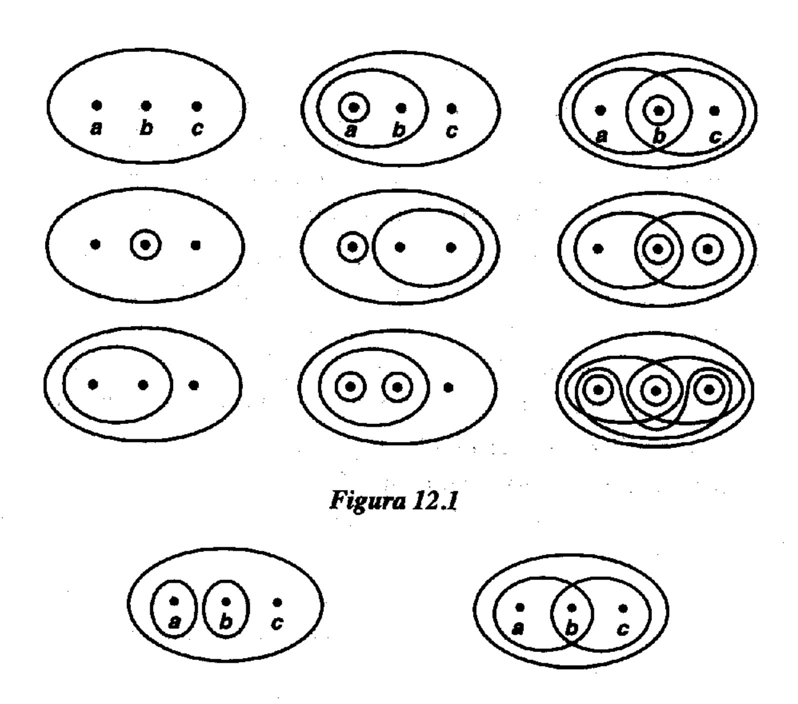


Figura 12.1

Figura 12.2

$X - X$ es finito y $X - \varnothing$ es todo X. Si $\{U_\alpha\}$ es una familia indexada de elementos no vacíos de $\mathcal{T}_f$, para mostrar que $\bigcup U_\alpha$ pertenece a $\mathcal{T}_f$, tenemos

$$X - \bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha).$$

El último conjunto es finito, puesto que cada conjunto $X - U_\alpha$ es finito. Si $U_1, \ldots, U_n$ son elementos no vacíos de $\mathcal{T}_f$, para mostrar que $\bigcap U_i$ está en $\mathcal{T}_f$, tenemos

$$X - \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - U_i).$$

Este último conjunto es una unión finita de conjuntos finitos y es, por tanto, finito.

EJEMPLO 4. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}_c$ la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X - U$ es numerable o todo X. Entonces $\mathcal{T}_c$ es una topología sobre X, como se puede comprobar.

Definición. Supongamos que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{T}'$ es ***más fina*** que $\mathcal{T}$; si $\mathcal{T}'$ contiene *propiamente* a $\mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{T}'$ es ***estrictamente más fina*** que $\mathcal{T}$. También diremos que $\mathcal{T}$ es ***más gruesa*** que $\mathcal{T}'$, o ***estrictamente más gruesa***, en ambas situaciones. Diremos que $\mathcal{T}$ es ***comparable*** con $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ó $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

Esta terminología surge al pensar en un espacio topológico como si fuera un camión lleno de gravilla —siendo las pequeñas piedras y todas las uniones de colecciones de las mismas los conjuntos abiertos—. Si ahora rompemos las piedras para dar lugar a otras aún más pequeñas, la colección de conjuntos abiertos se ha ampliado, y la topología, como la grava, se dice que se ha hecho más fina mediante esta operación.

Dos topologías sobre X, por supuesto, no son necesariamente comparables. En la Figura 12.1 anterior, la topología de la esquina superior derecha es estrictamente más fina que cada una de las tres topologías de la primera columna y, a su vez, estrictamente más gruesa que cada una de las otras topologías de la tercera columna. Pero no es comparable con cualquiera de las topologías de la segunda columna.

Algunas veces se utiliza otra terminología para este concepto. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, algunos matemáticos dirían que $\mathcal{T}'$ es ***más grande*** que $\mathcal{T}$, y $\mathcal{T}$ es ***más pequeña*** que $\mathcal{T}'$. Esta es una terminología ciertamente aceptable, si bien no son tan gráficas como las palabras "más fina" y "más gruesa".

Muchos matemáticos utilizan las palabras "más débil" y "más fuerte" en este contexto. Desgraciadamente, algunos de ellos (particularmente analistas) tienen tendencia a decir que $\mathcal{T}'$ es más fuerte que $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, mientras que otros (particularmente topólogos) tienden a decir que $\mathcal{T}'$ es más débil que $\mathcal{T}$ en la misma situación. Si encuentra los términos "topología fuerte" o "topología débil" en algún libro, tendrá que decidir, a partir del contexto, a qué inclusión se refiere. No utilizaremos estos términos en este libro.

§13 Base de una topología

Para cada uno de los ejemplos de la sección anterior, podemos especificar la topología mediante la descripción de la colección completa $\mathcal{T}$ de conjuntos abiertos. Generalmente, esto es bastante complicado. En la mayoría de los casos, se especifica una colección más pequeña de subconjuntos de X que es capaz de definir dicha topología.

Definición. Si X es un conjunto, una ***base*** para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados ***elementos básicos***) tales que:

(1) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.

(2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, se define la ***topología*** $\mathcal{T}$ ***generada por*** $\mathcal{B}$ como sigue: un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (esto es, un elemento de $\mathcal{T}$), si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$. Nótese que cada elemento básico es así mismo un elemento de $\mathcal{T}$.

Comprobaremos brevemente que la colección $\mathcal{T}$ es, efectivamente, una topología sobre X. Pero primero consideraremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Entonces $\mathcal{B}$ satisface ambas condiciones para una base. La segunda condición se ilustra en la Figura 13.1. En la topología generada por $\mathcal{B}$, un subconjunto U del plano es abierto si cada x en U está dentro de alguna región circular contenida en U.

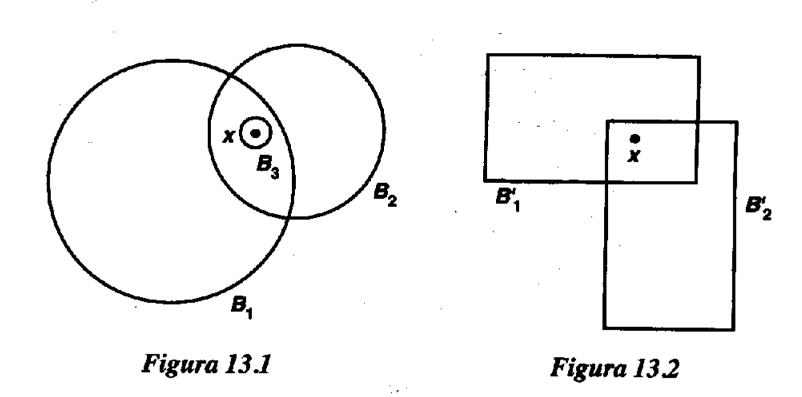


Figura 13.1 *Figura 13.2*

EJEMPLO 2. Sea $\mathcal{B}'$ la colección de todas las regiones rectangulares (interiores de rectángulos) en el plano, donde los rectángulos tienen lados paralelos a los ejes de coordenadas. Entonces $\mathcal{B}'$ satisface ambas condiciones para una base. La segunda condición se ilustra en la Figura 13.2; en este caso, la condición es trivial, porque la intersección de cualesquiera dos elementos básicos es un elemento básico (o es vacía). Como veremos después, la base $\mathcal{B}'$ genera la misma topología sobre el plano que la base $\mathcal{B}$ dada en el ejemplo anterior.

EJEMPLO 3. Si X es cualquier conjunto, la colección de todos los subconjuntos unipuntuales de X es una base para la topología discreta sobre X.

Comprobemos ahora que la colección $\mathcal{T}$ generada por la base $\mathcal{B}$ es, de hecho, una topología sobre X. Si U es el conjunto vacío, satisface la condición de ser abierto trivialmente. De la misma forma, X está en $\mathcal{T}$, puesto que para cada $x \in X$ existe algún elemento básico B que contiene a x y que está contenido a su vez en X. Tomemos una familia indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de elementos de $\mathcal{T}$ y probemos que

$$U = \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$$

pertenece a $\mathcal{T}$. Dado $x \in U$, existe un índice α tal que $x \in U_\alpha$. Puesto que U_α es abierto, existe un elemento básico B tal que $x \in B \subset U_\alpha$. Entonces $x \in B$ y $B \subset U$, por lo que U es abierto, por definición.

Tomemos ahora *dos* elementos U_1 y U_2 de $\mathcal{T}$ y probemos que $U_1 \cap U_2$ pertenece a $\mathcal{T}$. Dado $x \in U_1 \cap U_2$, elegimos un elemento básico B_1 que contenga a x tal

que $B_1 \subset U_1$; elijamos también un elemento básico B_2 que contenga a x tal que $B_2 \subset U_2$. La segunda condición para una base nos permite elegir un elemento básico B_3 que contiene a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (véase la Figura 13.3). Por tanto, $x \in B_3$ y $B_3 \subset U_1 \cap U_2$, por lo que $U_1 \cap U_2$ pertenece a $\mathcal{T}$, por definición.

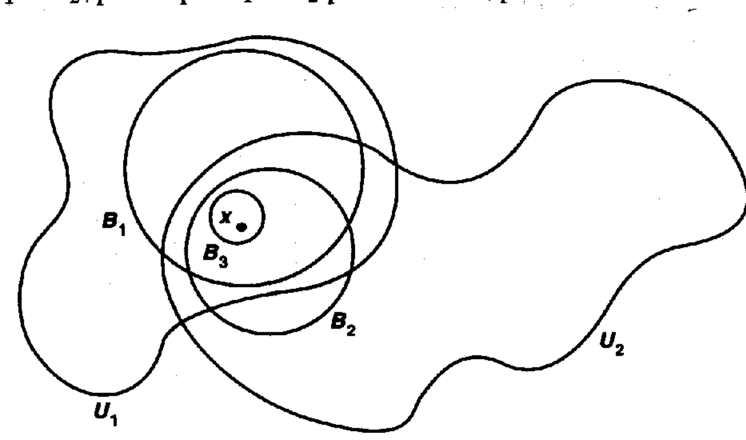


Figura 13.3

Finalmente, mostramos por inducción que cualquier intersección finita $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Este hecho es trivial para $n = 1$; supongamos que es cierto para $n-1$ y probémoslo para n. Tenemos

$$(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = (U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}) \cap U_n.$$

Por hipótesis, $U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ pertenece a $\mathcal{T}$; utilizando el resultado que acabamos de probar, la intersección de $U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ y U_n también pertenece a $\mathcal{T}$. Así hemos comprobado que la colección de conjuntos abiertos generados por una base $\mathcal{B}$ es, en efecto, una topología.

Otro modo para describir la topología generada por una base es la dada por el siguiente lema:

Lema 13.1. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre X. Entonces $\mathcal{T}$ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Dada una colección de elementos de $\mathcal{B}$, también son elementos de $\mathcal{T}$. Puesto que $\mathcal{T}$ es una topología, la unión de ellos pertenece a $\mathcal{T}$. Recíprocamente, dado $U \in \mathcal{T}$, elijamos para cada $x \in U$ un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, por lo que U es igual a la unión de elementos de $\mathcal{B}$. ∎

Este lema establece que cada conjunto abierto U en X se puede expresar como una unión de elementos básicos. Esta expresión para U no es, sin embargo, única.

Así, el uso del término "base" en topología difiere enormemente de su uso en álgebra lineal, donde la ecuación que expresa un vector dado como combinación lineal de los vectores de la base *es* única.

Hemos descrito de dos formas distintas cómo llegar, a partir de una base, a la topología que genera. Algunas veces necesitamos ir en la dirección contraria, desde una topología hasta una base que la genera. Aquí damos un método para obtener una base para una topología dada; lo usaremos frecuentemente.

Lema 13.2. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos abiertos de X tal que, para cada conjunto abierto U de X y cada x en U, existe un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Entonces $\mathcal{C}$ es una base para la topología de X.*

Demostración. Debemos probar que $\mathcal{C}$ es una base. La primera condición para una base es fácil: dado $x \in X$, puesto que X es un conjunto abierto, existe, por hipótesis, un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset X$. Para comprobar la segunda condición, sea x un elemento de $C_1 \cap C_2$, donde C_1 y C_2 son elementos de $\mathcal{C}$. Puesto que C_1 y C_2 son abiertos, también lo es $C_1 \cap C_2$. Luego existe, por hipótesis, un elemento C_3 en $\mathcal{C}$ tal que $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Sea $\mathcal{T}$ la colección de conjuntos abiertos de X; debemos probar que la topología $\mathcal{T}'$ generada por $\mathcal{C}$ coincide con la topología $\mathcal{T}$. En primer lugar, nótese que si U pertenece a $\mathcal{T}$ y si $x \in U$, entonces existe, por hipótesis, un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Se sigue que U pertenece a la topología $\mathcal{T}'$, por definición. Recíprocamente, si W pertenece a la topología $\mathcal{T}'$, entonces W es igual a una unión de elementos de $\mathcal{C}$, por el lema anterior. Ya que cada elemento de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es una topología, W también pertenece a $\mathcal{T}$. ■

Cuando se dan topologías a partir de las bases, es útil tener un criterio en términos de las bases para determinar si una topología es más fina que otra. Un criterio semejante es el siguiente:

Lema 13.3. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre X. Entonces son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$.*

(2) *Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x, existe un elemento básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset \mathcal{B}$.*

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1). Dado un elemento U de $\mathcal{T}$, queremos probar que $U \in \mathcal{T}'$. Sea $x \in U$. Puesto que $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{T}$, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. La condición (2) nos dice que existe un elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Entonces $x \in B' \subset U$, por lo que $U \in \mathcal{T}'$, por definición.

(1) $\Rightarrow$ (2). Tenemos $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$, con $x \in B$. Ahora bien, B pertenece a $\mathcal{T}$ por definición, y $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ por la condición (1), luego $B \in \mathcal{T}'$. Puesto que $\mathcal{T}'$ está generada por $\mathcal{B}'$, existe un elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. ■

Algunos estudiantes encuentran esta condición difícil de recordar. "¿En qué sentido *va* la inclusión?", preguntan. Puede ser más fácil de recordar si se tiene presente la analogía entre un espacio topológico y un camión lleno de gravilla. Piense en las pequeñas piedras como los elementos básicos de la topología; después de que se reduzcan hasta polvo, las partículas de polvo son los elementos básicos de la nueva topología. La nueva topología es más fina que la anterior, y cada partícula de polvo estaba contenida en una piedra, como expone el criterio.

EJEMPLO 4. Ahora se puede ver que la colección $\mathcal{B}$ de todas las regiones circulares en el plano va a generar la misma topología que la colección $\mathcal{B}'$ de todas las regiones rectangulares; la Figura 13.4 ilustra la demostración. Trataremos este ejemplo de una manera más formal cuando estudiemos espacios métricos.

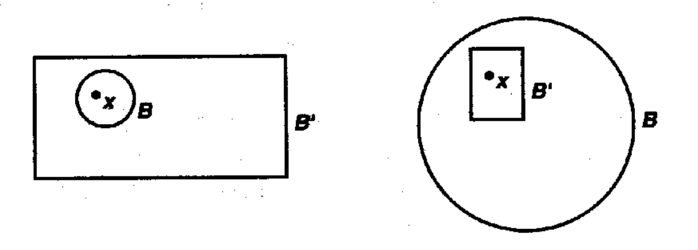


Figura 13.4

Definimos, a continuación, tres topologías sobre la recta real $\mathbb{R}$, todas ellas interesantes.

Definición. Si $\mathcal{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

la topología generada por $\mathcal{B}$ se denomina ***topología usual*** sobre la recta real. Siempre que estudiemos $\mathbb{R}$ supondremos que viene con esta topología, a menos que digamos lo contrario. Si $\mathcal{B}'$ es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

donde $a < b$, la topología generada por $\mathcal{B}'$ se llama ***topología del límite inferior*** sobre $\mathbb{R}$. Cuando $\mathbb{R}$ esté dotada de la topología del límite inferior, lo denotaremos por $\mathbb{R}_\ell$. Finalmente, sea K el conjunto de todos los números de la forma $1/n$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, y sea $\mathcal{B}''$ la colección de todos los intervalos abiertos (a, b), junto con todos

los conjuntos de la forma $(a, b) - K$. La topología generada por $\mathcal{B}''$ se llamará la ***K*-topología** sobre $\mathbb{R}$. Cuando $\mathbb{R}$ esté dotada de esta topología, lo denotaremos como $\mathbb{R}_K$.

Es fácil ver que esas tres colecciones son bases; en cada caso, la intersección de dos elementos básicos es bien otro elemento básico, bien vacía. La relación entre estas topologías es la siguiente:

Lema 13.4. *Las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ son estrictamente más finas que la topología usual sobre $\mathbb{R}$, pero no son comparables entre sí.*

Demostración. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}''$ las topologías de $\mathbb{R}, \mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$, respectivamente. Dado un elemento (a, b) básico para $\mathcal{T}$ y un punto x de (a, b), el elemento $[x, b)$ básico para $\mathcal{T}'$ contiene a x y está en (a, b). Por otro lado, dado un nuevo elemento $[x, d)$ básico para $\mathcal{T}'$, no existe intervalo abierto alguno (a, b) que contenga a x y esté dentro de $[x, d)$. Así $\mathcal{T}'$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}$.

Un argumento similar es aplicable a $\mathbb{R}_K$. Dado un elemento básico (a, b) para $\mathcal{T}$ y un punto x de (a, b), este mismo intervalo es un elemento básico para $\mathcal{T}'$ que contiene a x. Recíprocamente, dado el elemento $B = (-1, 1) - K$ básico para $\mathcal{T}''$ y el punto 0 de B, no existe intervalo abierto alguno que contenga a 0 y esté dentro de B.

Queda para el lector probar que las topologías $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

■

En este punto puede surgir una pregunta. Puesto que la topología generada por una base $\mathcal{B}$ puede ser descrita como la colección de uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$, ¿qué ocurre si comenzamos con una colección dada de conjuntos y tomamos intersecciones finitas de ellos además de uniones arbitrarias? Esta cuestión nos lleva a la noción de subbase para una topología.

Definición. Una ***subbase*** $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La ***topología generada por la subbase*** $\mathcal{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Debemos comprobar, por supuesto, que $\mathcal{T}$ es una topología. Para este propósito será suficiente mostrar que la colección $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base, y consiguientemente, la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$ será una topología, por el Lema 13.1. Dado $x \in X$, pertenece a un elemento de $\mathcal{S}$, y de aquí a un elemento de $\mathcal{B}$; esta es la primera condición para una base. Para comprobar la segunda condición, sean

$$B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \qquad \text{y} \qquad B_2 = S_1' \cap \cdots \cap S_n'$$

dos elementos de $\mathcal{B}$. Su intersección

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \cdots \cap S_m) \cap (S'_1 \cap \cdots \cap S'_n)$$

es también una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, por lo que pertenece a $\mathcal{B}$.

Ejercicios

1. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Supongamos que para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U que contiene a x tal que $U \subset A$. Pruebe que A es abierto en X.

2. Considere las nueve topologías sobre el conjunto $X = \{a, b, c\}$ indicadas en el Ejemplo 1 de §12. Compárelas, es decir, para cada par de topologías, determine si son comparables, y si lo son, cuál es la más fina.

3. Pruebe que la colección $\mathcal{T}_c$ dada en el Ejemplo 4 de §12 es una topología sobre el conjunto X. ¿Es la colección

$$\mathcal{T}_\infty = \{U \mid X - U \text{ es infinita o vacía o todo } X\}$$

una topología sobre X?

4. (a) Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una familia de topologías sobre X, pruebe que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X. ¿Es $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ una topología sobre X?

(b) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre X. Pruebe que existe una única topología sobre X más pequeña entre todas las que contienen a todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$, y una única topología más grande entre todas las que están contenidas en toda $\mathcal{T}_\alpha$.

(c) Si $X = \{a, b, c\}$, sean

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Encuentre la topología más pequeña que contenga a $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, y la topología más grande contenida en $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$.

5. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología generada por $\mathcal{A}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{A}$. Pruebe lo mismo si $\mathcal{A}$ es una subbase.

6. Pruebe que las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

7. Considere las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:

$\mathcal{T}_1 =$ la topología usual,

$\mathcal{T}_2 =$ la topología de $\mathbb{R}_K$,

$\mathcal{T}_3 =$ la topología de los complementos finitos,

$\mathcal{T}_4 =$ la topología del límite superior, con todos los conjuntos $(a, b]$ como base,

$\mathcal{T}_5 =$ la topología con todos los conjuntos $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$ como base.

Determine las posibles relaciones de inclusión entre estas topologías.

8. (a) Aplique el Lema 13.2 para ver que la colección numerable

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b,\ a \text{ y } b \text{ racionales}\}$$

es una base que genera la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

(b) Demuestre que la colección

$$\mathcal{C} = \{[a, b) \mid a < b,\ a \text{ y } b \text{ racionales}\}$$

es una base que genera una topología distinta de la topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$.

§14 La topología del orden

Si X es un conjunto simplemente ordenado, existe una topología obvia para X, definida usando la relación de orden. Se llama *topología del orden*; en esta sección la analizaremos y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Supongamos que X es un conjunto con una relación de orden simple $<$. Dados dos elementos a y b, hay cuatro subconjuntos de X que se llaman ***intervalos*** determinados por a y b. Son los siguientes:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \mid a < x < b\},\\
(a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\},\\
[a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\},\\
[a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\}.
\end{aligned}$$

La notación usada aquí ya es familiar cuando X es la recta real, pero estos son intervalos en un conjunto ordenado cualquiera. Un conjunto del primer tipo se denomina ***intervalo abierto*** en X, un conjunto del último tipo se denomina ***intervalo cerrado*** en X, y conjuntos del segundo y tercer tipos se denominan ***intervalos semiabiertos***. El uso del término "abierto" en esta relación sugiere que los intervalos

abiertos en X deberían convertirse en conjuntos abiertos cuando introduzcamos una topología sobre X. Y así serán.

Definición. Sea X un conjunto, con más de un elemento, con una relación de orden simple. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos de los siguientes tipos:

(1) Todos los intervalos abiertos (a, b) en X.

(2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el mínimo (si lo hay) de X.

(3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, donde b_0 es el máximo (si lo hay) de X.

La colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, que se llama ***topología del orden***.

Si X no tiene elemento mínimo, no existen conjuntos de tipo (2), y si X no tiene elemento máximo, no existen conjuntos de tipo (3).

Hay que comprobar que $\mathcal{B}$ satisface los requisitos para una base. En primer lugar, nótese que cada elemento x de X está dentro de, al menos, un elemento de $\mathcal{B}$: el elemento mínimo (de haberlo) pertenece a todos los conjuntos de tipo (2), el elemento máximo (si lo hay) pertenece a todos los conjuntos de tipo (3), y cada uno de los otros elementos pertenece a un conjunto de tipo (1). En segundo lugar, la intersección de cualesquiera dos conjuntos de los tipos anteriores es, de nuevo, un conjunto de uno de estos tipos o es vacío. Varios casos deben ser comprobados, tarea que se deja para el lector.

EJEMPLO 1. La topología usual sobre $\mathbb{R}$, como se definió en la sección anterior, es efectivamente la topología del orden derivada del orden usual en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2. Consideremos el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden del diccionario; denotaremos a los elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en general, por $x \times y$, para evitar problemas con la notación. El conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no tiene ni elemento máximo, ni mínimo, por lo que la topología del orden sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene como base la colección de todos los intervalos abiertos de la forma $(a \times b, c \times d)$ para $a < c$, y para $a = c$ y $b < d$. Estos dos tipos de intervalos se indican en la Figura 14.1. La subcolección formada únicamente por intervalos del segundo tipo es también una base para la topología del orden sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, como se puede comprobar.

EJEMPLO 3. Los enteros positivos $\mathbb{Z}_+$ forman un conjunto ordenado con un elemento mínimo. La topología del orden sobre $\mathbb{Z}_+$ es la topología discreta, en la que cada conjunto unipuntual es abierto: si $n > 1$, entonces el conjunto unipuntual $\{n\} = (n-1, n+1)$ es un elemento básico y si $n = 1$, el conjunto unipuntual $\{1\} = [1, 2)$ es un elemento básico.

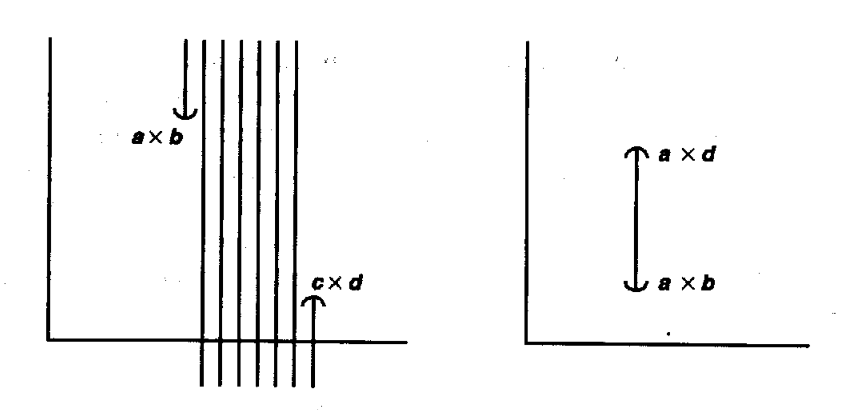


Figura 14.1

EJEMPLO 4. El conjunto $X = \{1,2\} \times \mathbb{Z}_+$ con el orden del diccionario es otro ejemplo de un conjunto ordenado con un elemento mínimo. Denotando $1 \times n$ por a_n y $2 \times n$ por b_n, podemos representar X mediante

$$a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$$

La topología del orden sobre X *no* es la topología discreta. La mayoría de conjuntos unipuntuales son abiertos, pero existe una excepción —el conjunto unipuntual $\{b_1\}$. Cualquier conjunto abierto que contenga a b_1 debe contener un elemento básico alrededor de b_1 (por definición), y cualquier elemento básico conteniendo a b_1 contiene puntos de la sucesión a_i.

Definición. Si X es un conjunto ordenado y a es un elemento de X, existen cuatro subconjuntos de X que se llaman ***rayos*** determinados por a. Son los siguientes:

$$\begin{aligned}(a,+\infty) &= \{x \mid x > a\},\\ (-\infty,a) &= \{x \mid x < a\},\\ [a,+\infty) &= \{x \mid x \geq a\},\\ (-\infty,a] &= \{x \mid x \leq a\}.\end{aligned}$$

Los conjuntos de los dos primeros tipos se denominan ***rayos abiertos*** y los conjuntos de los dos últimos tipos se denominan ***rayos cerrados***.

El uso del término "abierto" sugiere que los rayos abiertos en X sean conjuntos abiertos en la topología del orden. Y así son. Considere, por ejemplo, el rayo $(a,+\infty)$. Si X tiene un elemento máximo b_0, entonces $(a,+\infty)$ es igual al elemento básico $(a,b_0]$. Si X no tiene elemento máximo, entonces $(a,+\infty)$ es igual a la unión de todos los elementos básicos de la forma (a,x), para $x > a$. En otro caso, $(a,+\infty)$ es abierto. Un argumento similar es aplicable al rayo $(-\infty,a)$.

Los rayos abiertos, de hecho, forman una subbase para la topología del orden sobre X, como mostramos ahora. Puesto que los rayos abiertos son abiertos en la topología del orden, la topología que generan está contenida en la topología del orden. Por otro lado, cada elemento básico para la topología del orden es igual a una intersección finita de rayos abiertos; el intervalo (a, b) es igual a la intersección de $(-\infty, b)$ y $(a, +\infty)$, mientras que $[a_0, b)$ y $(a, b_0]$, si existen, son ambos rayos abiertos. De aquí, la topología generada por los rayos abiertos contiene a la topología del orden.

§15 La topología producto sobre $X \times Y$

Si X e Y son espacios topológicos, existe un método natural de definir una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$. Analizaremos esta topología a continuación, y también estudiaremos algunas de sus propiedades.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos. La ***topología producto*** sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.

Vamos a comprobar que $\mathcal{B}$ es una base. La primera condición es trivial, puesto que $X \times Y$ es ya un elemento básico. La segunda condición es casi igual de obvia, ya que la intersección de cualesquiera dos elementos básicos $U_1 \times V_1$ y $U_2 \times V_2$ es otro elemento básico. Tenemos

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

y el último conjunto es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos en X e Y, respectivamente (véase la Figura 15.1).

Obsérvese que la colección $\mathcal{B}$ no es una topología sobre $X \times Y$. La unión de los dos rectángulos dibujados en la Figura 15.1, por ejemplo, no es un producto de dos conjuntos, por lo que no puede pertenecer a $\mathcal{B}$; sin embargo, es abierto en $X \times Y$.

Cada vez que introduzcamos un nuevo concepto intentaremos relacionarlo con las nociones previamente vistas. En el caso actual, preguntamos: ¿qué se puede decir si las topologías sobre X e Y están dadas mediante bases? La respuesta es la que sigue:

Teorema 15.1. *Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y $\mathcal{C}$ es una base para la topología de Y, entonces la colección*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$$

es una base para la topología sobre $X \times Y$.

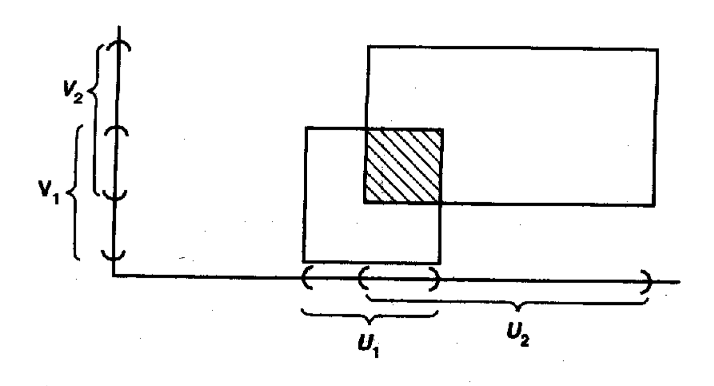


Figura 15.1

Demostración. Utilizamos el Lema 13.2. Dado un conjunto abierto W de $X \times Y$ y un punto $x \times y$ de W, por definición de la topología producto existe un elemento $U \times V$ básico tal que $x \times y \in U \times V \subset W$. Puesto que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases para X e Y, respectivamente, podemos elegir un elemento B de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$, y un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $y \in C \subset V$. Por tanto, $x \times y \in B \times C \subset W$. Así la colección $\mathcal{D}$ cumple el criterio del Lema 13.2, por lo que $\mathcal{D}$ es una base para $X \times Y$. ■

EJEMPLO 1. La topología del orden es la topología usual de $\mathbb{R}$. El producto de esta topología consigo misma se denomina ***topología usual*** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Tiene como base la colección de todos los productos de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, pero el teorema que acabamos de probar nos dice que la colección mucho más pequeña de todos los productos $(a, b) \times (c, d)$ de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ también sirve como base para la topología de $\mathbb{R}^2$. Cada conjunto de este tipo se puede dibujar como el interior de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$. Así la topología usual de $\mathbb{R}^2$ es justo la que consideramos en el Ejemplo 2 de §13.

Algunas veces es útil expresar la topología producto en términos de una subbase. Para hacer esto, primero definimos ciertas funciones llamadas proyecciones.

Definición. Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por

$$\pi_1(x, y) = x$$

y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_2(x, y) = y.$$

Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan ***proyecciones*** de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.

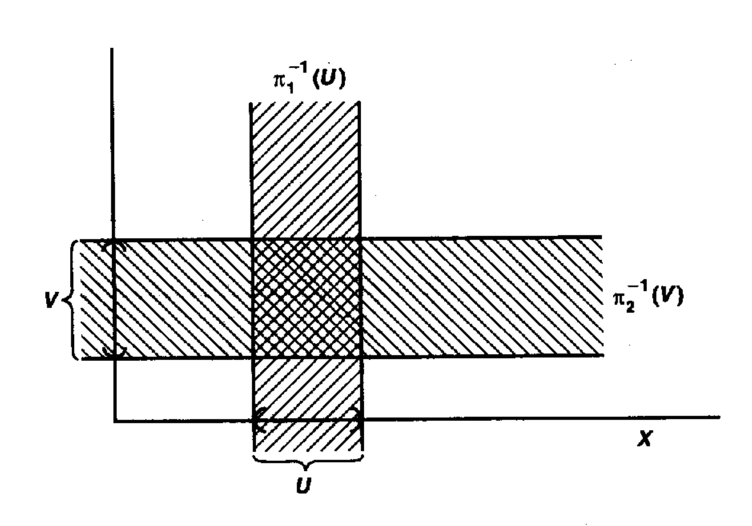


Figura 15.2

Usamos la palabra "sobre" porque π_1 y π_2 son sobreyectivas (a menos que uno de los espacios X o Y sea vacío, en cuyo caso $X \times Y$ sería vacío y, por tanto, no tendría sentido hablar de ello).

Si U es un subconjunto abierto de X, el conjunto $\pi_1^{-1}(U)$ es, precisamente, el conjunto $U \times Y$, que es abierto en $X \times Y$. De modo similar, si V es abierto en Y, ocurre que

$$\pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

que también es abierto en $X \times Y$. La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto $U \times V$, como se indica en la Figura 15.2. Este hecho nos lleva a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 15.2. *La colección*

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ es abierto en } Y\}$$

es una subbase para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Sean $\mathcal{T}$ la topología producto sobre $X \times Y$ y $\mathcal{T}'$ la topología generada por $\mathcal{S}$. Puesto que cada elemento de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{T}$, también pertenecen las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Así $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Por otro lado, cada elemento básico $U \times V$ para la topología $\mathcal{T}$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, puesto que

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

Por lo tanto, $U \times V$ pertenece a $\mathcal{T}'$, y así $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. ■

§16 La topología de subespacio

Definición. Sea X un espacio topológico con topología $\mathcal{T}$. Si Y es un subconjunto de X, la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre Y, denominada ***topología de subespacio*** o ***topología relativa***. Con esta topología, Y se denomina ***subespacio*** de X; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Es fácil ver que $\mathcal{T}_Y$ es una topología. Contiene a $\varnothing$ e Y, porque

$$\varnothing = Y \cap \varnothing \qquad \text{e} \qquad Y = Y \cap X$$

donde $\varnothing$ y X son elementos de $\mathcal{T}$. El hecho de que seà cerrado para intersecciones finitas y uniones arbitrarias se deduce de las ecuaciones

$$\begin{aligned} (U_1 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) &= (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y, \\ \bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) &= (\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y. \end{aligned}$$

Lema 16.1. *Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X, entonces la colección*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y.

Demostración. Dados un abierto U en X y un punto $y \in U \cap Y$, podemos elegir un elemento B en $\mathcal{B}$ tal que $y \in B \subset U$. Entonces $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. Se sigue del Lema 13.2 que $\mathcal{B}_Y$ es una base para la topología de subespacio sobre Y. ∎

Cuando trabajamos con un espacio X y un subespacio Y, se necesita ser cuidadoso al utilizar el término "conjunto abierto". ¿Estamos hablando de un elemento de la topología de Y o de un elemento de la topología de X? Daremos la siguiente definición: si Y es un subespacio de X, diremos que un conjunto U es ***abierto en Y*** (o abierto *relativo a* Y) si pertenece a la topología de Y; esto implica, en particular, que es un subconjunto de Y. Diremos que U es ***abierto en X*** si pertenece a la topología de X.

Se puede dar el caso especial en el que cada conjunto abierto en Y también es abierto en X:

Lema 16.2. *Sea Y un subespacio de X. Si U es abierto en Y e Y es abierto en X, entonces U es abierto en X.*

Demostración. Puesto que U es abierto en Y, $U = Y \cap V$ para algún conjunto V abierto en X. Como Y y V son ambos abiertos en X, también lo es $Y \cap V$. ■

Ahora estudiaremos la relación entre la topología de subespacio y las topologías del orden y producto. Para las topologías producto el resultado es el que uno puede esperar; no así para las topologías del orden.

Teorema 16.3. *Si A es un subespacio de X y B es un subespacio de Y, entonces la topología producto sobre $A \times B$ coincide con la topología que $A \times B$ hereda como subespacio de $X \times Y$.*

Demostración. El conjunto $U \times V$ es el elemento básico genérico de $X \times Y$, donde U es abierto en X y V es abierto en Y. Por tanto, $(U \times V) \cap (A \times B)$ es el elemento básico genérico para la topología de subespacio sobre $A \times B$. Ahora bien,

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

Puesto que $U \cap A$ y $V \cap B$ es la forma general para los conjuntos abiertos para las topologías de subespacio sobre A y B, respectivamente, el conjunto $(U \cap A) \times (V \cap B)$ es el elemento básico genérico para la topología producto sobre $A \times B$.

La conclusión que obtenemos es que las bases para la topología de subespacio sobre $A \times B$ y para la topología producto sobre $A \times B$ son idénticas. De aquí que las topologías sean la misma. ■

Ahora sea X un conjunto ordenado con la topología del orden, y sea Y un subconjunto de X. La relación de orden sobre X, cuando se restringe a Y, convierte a Y en un conjunto ordenado. Sin embargo, *la topología del orden resultante sobre Y no necesita ser la misma que la topología que Y hereda como subespacio de X*. Damos un ejemplo donde las topologías del orden y de subespacio sobre Y coinciden y dos ejemplos donde ocurre lo contrario.

EJEMPLO 1. Consideremos el subconjunto $Y = [0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$, en la topología *de subespacio*. La topología de subespacio tiene como base todos los conjuntos de la forma $(a, b) \cap Y$, donde (a, b) es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Tal conjunto es de uno de los siguientes tipos:

$$(a,b) \cap Y = \begin{cases} (a,b) & \text{si } a \text{ y } b \text{ están en } Y \\ [0,b) & \text{si solamente } b \text{ está en } Y \\ (a,1] & \text{si solamente } a \text{ está en } Y \\ Y \text{ ó } \varnothing & \text{si ni } a \text{ ni } b \text{ están en } Y. \end{cases}$$

Por definición, cada uno de estos conjuntos es abierto en Y. Pero los conjuntos del segundo y tercer tipos no son abiertos en el espacio más grande $\mathbb{R}$.

Nótese que esos conjuntos forman una base para la topología *del orden* sobre Y. Así, vemos que en el caso del conjunto $Y = [0,1]$, su topología de subespacio (como subespacio de $\mathbb{R}$) y su topología del orden son la misma.

EJEMPLO 2. Sea Y el subconjunto $[0,1) \cup \{2\}$ de $\mathbb{R}$. En la topología de subespacio sobre Y, el conjunto unipuntual $\{2\}$ es abierto, porque es la intersección del conjunto abierto $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ con Y. Pero en la topología del orden sobre Y, el conjunto $\{2\}$ no es abierto. Cualquier elemento básico para la topología del orden sobre Y que contenga a 2 es de la forma

$$\{x \mid x \in Y \text{ y } a < x \leq 2\}$$

para algún $a \in Y$; un conjunto tal, necesariamente contiene puntos de Y menores que 2.

EJEMPLO 3. Sea $I = [0,1]$. El orden del diccionario sobre $I \times I$ es justo la restricción a $I \times I$ de la topología del orden sobre el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sin embargo, la topología del orden del diccionario sobre $I \times I$ no es la misma que la topología de subespacio sobre $I \times I$ obtenida de la topología del orden del diccionario sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por ejemplo, el conjunto $\{1/2\} \times (1/2, 1]$ es abierto en $I \times I$ en la topología de subespacio, pero no en la topología del orden, como se puede comprobar (véase la Figura 16.1).

El conjunto $I \times I$ en la topología del orden del diccionario se denominará ***cuadrado ordenado***, y lo denotaremos mediante I_0^2.

La anomalía ilustrada en los Ejemplos 2 y 3 no ocurre para intervalos de rayos en un conjunto ordenado X. Esto es lo que probamos a continuación.

Dado un conjunto ordenado X, diremos que un subconjunto Y de X es ***convexo*** en X si para cada par de puntos $a < b$ de Y, el intervalo completo (a, b) de puntos de X pertenece a Y. Nótese que los intervalos y rayos en X son convexos en X.

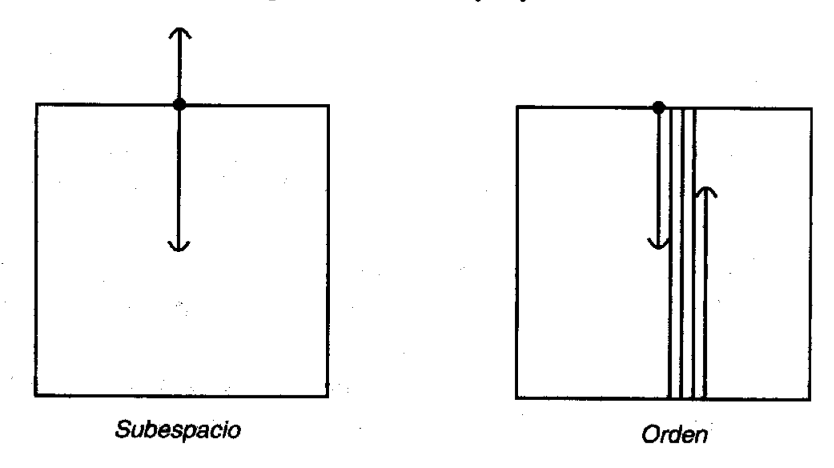


Figura 16.1

Teorema 16.4. *Sean X un conjunto ordenado en la topología del orden e Y un subconjunto de X que es convexo en X. Entonces la topología del orden sobre Y es la misma que la topología que Y hereda como subespacio de X.*

Demostración. Consideremos el rayo $(a, +\infty)$ en X. ¿Cuál es su intersección con Y? Si $a \in Y$, entonces

$$(a, +\infty) \cap Y = \{x \mid x \in Y \text{ y } x > a\}$$

que es un rayo abierto del conjunto ordenado Y. Si $a \notin Y$, entonces a es bien un límite inferior de Y, bien un límite superior de Y, puesto que Y es convexo. En el primer caso, el conjunto $(a, +\infty) \cap Y$ es igual a todo Y; en el último caso, es vacío.

Un razonamiento similar demuestra que la intersección del rayo $(-\infty, a)$ con el conjunto Y es bien un rayo abierto de Y, bien el propio Y, o bien vacío. Además, puesto que los conjuntos $(a, +\infty) \cap Y$ y $(-\infty, a) \cap Y$ forman una subbase para la topología de subespacio sobre Y, y como cada uno es abierto en la topología del orden, esta última topología contiene a la de subespacio.

Para probar el recíproco, obsérvese que cualquier rayo abierto de Y es igual a la intersección de un rayo abierto de X con Y, por lo que es abierto en la topología de subespacio sobre Y. Puesto que los rayos abiertos de Y son una subbase para la topología del orden sobre Y, esta topología está contenida en la topología de subespacio. ∎

Para evitar ambigüedad, cuando X sea un conjunto ordenado con la topología del orden e Y sea un subconjunto de X, *supondremos que Y está dotado de la topología de subespacio*, a menos que específicamente digamos lo contrario. Si Y es convexo en X, esta topología es la misma que la topología del orden sobre Y; si no, puede no serlo.

Ejercicios

1. Pruebe que si Y es un subespacio de X y A es un subconjunto de Y, entonces la topología que A hereda como subespacio de Y es la misma que la topología que hereda como subespacio de X.

2. Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son topologías sobre X y $\mathcal{T}'$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}$, ¿qué puede decir sobre las correspondientes topologías de subespacio sobre el subconjunto Y de X?

3. Consideremos el conjunto $Y = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuál de los siguientes conjuntos son abiertos en Y? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid \tfrac{1}{2} < |x| < 1\}, \\ B &= \{x \mid \tfrac{1}{2} < |x| \le 1\}, \\ C &= \{x \mid \tfrac{1}{2} \le |x| < 1\}, \\ D &= \{x \mid \tfrac{1}{2} \le |x| \le 1\}, \\ E &= \{x \mid 0 < |x| < 1 \text{ y } 1/x \notin \mathbb{Z}_+\}. \end{aligned}$$

4. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es una ***aplicación abierta*** si, para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y. Pruebe que $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son aplicaciones abiertas.

5. Denotemos por X y X' a conjuntos de las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente; sean Y e Y' conjuntos de las topologías $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$, respectivamente. Asumimos que estos conjuntos son no vacíos.

   (a) Demuestre que si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ y $\mathcal{U}' \supset \mathcal{U}$, entonces la topología producto sobre $X' \times Y'$ es más fina que la topología producto sobre $X \times Y$.

   (b) ¿Se cumple el recíproco de (a)? Explique su respuesta.

6. Pruebe que la colección numerable

$$\{(a, b) \times (c, d) \mid a < b \text{ y } c < d, \text{ y } a, b, c, d \text{ son racionales}\}$$

   es una base para $\mathbb{R}^2$.

7. Sea X un conjunto ordenado. Si Y es un subconjunto propio de X que es convexo en X, ¿se deduce que Y es un intervalo o un rayo de X?

8. Si L es una recta en el plano, describa la topología que L hereda como subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$. En ambos casos se trata de una topología conocida.

9. Pruebe que la topología del orden del diccionario sobre el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la misma que la topología producto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ denota a $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Compare esta topología con la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$.

10. Sea $I = [0, 1]$. Compare la topología producto sobre $I \times I$, la topología del orden del diccionario sobre $I \times I$, y la topología que $I \times I$ hereda como subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en la topología del orden del diccionario.

§17 Conjuntos cerrados y puntos límite

Ahora que ya hemos visto algunos ejemplos, podemos introducir algunos de los conceptos básicos asociados a espacios topológicos. En esta sección, tratamos las nociones de *conjunto cerrado*, *clausura* de un conjunto, y *punto límite*. Éstas nos llevarán de modo natural a la consideración de un axioma para espacios topológicos llamado el *axioma de Hausdorff*.

Conjuntos cerrados

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es ***cerrado*** si el conjunto $X - A$ es abierto.

EJEMPLO 1. El subconjunto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es cerrado porque su complementario

$$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

es abierto. De modo similar, $[a, +\infty)$ es cerrado, porque su complementario $(-\infty, a)$ es abierto. Estos hechos justifican nuestro uso de los términos "intervalo cerrado" y "rayo cerrado". El subconjunto $[a, b)$ de $\mathbb{R}$, ni es abierto, ni cerrado.

EJEMPLO 2. En el plano $\mathbb{R}^2$, el conjunto

$$\{x \times y \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$

es cerrado, porque su complementario es la unión de los dos conjuntos

$$(-\infty, 0) \times \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$$

siendo cada uno de ellos un producto de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y, por tanto, abierto en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 3. En la topología de los complementos finitos sobre un conjunto X, los conjuntos cerrados son el propio X y todos los subconjuntos finitos de X.

EJEMPLO 4. En la topología discreta sobre el conjunto X, cada conjunto es abierto; se sigue que cada conjunto es también cerrado.

EJEMPLO 5. Consideremos el siguiente subconjunto de la recta real:

$$Y = [0, 1] \cup (2, 3)$$

en la topología de subespacio. En este espacio, el conjunto $[0, 1]$ es abierto, puesto que es la intersección del conjunto abierto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ de $\mathbb{R}$ con Y. De modo similar, $(2, 3)$ es abierto como subconjunto de Y; incluso es abierto como subconjunto de $\mathbb{R}$. Puesto que $[0, 1]$ y $(2, 3)$ son complementos en Y cada uno del otro, concluimos que tanto $[0, 1]$ como $(2, 3)$ son cerrados como subconjuntos de Y.

Estos ejemplos sugieren que una respuesta al enigma matemático: "¿en qué se diferencia un conjunto de una puerta?" debería ser: "una puerta debe estar abierta o cerrada, y no pueden ocurrir las dos cosas, mientras que un conjunto puede ser abierto, o cerrado, o ambos, o ni abierto ni cerrado".

La colección de subconjuntos cerrados de un espacio X tiene similares propiedades a aquellas satisfechas por la colección de subconjuntos abiertos de X:

Teorema 17.1. *Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) *$\varnothing$ y X son cerrados.*

(2) *Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.*

(3) *Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.*

Demostración. (1) $\varnothing$ y X son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos X y $\varnothing$, respectivamente.

(2) Dada una colección de conjuntos cerrados $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, aplicamos la ley de DeMorgan,

$$X - \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J}(X - A_\alpha).$$

Puesto que los conjuntos $X - A_\alpha$ son abiertos por definición, la parte derecha de la ecuación representa una unión arbitraria de conjuntos abiertos, y así, es abierto. Por lo tanto, $\bigcap A_\alpha$ es cerrado.

(3) De manera similar, si A_i es cerrado para $i = 1, \ldots, n$, consideremos la ecuación

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X - A_i).$$

El conjunto de la parte derecha de esta ecuación es una intersección finita de conjuntos abiertos y es, consiguientemente, abierto. De aquí, $\bigcup A_i$ es cerrado. ■

En lugar de usar conjuntos abiertos, se podría especificar perfectamente una topología sobre un espacio dando una colección de conjuntos (llamados "conjuntos cerrados") satisfaciendo las tres propiedades de este teorema. Se podría, en ese caso, definir los conjuntos abiertos como los complementos de conjuntos cerrados y proceder exactamente igual que antes. Este procedimiento no tiene ninguna ventaja particular sobre el que adoptamos, y la mayoría de matemáticos prefieren usar conjuntos abiertos para definir topologías. Ahora bien, cuando tratemos con subespacios, se necesita ser cuidadoso al usar el término "conjunto cerrado". Si Y es un subespacio de X, diremos que un conjunto A es ***cerrado en Y*** si A es un subconjunto de Y y si A es cerrado en la topología de subespacio de Y (esto es, si $Y - A$ es abierto en Y). Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 17.2. *Sea Y un subespacio de X. Entonces un conjunto A es cerrado en Y si, y sólo si, es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y.*

Demostración. Supongamos que $A = C \cap Y$, donde C es cerrado en X (véase la Figura 17.1). Entonces $X - C$ es abierto en X, por lo que $(X - C) \cap Y$ es abierto en Y, por definición de topología de subespacio. Pero $(X - C) \cap Y = Y - A$. De aquí $Y - A$ es abierto en Y, por lo que A es cerrado en Y. Recíprocamente, asumamos que A es cerrado en Y (véase la Figura 17.2). Entonces $Y - A$ es abierto en Y, por lo que por definición es igual a la intersección de un conjunto abierto U de X con Y. El conjunto $X - U$ es cerrado en X, y $A = Y \cap (X - U)$, por lo que A es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y, como se deseaba probar. ■

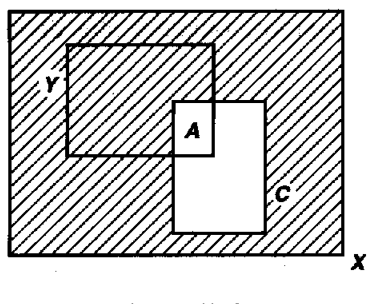


Figura 17.1

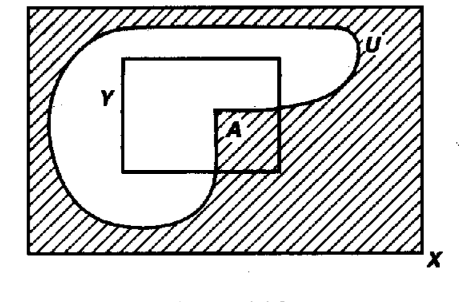


Figura 17.2

Un conjunto A que es cerrado en el subespacio Y puede ser cerrado o no en el espacio más grande X. Como fue el caso con los conjuntos abiertos, existe un criterio para ver si A es cerrado en X, demostración que queda para el lector.

Teorema 17.3. *Sea Y un subespacio de X. Si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.*

Clausura e interior de un conjunto

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, el ***interior*** de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A, y la ***clausura*** de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. El interior de A se denota por $\operatorname{Int} A$ y la clausura de A se denota mediante $\operatorname{Cl} A$ o por $\bar{A}$. Obviamente, $\operatorname{Int} A$ es un conjunto abierto y $\bar{A}$ es un conjunto cerrado, más aún,

$$\operatorname{Int} A \subset A \subset \bar{A}.$$

Si A es abierto, $A = \operatorname{Int} A$, mientras que, si A es cerrado, $A = \bar{A}$.

No haremos demasiado uso del interior de un conjunto, pero la clausura de un conjunto será muy importante.

Cuando se trabaja con un espacio topológico X y un subespacio Y, es necesario tener cuidado al tomar clausuras de conjuntos. Si A es un subconjunto de Y, la clausura de A en Y y la clausura de A en X serán diferentes en general. *En tal situación, reservamos la notación $\bar{A}$ para representar la clausura de A en X.* La clausura de A en Y se puede expresar en términos de $\bar{A}$, como muestra el siguiente teorema:

Teorema 17.4. *Sean Y un subespacio de X y A un subconjunto de Y. Denotemos por $\bar{A}$ la clausura de A en X. Entonces la clausura de A en Y es $\bar{A} \cap Y$.*

Demostración. Denotemos por B la clausura de A en Y. El conjunto $\bar{A}$ es cerrado en X, por lo que $\bar{A} \cap Y$ es cerrado en Y por el Teorema 17.2. Puesto que $\bar{A} \cap Y$

contiene a A, y puesto que por definición B es igual a la intersección de *todos* los subconjuntos cerrados de Y que contienen a A, debe ser $B \subset (\bar{A} \cap Y)$.

Por otra parte, sabemos que B es cerrado en Y. De aquí, por el Teorema 17.2, $B = C \cap Y$ para algún conjunto C cerrado en X. Entonces C es un conjunto cerrado de X que contiene a A; como $\bar{A}$ es la intersección de *todos* los conjuntos cerrados tales, concluimos que $\bar{A} \subset C$. Entonces $(\bar{A} \cap Y) \subset (C \cap Y) = B$. ∎

La definición de la clausura de un conjunto no nos da un método adecuado para encontrar las clausuras de conjuntos específicos, puesto que la colección de todos los conjuntos cerrados en X, como la colección de todos los conjuntos abiertos, es frecuentemente demasiado grande para trabajar con ella. Otro camino para describir la clausura de un conjunto, útil porque sólo implica una base para la topología de X, se da en el siguiente teorema.

Primero introduciremos alguna terminología conveniente. Diremos que un conjunto A ***interseca*** a un conjunto B si la intersección $A \cap B$ no es vacía.

Teorema 17.5. *Sea A un subconjunto del espacio topológico X.*

(a) *Entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada conjunto abierto U que contiene a x interseca a A.*

(b) *Suponiendo que la topología de X está dada por una base, entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada elemento básico B que contiene a x interseca a A.*

Demostración. Consideremos el enunciado de (a). Es un enunciado de la forma $P \Leftrightarrow Q$. Transformemos cada implicación en su opuesta, para así obtener el enunciado lógico equivalente no $P \Leftrightarrow$ no Q. Su desarrollo es el siguiente:

$x \notin \bar{A} \Longleftrightarrow$ existe un conjunto abierto U que contiene a x y que no interseca a A.

De este modo, nuestro teorema es sencillo de probar. Si x no está en $\bar{A}$, el conjunto $U = X - \bar{A}$ es un conjunto abierto que contiene a x y que no interseca a A, como se deseaba. Recíprocamente, si existe un conjunto abierto U que contiene a x y que no interseca a A, entonces $X - U$ es un conjunto cerrado que contiene a A. Por definición de la clausura $\bar{A}$, el conjunto $X - U$ debe contener a $\bar{A}$; sin embargo, x no puede estar en $\bar{A}$.

El enunciado (b) se sigue inmediatamente. Si cada conjunto abierto que contiene a x interseca a A, también lo hace cada elemento básico B que contenga a x, porque B es un conjunto abierto. Recíprocamente, si cada elemento básico que contiene a x interseca a A, también lo hace cada conjunto abierto U que contenga a x, porque U contiene un elemento básico que contiene a x. ∎

Los matemáticos usan a menudo alguna terminología especial en cuanto a esto último. Abrevian la frase "U es un conjunto abierto que contiene a x" con la frase

"U es un ***entorno*** de x".

Usando esta terminología, se puede escribir la primera mitad del teorema anterior del modo siguiente:

> Si A es un subconjunto del espacio topológico X, entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada entorno de x interseca a A.

EJEMPLO 6. Sea X la recta real $\mathbb{R}$. Si $A = (0, 1]$, entonces $\bar{A} = [0, 1]$, ya que cada entorno del 0 interseca a A, mientras que cada punto fuera de $[0, 1]$ tiene un entorno disjunto con A. Argumentos similares se aplican a los siguientes subconjuntos de X:

Si $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, entonces $\bar{B} = \{0\} \cup B$. Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces $\bar{C} = \{0\} \cup [1, 2]$. Si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, entonces $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Si $\mathbb{Z}_+$ es el conjunto de los enteros positivos, entonces $\bar{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+$. Si $\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los reales positivos, entonces la clausura de $\mathbb{R}_+$ es el conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (esta es la razón por la que anteriormente introdujimos en §2 la notación $\bar{\mathbb{R}}_+$ para el conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$).

EJEMPLO 7. Consideremos el subespacio $Y = (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. El conjunto $A = (0, \frac{1}{2})$ es un subconjunto de Y; su clausura en $\mathbb{R}$ es el conjunto $[0, \frac{1}{2}]$, y su clausura en Y es el conjunto $[0, \frac{1}{2}] \cap Y = (0, \frac{1}{2}]$.

Algunos matemáticos utilizan el término "entorno" en un sentido distinto. Dicen que A es un entorno de x si A *contiene* un conjunto abierto que contiene a x. Nosotros no lo consideraremos así.

Puntos límite

Existe otro modo de describir la clausura de un conjunto, que necesita del importante concepto de punto límite, que tratamos a continuación.

Si A es un subconjunto del espacio topológico X y si x es un punto de X, diremos que x es ***punto límite*** (o "punto de acumulación") de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto *distinto del propio* x. Dicho de otro modo, x es un punto límite de A si pertenece a la clausura de $A - \{x\}$. El punto x puede o no pertenecer a A; no importa para esta definición.

EJEMPLO 8. Consideremos la recta real $\mathbb{R}$. Si $A = (0, 1]$, entonces el punto 0 es un punto límite de A y también el punto $1/2$. De hecho, cada punto del intervalo $[0, 1]$ va a ser un punto límite de A, pero ningún otro punto de $\mathbb{R}$ es un punto límite de A.

Si $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, entonces el 0 es el único punto límite de B. Cualquier otro punto x de $\mathbb{R}$ tiene un entorno que, o no llega a intersecar a B, o interseca a B sólo en el propio punto x. Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces los puntos límite de C son los puntos del intervalo $[1, 2]$. Si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, cada punto de $\mathbb{R}$ es un punto límite de $\mathbb{Q}$. Si $\mathbb{Z}_+$ es el conjunto de los enteros positivos, ningún punto de $\mathbb{R}$ es un punto límite de $\mathbb{Z}_+$. Si $\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los reales positivos, entonces cada punto de $\{0\} \cup \mathbb{R}_+$ es un punto límite de $\mathbb{R}_+$.

Si comparamos los Ejemplos 6 y 8, nos damos cuenta de la relación entre la clausura de un conjunto y los puntos límite de un conjunto. Esta relación es la que se da en el siguiente teorema:

Teorema 17.6. *Sean A un subconjunto del espacio topológico X y A' el conjunto de todos los puntos límite de A. Entonces*

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

Demostración. Si x está en A', cada entorno de x interseca a A (en un punto distinto de x). Luego, por el Teorema 17.5, x pertenece a $\bar{A}$. De aquí, $A' \subset \bar{A}$. Puesto que, por definición, $A \subset \bar{A}$, se sigue que $A \cup A' \subset \bar{A}$.

Para demostrar la otra inclusión, supondremos que x es un punto de $\bar{A}$ y probaremos que $x \in A \cup A'$. Si ocurre que x pertenece a A, es trivial que $x \in A \cup A'$; supongamos que x no está en A. Como $x \in \bar{A}$, sabemos que cada entorno U de x interseca a A; al tener que $x \notin A$, el conjunto U debe intersecar a A en un punto distinto de x. Entonces $x \in A'$, por lo que $x \in A \cup A'$, como se deseaba. ∎

Corolario 17.7. *Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos límite.*

Demostración. El conjunto A es cerrado si, y sólo si, $A = \bar{A}$, y esto último se cumple si, y sólo si, $A' \subset A$. ∎

Espacios de Hausdorff

Nuestra experiencia con conjuntos abiertos y cerrados y puntos límite en la recta real y el plano puede llevarnos a cometer un error cuando consideramos espacios topológicos más generales. Por ejemplo, en los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, cada conjunto unipuntual $\{x_0\}$ es cerrado. Este hecho es fácilmente demostrable; cada punto distinto de x_0 tiene un entorno que no interseca a $\{x_0\}$, por lo que $\{x_0\}$ es su propia clausura. Pero este hecho no es cierto para espacios topológicos arbitrarios. Consideremos la topología en el conjunto de tres puntos $\{a, b, c\}$ indicado en la Figura 17.3. En este espacio, el conjunto unipuntual $\{b\}$ no es cerrado, por lo que su complementario *no* es abierto.

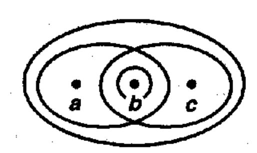


Figura 17.3

De modo similar, nuestra experiencia con las propiedades de sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ nos puede llevar a un error cuando tratamos con espacios topológicos más generales. En un espacio topológico arbitrario, se dice que una sucesión

$x_1, x_2, \ldots$ de puntos del espacio X ***converge*** al punto x de X siempre que, para cada entorno U de x, exista un entero positivo N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. En $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, una sucesión no puede converger a más de un punto, pero sí puede en un espacio arbitrario. En el espacio indicado en la Figura 17.3, por ejemplo, la sucesión definida por $x_n = b$ para todo n converge no sólo al punto b, sino también al punto a y al punto c.

Las topologías en las que los conjuntos unipuntuales no son cerrados, o en las que las sucesiones pueden converger a más de un punto, son consideradas por muchos matemáticos como algo extraño. No son demasiado interesantes, debido a que raras veces se dan en otras ramas de las matemáticas. Y los teoremas que podemos probar sobre espacios topológicos están bastante limitados si se permiten tales ejemplos. Por lo tanto, a menudo se impone una condición adicional que evitará ejemplos como éste, llevando la clase de espacios bajo consideración más cerca de aquellos a los que se aplica nuestra intuición geométrica. La condición fue sugerida por el matemático Félix Hausdorff, por lo que los matemáticos le han dado su nombre.

Definición. Un espacio topológico X se denomina ***espacio de Hausdorff*** si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntos.

Teorema 17.8. *Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff X es cerrado.*

Demostración. Es suficiente probar que cada conjunto unipuntual $\{x_0\}$ es cerrado. Si x es un punto de X distinto de x_0, entonces x y x_0 tienen entornos disjuntos U y V, respectivamente. Puesto que U no interseca a $\{x_0\}$, el punto x no puede pertenecer a la clausura del conjunto $\{x_0\}$. Como consecuencia, la clausura del conjunto $\{x_0\}$ es el propio $\{x_0\}$, por lo que es cerrado. ■

La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados, es de hecho más débil que la condición de Hausdorff. Por ejemplo, la recta real $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos no es un espacio de Hausdorff, pero sí es un espacio en el que los conjuntos con un número finito de puntos son cerrados. La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados tiene su propio nombre: se denomina ***axioma T_1***.

(Explicaremos la razón para esta extraña terminología en el Capítulo 4.) El axioma T_1 aparecerá en este libro en algunos ejercicios y sólo en un teorema, que es el siguiente:

Teorema 17.9. *Sean X un espacio satisfaciendo el axioma T_1 y A un subconjunto de X. Entonces el punto x es un punto límite de A si, y sólo si, cada entorno de x contiene infinitos puntos de A.*

Demostración. Si cada entorno de x interseca a A en infinitos puntos, está claro que interseca a A en algún otro punto distinto de x, por lo que x es un punto límite de A.

Recíprocamente, supongamos que x es un punto límite de A, y supongamos que algún entorno U de x interseca a A en un conjunto finito de puntos. Entonces U también interseca a $A - \{x\}$ en un conjunto finito de puntos; sean $\{x_1, \ldots, x_m\}$ los puntos de $U \cap (A - \{x\})$. El conjunto $X - \{x_1, \ldots, x_m\}$ es un conjunto abierto de X, puesto que el conjunto finito de puntos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es cerrado; entonces

$$U \cap (X - \{x_1, \ldots, x_m\})$$

es un entorno de x que no interseca al conjunto $A - \{x\}$. Esto contradice la hipótesis de que x es un punto límite de A. ■

Una razón para nuestra falta de interés en el axioma T_1 es el hecho de que muchos de los teoremas interesantes en topología no requieren únicamente este axioma, sino la fuerza del axioma de Hausdorff. Es más, la mayoría de los espacios que son importantes para los matemáticos son espacios de Hausdorff. Los dos teoremas siguientes dan algo más de fundamento a estos comentarios.

Teorema 17.10. *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X.*

Demostración. Supongamos que x_n es una sucesión de puntos de X que converge a x. Si $y \neq x$, sean U y V entornos disjuntos de x e y, respectivamente. Puesto que U contiene a x_n para todo n, excepto para un número finito de valores de n, el conjunto V no puede cumplir lo mismo. Por lo tanto, x_n no puede converger a y. ■

Si la sucesión x_n de puntos del espacio de Hausdorff X converge al punto x de X, a menudo escribiremos $x_n \longrightarrow x$, y diremos que x es el ***límite*** de la sucesión x_n.

La prueba del siguiente resultado se deja como ejercicio.

Teorema 17.11. *Cada conjunto simplemente ordenado es un espacio de Hausdorff en la topología del orden. El producto de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

Generalmente se considera que la condición de Hausdorff es una condición extra muy débil para imponer a un espacio topológico. Efectivamente, en un primer curso de topología, algunos matemáticos van tan lejos que imponen esta condición al empezar, rechazando considerar espacios que no sean espacios de Hausdorff. Nosotros no iremos tan lejos, pero admitiremos la condición de Hausdorff siempre que se necesite en una demostración sin reparo de que limite seriamente el rango de aplicaciones de los resultados.

La condición de Hausdorff es una entre un número de condiciones extra que se pueden imponer a un espacio topológico. Cada vez que se impone tal condición, se pueden probar teoremas más fuertes, pero se limita la clase de espacios a los que se aplican dichos teoremas. La mayoría de los estudios que se han hecho en topología desde sus comienzos se han centrado en el problema de encontrar condiciones que sean lo suficientemente fuertes como para permitir que se prueben teoremas interesantes sobre espacios que satisfacen estas condiciones, y a la vez no tan fuertes que limiten notablemente el rango de aplicaciones de los resultados.

Estudiaremos diversas condiciones de este tipo en los dos próximos capítulos. La condición de Hausdorff y el axioma T_1 pertenecen, sin embargo, a una colección de análogas condiciones que se denominan en conjunto *axiomas de separación*. Otras condiciones son los *axiomas de numerabilidad* y diferentes condiciones de *compacidad* y *conexión*. Algunos de éstos son requisitos bastante estrictos, como veremos.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos del conjunto X. Supongamos que $\varnothing$ y X están en $\mathcal{C}$, y que las uniones finitas y las intersecciones arbitrarias de elementos de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{C}$. Pruebe que la colección

$$\mathcal{T} = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$$

es una topología sobre X.

2. Pruebe que si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.

3. Pruebe que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

4. Pruebe que si U es abierto en X y A es cerrado en X, entonces $U - A$ es abierto en X, y $A - U$ es cerrado en X.

5. Sea X un conjunto ordenado en la topología del orden. Muestre que $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$. ¿Bajo qué condiciones se cumple la igualdad?

6. Denotemos por A, B y A_α a subconjuntos del espacio X. Pruebe lo siguiente:

(a) Si $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(c) $\overline{\bigcup A_\alpha} \supset \bigcup \bar{A}_\alpha$; dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

7. Discuta la siguiente "prueba" de que $\overline{\bigcup A_\alpha} \subset \bigcup \bar{A}_\alpha$: si $\{A_\alpha\}$ es una colección de conjuntos en X y si $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$, entonces cada entorno U de x interseca a $\bigcup A_\alpha$. Así, U debe intersecar a algún A_α, por lo que x debe pertenecer a la clausura de algún A_α. Por consiguiente, $x \in \bigcup \bar{A}_\alpha$.

8. Denotemos por A, B y A_α a subconjuntos del espacio X. Determine si las siguientes ecuaciones se cumplen; si una igualdad es falsa, determine si una de las inclusiones $\supset$ o $\subset$ se cumple.

(a) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

(b) $\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \bar{A}_\alpha$.

(c) $\overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}$.

9. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Pruebe que, en el espacio $X \times Y$,

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}.$$

10. Pruebe que cada topología del orden es de Hausdorff.

11. Pruebe que el producto de dos espacios de Hausdorff es de Hausdorff.

12. Pruebe que un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.

13. Pruebe que X es de Hausdorff si, y sólo si, la ***diagonal*** $\Delta = \{x \times x \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

14. En la topología de los complementos finitos sobre $\mathbb{R}$, ¿a qué punto o puntos converge la sucesión $x_n = 1/n$?

15. Pruebe que el axioma T_1 es equivalente a la condición de que para cada par de puntos de X, cada uno posee un entorno que no contiene al otro.

16. Considere las cinco topologías sobre $\mathbb{R}$ dadas en el Ejercicio 7 de §13.

(a) Determine la clausura del conjunto $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ bajo cada una de estas topologías.

(b) ¿Cuáles de estas topologías satisfacen el axioma de Hausdorff? ¿y el axioma T_1?

17. Considere la topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$ y la topología dada por la base $\mathcal{C}$ del Ejercicio 8 de §13. Determine las clausuras de los intervalos $A = (0, \sqrt{2})$ y $B = (\sqrt{2}, 3)$ en estas dos topologías.

18. Determine las clausuras de los siguientes subconjuntos del cuadrado ordenado:

$$\begin{aligned} A &= \{(1/n) \times 0 \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \\ B &= \{(1 - 1/n) \times \tfrac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \\ C &= \{x \times 0 \mid 0 < x < 1\}, \\ D &= \{x \times \tfrac{1}{2} \mid 0 < x < 1\}, \\ E &= \{\tfrac{1}{2} \times y \mid 0 < y < 1\}. \end{aligned}$$

19. Si $A \subset X$, definimos la ***frontera*** de A mediante la ecuación

$$\operatorname{Fr} A = \bar{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

(a) Pruebe que $\operatorname{Int} A$ y $\operatorname{Fr} A$ son disjuntos, y $\bar{A} = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A$.
(b) Pruebe que $\operatorname{Fr} A = \varnothing \Leftrightarrow A$ es, al mismo tiempo, abierto y cerrado.
(c) Pruebe que U es abierto $\Leftrightarrow \operatorname{Fr} U = \bar{U} - U$.
(d) Si U es abierto, ¿es cierto que $U = \operatorname{Int}(\bar{U})$? Justifique su respuesta.

20. Calcule la frontera y el interior de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{x \times y \mid y = 0\}$,
(b) $B = \{x \times y \mid x > 0 \text{ e } y \neq 0\}$,
(c) $C = A \cup B$,
(d) $D = \{x \times y \mid x \text{ es racional}\}$,
(e) $E = \{x \times y \mid 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$,
(f) $F = \{x \times y \mid x \neq 0 \text{ e } y \leq 1/x\}$.

***21.** (Kuratowski). Considere la colección de todos los subconjuntos A del espacio topológico X. Las operaciones de clausura $A \to \bar{A}$ y complementario $A \to X - A$ son funciones que van de esta colección en ella misma.

(a) Pruebe que, comenzando con un conjunto dado A, se pueden formar no más de 14 conjuntos distintos al aplicar estas dos operaciones sucesivamente.
(b) Encuentre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ (con su topología usual) para el que se obtenga el máximo de 14.

§18 Funciones continuas

El concepto de función continua es básico para una gran parte de las matemáticas. Las funciones continuas sobre la recta real se pueden ver en las primeras páginas de cualquier libro de cálculo, y las funciones continuas en el plano y el espacio siguen no mucho más adelante. Clases más generales de funciones continuas surgen a medida que uno profundiza en las matemáticas. En esta sección, formularemos una definición de continuidad que incluirá todas ellas como casos especiales y estudiaremos varias propiedades de funciones continuas. Muchas de estas propiedades son generalizaciones directas de conceptos que se aprendieron sobre funciones continuas en cálculo y análisis.

Continuidad de una función

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es ***continua*** si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

Recuérdese que $f^{-1}(V)$ es el conjunto de todos los puntos x de X para los que $f(x) \in V$; es vacío si V no interseca al conjunto imagen $f(X)$ de f.

La continuidad de una función depende no sólo de la propia función f, sino también de las topologías especificadas para su dominio y recorrido. Si deseamos resaltar este hecho, podemos decir que f es continua *relativa* a las topologías específicas sobre X e Y.

Nótese que si la topología del espacio de llegada Y está dada por una base $\mathcal{B}$, entonces para probar la continuidad de f es suficiente mostrar que la imagen inversa de cada *elemento básico* es abierta: el conjunto abierto arbitrario V de Y se puede escribir como una unión de elementos básicos

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha.$$

Entonces

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$$

por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto si cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto.

Si la topología sobre Y está dada por una subbase $\mathcal{S}$, para probar la continuidad de f será suficiente demostrar que la imagen inversa de cada elemento de la *subbase* es abierta: el elemento básico arbitrario B de Y se puede escribir como una intersección finita $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ de elementos de la subbase; se deduce de la ecuación

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(S_n)$$

que la imagen inversa de cada elemento básico es abierta.

EJEMPLO 1. Consideremos una función como las estudiadas en análisis, una "función de variable real con valores reales",

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

En análisis, se define la continuidad de f mediante la "definición ϵ-δ", algo que desanimaba a todo estudiante de matemáticas. Como se podría esperar, la definición ϵ-δ y la nuestra son equivalentes. Para probar, por ejemplo, que nuestra definición implica la definición ϵ-δ, procedemos como sigue:

Dado x_0 en $\mathbb{R}$, y dado $\epsilon > 0$, el intervalo $V = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ es un conjunto abierto del espacio de llegada $\mathbb{R}$. Por tanto, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en el espacio de salida $\mathbb{R}$. Puesto que $f^{-1}(V)$ contiene al punto x_0, contiene algún elemento básico (a, b) alrededor de x_0. Elegimos δ para que sea el más pequeño de los dos números $x_0 - a$ y $b - x_0$. Entonces, si $|x - x_0| < \delta$, el punto x debe estar en (a, b), por lo que $f(x) \in V$, y $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, como se deseaba.

Probar que la definición ϵ-δ implica nuestra definición no es más difícil, así que se deja para el lector. Volveremos a este ejemplo cuando estudiemos espacios métricos.

EJEMPLO 2. En cálculo, se estudia la propiedad de ser continua para muchos tipos de funciones. Por ejemplo, se estudian funciones de los siguientes tipos:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$		(curvas en el plano)
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$		(curvas en el espacio)
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$		(funciones $f(x,y)$ de dos variables reales)
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$		(funciones $f(x,y,z)$ de tres variables reales)
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$		(campos de vectores $\mathbf{v}(x,y)$ en el plano).

Cada uno de ellos tiene una noción de continuidad definida para él mismo. Nuestra definición general de continuidad incluye todos éstos como casos especiales; este hecho será una consecuencia de teoremas generales que probaremos sobre funciones continuas en espacios producto y en espacios métricos.

EJEMPLO 3. Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales con su topología usual, y denotemos por $\mathbb{R}_\ell$ al mismo conjunto con la topología del límite inferior. Sea

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$$

la función identidad: $f(x) = x$ para cada número real x. Entonces f no es una función continua; la imagen inversa del conjunto abierto $[a, b)$ de $\mathbb{R}_\ell$ es él mismo, que no es abierto en $\mathbb{R}$. Por otro lado, la función identidad

$$g : \mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}$$

es continua, porque la imagen inversa de (a, b) es él mismo, que es abierto en $\mathbb{R}_\ell$.

En análisis se estudian diversas maneras de formular la definición de continuidad, distintas pero equivalentes. Algunas de éstas se generalizan a espacios arbitrarios, y se consideran en los teoremas que siguen. La definición familiar "ϵ-δ" y la "definición de la sucesión convergente" no se generalizan a espacios arbitrarios; se tratarán cuando estudiemos espacios métricos.

Teorema 18.1. Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$. Entonces son *equivalentes:*

(1) *f es continua.*

(2) *Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

(3) *Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

(4) *Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.*

Si se cumple la condición (4) para el punto x de X diremos que f es ***continua en el punto x***.

Demostración. Vamos a probar que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) y que (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que f es continua. Sea A un subconjunto de X. Vamos a mostrar que si $x \in \bar{A}$, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$. Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X que contiene a x; debe intersecar a A en algún punto y. Entonces V interseca a $f(A)$ en el punto $f(y)$, por lo que $f(x) \in \overline{f(A)}$, como se deseaba.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea B un cerrado en Y y sea $A = f^{-1}(B)$. Deseamos probar que A es cerrado en X; demostraremos que $\bar{A} = A$. Por teoría elemental de conjuntos, tenemos que $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$. Por lo tanto, si $x \in \bar{A}$,

$$f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B$$

por lo que $x \in f^{-1}(B) = A$. Así, $\bar{A} \subset A$, por lo que $\bar{A} = A$, como se deseaba.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea V un conjunto abierto de Y. Pongamos $B = Y - V$. Entonces

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V).$$

Ahora B es un conjunto cerrado de Y. Entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en X por hipótesis, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto en X, como se deseaba.

(1) $\Rightarrow$ (4). Sea $x \in X$ y sea V un entorno de $f(x)$. Entonces el conjunto $U = f^{-1}(V)$ es un entorno de x tal que $f(U) \subset V$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea V un conjunto abierto de Y; sea x un punto de $f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$ por lo que, por hipótesis, existe un entorno U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$. Entonces $U_x \subset f^{-1}(V)$. Se sigue que $f^{-1}(V)$ se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_x, por lo que es abierto. ∎

Homeomorfismos

Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa

$$f^{-1} : Y \to X$$

son ambas continuas, entonces f se dice que es un ***homeomorfismo***.

La condición de que f^{-1} sea continua significa que, para cada conjunto abierto U de X, la imagen inversa de U mediante la aplicación $f^{-1} : Y \to X$ es abierta en Y. Sin embargo, la *imagen inversa* de U mediante la aplicación f^{-1} es la misma que la *imagen* de U mediante la aplicación f (véase la Figura 18.1). Por eso, otro modo de definir un homeomorfismo es decir que es una correspondencia biyectiva $f : X \to Y$ tal que $f(U)$ es abierto si, y sólo si, U es abierto.

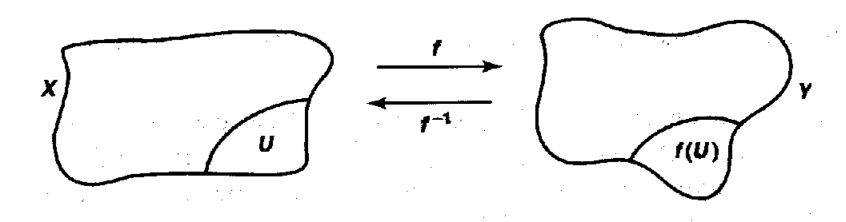


Figura 18.1

Este comentario prueba que un homeomorfismo $f : X \to Y$ proporciona una correspondencia biyectiva, no sólo entre X e Y, sino entre las colecciones de conjuntos abiertos de X y las de Y. Como resultado, cualquier propiedad de X que se exprese completamente en términos de la topología de X (esto es, en términos de los conjuntos abiertos de X) nos da, vía la correspondencia f, la propiedad correspondiente para el espacio Y. Tal propiedad de X se denomina ***propiedad topológica*** de X.

Puede haber estudiado en álgebra moderna la noción de un *isomorfismo* entre objetos algebraicos tales como grupos o anillos. Un isomorfismo es una correspondencia biyectiva que respeta la estructura algebraica implicada. El concepto análogo en topología es el de *homeomorfismo*, que es una correspondencia biyectiva que conserva la estructura topológica implicada.

Ahora supongamos que $f : X \to Y$ es una aplicación continua inyectiva, donde X e Y son espacios topológicos. Sea Z el conjunto imagen $f(X)$, considerado como un subespacio de Y; entonces, la función $f' : X \to Z$ obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si ocurre que f' es un homeomorfismo de X con Z, decimos que la aplicación $f : X \to Y$ es un ***embebimiento topológico***, o simplemente un ***embebimiento***, de X en Y.

EJEMPLO 4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ es un homeomorfismo (véase la Figura 18.2). Si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$$

entonces se puede comprobar fácilmente que $f(g(y)) = y$ y que $g(f(x)) = x$ para todos los números reales x e y. Se sigue que f es biyectiva y que $g = f^{-1}$; la continuidad de f y g es un resultado familiar de cálculo.

EJEMPLO 5. La función $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

es un homeomorfismo (véase la Figura 18.3). Ya hemos observado en el Ejemplo 9 de §3 que F es una correspondencia biyectiva que conserva el orden; su inversa es la función G definida por

$$G(y) = \frac{2y}{1 + (1 + 4y^2)^{1/2}}.$$

El hecho de que F sea un homeomorfismo se puede probar de dos maneras. Una forma es observar que, debido a que F es biyectiva y conserva el orden, F lleva un elemento básico para la topología del orden en $(-1, 1)$ a un elemento básico para la topología del orden en $\mathbb{R}$ y viceversa. Como resultado, F es automáticamente un homeomorfismo de $(-1, 1)$ con $\mathbb{R}$ (ambos con la topología del orden). Puesto que la topología del orden en $(-1, 1)$ y la topología usual (de subespacio) coinciden, F es un homeomorfismo de $(-1, 1)$ con $\mathbb{R}$.

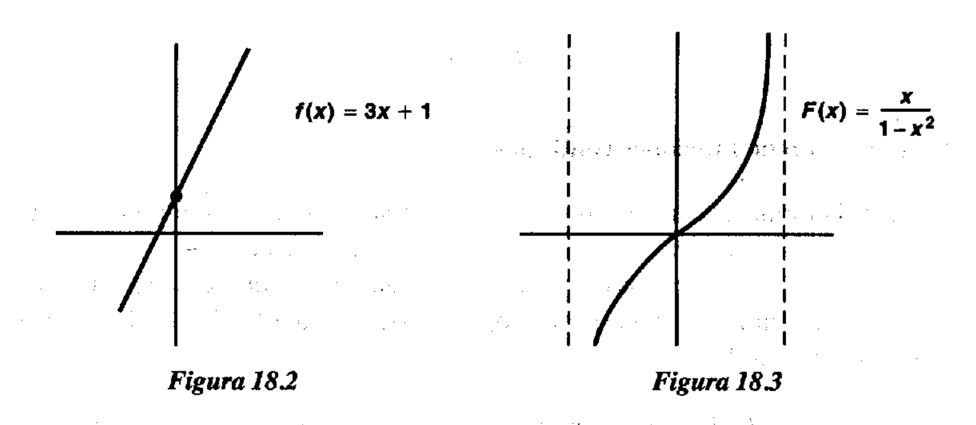


Figura 18.2 *Figura 18.3*

Una segunda forma de ver que F es un homeomorfismo es usar la continuidad de las funciones algebraicas y la función raíz cuadrada, para probar que tanto F como G son continuas. Estos son hechos familiares de cálculo.

EJEMPLO 6. Una función biyectiva $f : X \to Y$ puede ser continua sin ser un homeomorfismo. Una función semejante es la aplicación identidad $g : \mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}$ considerada en el Ejemplo 3. Otra es la siguiente: denotemos por S^1 al ***círculo unidad***

$$S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

considerado como subespacio del plano $\mathbb{R}^2$, y sea

$$F : [0, 1) \to S^1$$

la aplicación definida por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. El hecho de que f sea biyectiva y continua se sigue de propiedades familiares de las funciones trigonométricas. Pero la función f^{-1} no es continua. La imagen mediante f del conjunto abierto $U = [0, \frac{1}{4})$ del dominio, por ejemplo, no es abierta en S^1, puesto que el punto $p = f(0)$ no pertenece a ningún conjunto abierto V de $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S^1 \subset f(U)$ (véase la Figura 18.4).

EJEMPLO 7. Consideremos la función

$$g : [0, 1) \to \mathbb{R}^2$$

obtenida a partir de la función f del ejemplo anterior al extender el recorrido. La aplicación g es un ejemplo de una aplicación continua inyectiva que no es un embebimiento.

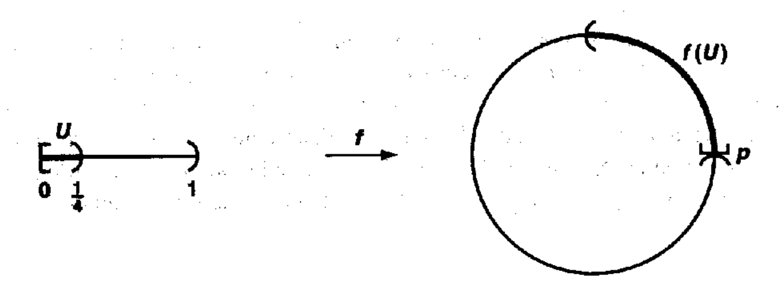


Figura 18.4

Construcción de funciones continuas

¿Cuál es la forma de construir funciones continuas de un espacio topológico en otro? Existen varios métodos usados en análisis, de los cuales algunos se generalizan a espacios topológicos arbitrarios y otros no. Estudiaremos primero algunas construcciones que se cumplen para espacios topológicos generales, dejando el estudio de los otros para más tarde.

Teorema 18.2 (Reglas para construir funciones continuas). *Sean X, Y y Z espacios topológicos.*

(a) (Función constante) si $f : X \to Y$ envía todo punto de X a un mismo punto y_0 de Y, entonces f es continua.

(b) (Inclusión) si A es un subespacio de X, la función inclusión $j : A \to X$ es continua.

(c) (Composición) si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces la aplicación $g \circ f : X \to Z$ es continua.

(d) (Restricción del dominio) si $f : X \to Y$ es continua y A es un subespacio de X, entonces la función restringida $f \mid A : A \to Y$ es continua.

(e) (Restricción o extensión del recorrido) sea $f : X \to Y$ continua. Si Z es un subespacio de Y que contiene al conjunto imagen $f(X)$, entonces la función $g : X \to Z$, obtenida al restringir el rango de f, es continua. Si Z es un espacio con Y como subespacio, entonces la función $h : X \to Z$, obtenida al extender el recorrido de f, es continua.

(f) (Formulación local de continuidad) la aplicación $f : X \to Y$ es continua si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_α tales que $f \mid U_\alpha$ es continua para cada α.

Demostración. (a) Sea $f(x) = y_0$ para todo x en X. Sea V abierto en Y. El conjunto $f^{-1}(V)$ es igual a X ó $\varnothing$, dependiendo de si V contiene a y_0 o no. En cualquier caso, es abierto.

(b) Si U es abierto en X, entonces $j^{-1}(U) = U \cap A$, que es abierto en A por definición de la topología de subespacio.

(c) Si U es abierto en Z, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en Y y $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X. Pero

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$$

por teoría elemental de conjuntos.

(d) La función $f|A$ es igual a la composición de la aplicación inclusión $j : A \to X$ y la aplicación $f : X \to Y$, ambas continuas.

(e) Sea $f : X \to Y$ continua. Si $f(X) \subset Z \subset Y$, probemos que la función $g : X \to Z$ obtenida a partir de f es continua. Sea B abierto en Z. Entonces $B = Z \cap U$ para algún conjunto abierto U de Y. Puesto que Z contiene completamente al conjunto imagen $f(X)$,

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B)$$

por teoría de conjuntos elemental. Ya que $f^{-1}(U)$ es abierto, también lo es $g^{-1}(B)$.

Para probar que $h : X \to Z$ es continua si Z tiene a Y como subespacio, observemos que h es la composición de la aplicación $f : X \to Y$ y la inclusión $j : Y \to Z$.

(f) Por hipótesis, podemos escribir X como unión de conjuntos abiertos U_α, tales que $f \mid U_\alpha$ es continua para cada α. Sea V un conjunto abierto en Y. Entonces

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f \mid U_\alpha)^{-1}(V)$$

puesto que ambas expresiones representan el conjunto de los puntos x que pertenecen a U_α para los que $f(x) \in V$. Como $f \mid U_\alpha$ es continua, este conjunto es abierto en U_α, y por tanto, abierto en X. Pero

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f^{-1}(V) \cap U_\alpha)$$

por lo que $f^{-1}(V)$ es también abierto en X. ■

Teorema 18.3 (Lema del pegamiento). *Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h : X \to Y$, definida mediante $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de Y. Tenemos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

por teoría de conjuntos elemental. Puesto que f es continua, $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y, por tanto, cerrado en X. De modo similar, $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y por ello cerrado en X. Su unión $h^{-1}(C)$ es, de este modo, cerrada en X. ■

Este teorema también se cumple si A y B son conjuntos abiertos en X; este es, precisamente, un caso especial de la regla de "formulación local de continuidad" dada en el teorema anterior.

EJEMPLO 8. Definamos una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \leq 0 \\ x/2 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

Cada uno de los "trozos" de esta definición es una función continua, y coinciden en la zona de dominio común, que es el conjunto unipuntual $\{0\}$. Puesto que sus dominios son cerrados en $\mathbb{R}$, la función h es continua. Se necesita que los "trozos" de la función coincidan en la zona de dominio común para que sea una función. Las ecuaciones

$$k(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{para } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{para } x \geq 0, \end{cases}$$

por ejemplo, no definen una función. Por otro lado, se necesitan algunas limitaciones sobre los conjuntos A y B para garantizar la continuidad. Las ecuaciones

$$l(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{para } x < 0 \\ x + 2 & \text{para } x \geq 0, \end{cases}$$

por ejemplo, definen una función l que lleva $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, y ambos trozos son continuos. Pero l no es continua; la imagen inversa del conjunto abierto $(1, 3)$, por ejemplo, es el conjunto no abierto $[0, 1)$ (véase la Figura 18.5).

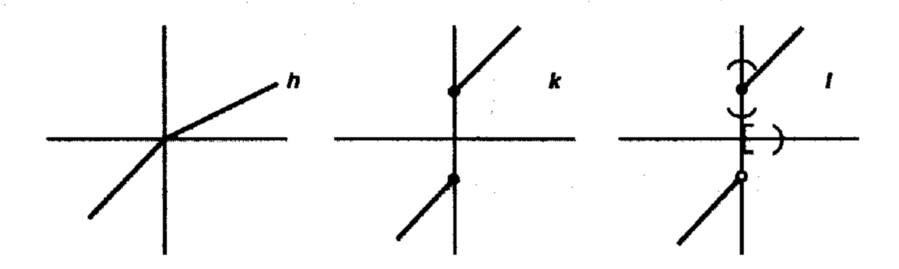


Figura 18.5

Teorema 18.4 (Aplicaciones en productos). *Sea $f : A \to X \times Y$ dada por la ecuación*

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Entonces f es continua si, y sólo si, las funciones

$$f_1 : A \to X \qquad y \qquad f_2 : A \to Y$$

son continuas.

Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman ***funciones coordenadas*** de f.

Demostración. Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Estas aplicaciones son continuas, ya que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, y estos conjuntos son abiertos si U y V son abiertos. Obsérvese que, para cada $a \in A$,

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \qquad \text{y} \qquad f_2(a) = \pi_2(f(a)).$$

Si la función f es continua, entonces f_1 y f_2 son composiciones de funciones continuas, y por tanto continuas. Recíprocamente, supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Vamos a probar que para cada elemento básico $U \times V$ de la topología de $X \times Y$, su imagen inversa $f^{-1}(U \times V)$ es abierta. Un punto a está en $f^{-1}(U \times V)$ si, y sólo si, $f(a) \in U \times V$, esto es, si y sólo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$. Por tanto,

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Puesto que ambos conjuntos $f_1^{-1}(U)$ y $f_2^{-1}(V)$ son abiertos, también lo es su intersección. ■

No existe criterio útil alguno para poder estudiar la continuidad de una aplicación $f : A \times B \to X$ cuyo *dominio* es un espacio producto. Se podría conjeturar que f es continua si es continua "en cada variable separadamente", pero esta conjetura no es cierta (véase el Ejercicio 12).

EJEMPLO 9. En cálculo, una *curva parametrizada* en el plano se define como una aplicación continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Se expresa a menudo en la forma $f(t) = (x(t), y(t))$, y se usa frecuentemente el hecho de que f es una función continua de t si tanto x como y lo son. De modo similar, un *campo de vectores* en el plano

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \\ &= (P(x, y), Q(x, y)) \end{aligned}$$

se dice que es continuo si tanto P como Q son funciones continuas o, equivalentemente, si $\mathbf{v}$ es continua como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Ambas afirmaciones son simplemente casos especiales del teorema anterior.

Un modo de construir funciones continuas que se usa bastante en análisis es tomar sumas, diferencias, productos o cocientes de funciones continuas con valores reales. Es un teorema usual que si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ son continuas, y f/g es continua si $g(x) \neq 0$ para todo x. Consideraremos este teorema en la sección §21.

Otro método de construir funciones continuas que nos es familiar de análisis es tomar el límite de una sucesión infinita de funciones. Existe un teorema para el caso de que si una sucesión de funciones continuas con valores reales de una variable

Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman ***funciones coordenadas*** de f.

Demostración. Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Estas aplicaciones son continuas, ya que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, y estos conjuntos son abiertos si U y V son abiertos. Obsérvese que, para cada $a \in A$,

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \qquad \text{y} \qquad f_2(a) = \pi_2(f(a)).$$

Si la función f es continua, entonces f_1 y f_2 son composiciones de funciones continuas, y por tanto continuas. Recíprocamente, supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Vamos a probar que para cada elemento básico $U \times V$ de la topología de $X \times Y$, su imagen inversa $f^{-1}(U \times V)$ es abierta. Un punto a está en $f^{-1}(U \times V)$ si, y sólo si, $f(a) \in U \times V$, esto es, si y sólo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$. Por tanto,

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Puesto que ambos conjuntos $f_1^{-1}(U)$ y $f_2^{-1}(V)$ son abiertos, también lo es su intersección. ∎

No existe criterio útil alguno para poder estudiar la continuidad de una aplicación $f : A \times B \to X$ cuyo *dominio* es un espacio producto. Se podría conjeturar que f es continua si es continua "en cada variable separadamente", pero esta conjetura no es cierta (véase el Ejercicio 12).

EJEMPLO 9. En cálculo, una *curva parametrizada* en el plano se define como una aplicación continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Se expresa a menudo en la forma $f(t) = (x(t), y(t))$, y se usa frecuentemente el hecho de que f es una función continua de t si tanto x como y lo son. De modo similar, un *campo de vectores* en el plano

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \\ &= (P(x, y), Q(x, y)) \end{aligned}$$

se dice que es continuo si tanto P como Q son funciones continuas o, equivalentemente, si $\mathbf{v}$ es continua como aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Ambas afirmaciones son simplemente casos especiales del teorema anterior.

Un modo de construir funciones continuas que se usa bastante en análisis es tomar sumas, diferencias, productos o cocientes de funciones continuas con valores reales. Es un teorema usual que si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ son continuas, y f/g es continua si $g(x) \neq 0$ para todo x. Consideraremos este teorema en la sección §21.

Otro método de construir funciones continuas que nos es familiar de análisis es tomar el límite de una sucesión infinita de funciones. Existe un teorema para el caso de que si una sucesión de funciones continuas con valores reales de una variable

real converge uniformemente a una función límite, entonces la función límite es necesariamente continua. Este teorema se llama *teorema del límite uniforme*. Se usa, por ejemplo, para demostrar la continuidad de las funciones trigonométricas, cuando se definen estas funciones rigurosamente usando las definiciones de series infinitas del seno y coseno. Este teorema se generaliza a un teorema sobre aplicaciones de un espacio topológico arbitrario X a un espacio métrico Y. Lo probaremos en §21.

Ejercicios

1. Pruebe que para las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la definición ϵ-δ de continuidad implica la definición de conjunto abierto.

2. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua. Si x es un punto límite del subconjunto A de X, ¿es necesariamente cierto que $f(x)$ es un punto límite de $f(A)$?

3. Denotemos por X y X' a un mismo conjunto con dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente. Sea $i : X' \to X$ la función identidad.

(a) Pruebe que i es continua $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$.

(b) Pruebe que i es un homeomorfismo $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

4. Dado $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, pruebe que las aplicaciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por

$$f(x) = x \times y_0 \qquad \text{y} \qquad g(y) = x_0 \times y$$

son embebimientos.

5. Pruebe que el subespacio (a, b) de $\mathbb{R}$ es homeomorfo con $(0, 1)$, y el subespacio $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es homeomorfo con $[0, 1]$.

6. Encuentre una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua únicamente en un punto.

7. (a) Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es "continua por la derecha", esto es,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es continua cuando se considera como una función de $\mathbb{R}_\ell$ en $\mathbb{R}$.

(b) ¿Puede conjeturar qué funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas cuando se consideran como aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_\ell$? ¿Y como aplicaciones de $\mathbb{R}_\ell$ en $\mathbb{R}_\ell$? Volveremos a esta cuestión en el Capítulo 3.

8. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas.

(a) Pruebe que el conjunto $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

(b) Sea $h : X \to Y$ la función

$$h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

Pruebe que h es continua. [*Indicación:* use el lema del pegamiento.]

9. Sean $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X y $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f \mid A_\alpha$ es continua para cada α.

(a) Pruebe que si la colección $\{A_\alpha\}$ es finita y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

(b) Encuentre un ejemplo donde la colección $\{A_\alpha\}$ sea numerable y cada A_α sea cerrado, pero f no sea continua.

(c) Una familia indexada de conjuntos $\{A_\alpha\}$ se dice que es ***localmente finita*** si cada punto x de X tiene un entorno que interseca a A_α sólo para un número finito de valores de α. Pruebe que si la familia $\{A_\alpha\}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

10. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones continuas. Definamos una aplicación $f \times g : A \times C \to B \times D$ mediante la ecuación

$$(f \times g)(a \times c) = f(a) \times g(c).$$

Pruebe que $f \times g$ es continua.

11. Sea $F : X \times Y \to Z$. Decimos que F es ***continua en cada variable separadamente*** si para cada y_0 en Y, la aplicación $h : X \to Z$ definida por $h(x) = F(x \times y_0)$ es continua y para cada x_0 en X, la aplicación $k : Y \to Z$ definida por $k(y) = F(x_0 \times y)$ es continua. Pruebe que si F es continua, entonces F es continua en cada variable separadamente.

12. Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la ecuación

$$F(x \times y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{si } x \times y \neq 0 \times 0 \\ 0 & \text{si } x \times y = 0 \times 0. \end{cases}$$

(a) Pruebe que F es continua en cada variable separadamente.

(b) Calcule la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = F(x \times x)$.

(c) Pruebe que F no es continua.

13. Sean $A \subset X$, $f : A \to Y$ continua e Y de Hausdorff. Pruebe que si f puede extenderse a una función continua $g : \bar{A} \to Y$, entonces g está unívocamente determinada por f.

§19 La topología producto

Volvemos ahora, para el resto del capítulo, al análisis de varios métodos para definir topologías sobre conjuntos.

Previamente hemos definido una topología sobre el producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos. En esta sección ampliamos esta definición a productos cartesianos más generales.

Para ello consideraremos los productos cartesianos

$$X_1 \times \cdots \times X_n \qquad \text{y} \qquad X_1 \times X_2 \times \cdots$$

donde cada X_i es un espacio topológico. Hay dos métodos posibles para proceder. Uno es tomar como base todos los conjuntos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n$ en el primer caso, y de la forma $U_1 \times U_2 \times \cdots$ en el segundo caso, donde U_i es un conjunto abierto de X_i para cada i. Este procedimiento efectivamente define una topología sobre el producto cartesiano que llamaremos *topología por cajas*.

Otra forma de proceder es generalizar la formulación de subbase de la definición dada en §15. En este caso, tomamos como subbase todos los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde i es cualquier índice y U_i es un conjunto abierto de X_i. Esta topología se denomina *topología producto*.

¿En qué se diferencian estas topologías? Considere el típico elemento básico B para la segunda topología. Es una intersección finita de elementos de la subbase $\pi_i^{-1}(U_i)$, digamos para $i = i_1, \ldots, i_k$. Entonces, un punto $\mathbf{x}$ pertenece a B si, y sólo si, $\pi_i(\mathbf{x})$ pertenece a U_i para $i = i_1, \ldots, i_k$; no existe restricción alguna sobre $\pi_i(\mathbf{x})$ para otros valores de i.

Se sigue que estas dos topologías coinciden para el producto cartesiano finito y difieren para el producto infinito. Lo que no está claro es por qué parece que preferimos la segunda topología. Esta es la cuestión que investigaremos en esta sección.

Antes de proceder, sin embargo, introduciremos una noción más general de producto cartesiano. Nosotros hemos definido el producto cartesiano de una familia indexada de conjuntos sólo en los casos donde el conjunto de índices era el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ o el conjunto $\mathbb{Z}_+$. Ahora consideramos el caso donde el conjunto de índices es completamente arbitrario.

Definición. Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera X, definimos una ***J*-upla** de elementos de X como una función $\mathbf{x}\colon J \to X$. Si α es un elemento de J, a menudo denotamos el valor de $\mathbf{x}$ en α mediante x_α en lugar de $\mathbf{x}(\alpha)$; lo llamaremos la α-ésima ***coordenada*** de $\mathbf{x}$. Y a menudo denotaremos a la función $\mathbf{x}$ mediante el símbolo

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J},$$

que es lo más cercano a una "notación upla" para un conjunto arbitrario de índices J. Denotamos al conjunto de todas las J-uplas de elementos de X por X^J.

Definición. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de conjuntos indexada y sea $X = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$. El ***producto cartesiano*** de esta familia indexada, denotado por

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha,$$

se define como el conjunto de todas las J-uplas $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ de elementos de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Esto es, es el conjunto de todas las funciones

$$\mathbf{x} : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$$

tales que $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

En ocasiones denotaremos el producto simplemente por $\prod A_\alpha$, y a su elemento general por (x_α), si el conjunto índice se sobreentiende.

Si todos los conjuntos A_α son iguales a un conjunto X, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ es exactamente el conjunto X^J de *todas* las J-uplas de elementos de X. Algunas veces utilizaremos la "notación upla" para los elementos de X^J, y otras veces usaremos notación funcional, dependiendo de la que sea más conveniente.

Definición. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios topológicos. Tomemos como base para una topología sobre el espacio producto

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$$

la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha\in J} U_\alpha,$$

donde U_α es abierto en X_α, para cada $\alpha \in J$. La topología generada por esta base se denomina ***topología por cajas***.

Esta colección satisface la primera condición para una base, porque $\prod X_\alpha$ es, por sí solo, un elemento básico y satisface la segunda condición, porque la intersección de cualesquiera dos elementos básicos es otro elemento básico:

$$(\prod_{\alpha\in J} U_\alpha) \cap (\prod_{\alpha\in J} V_\alpha) = \prod_{\alpha\in J} (U_\alpha \cap V_\alpha).$$

Ahora generalizamos la formulación de subbase de la definición. Sea

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada β-ésima,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in J}) = x_\beta;$$

se denomina ***aplicación proyección*** asociada con el índice β.

Definición. Denotemos por $\mathcal{S}_\beta$ a la colección

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y denotemos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas colecciones,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J} \mathcal{S}_\beta.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina ***topología producto***. En esta topología, $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ se denomina ***espacio producto***.

Para comparar estas topologías, consideramos la base $\mathcal{B}$ que $\mathcal{S}$ genera. La colección $\mathcal{B}$ consta de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Si intersecamos elementos que pertenecen al mismo conjunto $\mathcal{S}_\beta$ no obtenemos nada nuevo, porque

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta) = \pi_\beta^{-1}(U_\beta \cap V_\beta);$$

la intersección de dos elementos de $\mathcal{S}_\beta$, o de un número finito de tales elementos, es de nuevo un elemento de $\mathcal{S}_\beta$. Sólo obtenemos algo nuevo cuando intersecamos elementos de distintos conjuntos $\mathcal{S}_\beta$. El típico elemento básico $\mathcal{B}$ puede, así, ser descrito como sigue: sea $\beta_1, \ldots, \beta_n$ un conjunto finito de índices distintos del conjunto índice J, y sea U_{β_i} un conjunto abierto en X_{β_i} para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$

es el elemento típico de $\mathcal{B}$.

Ahora bien, un punto $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ está en B si, y sólo si, su coordenada β_1-ésima está en U_{β_1}, su coordenada β_2-ésima está en U_{β_2}, y así sucesivamente. No existe restricción alguna sobre la coordenada α-ésima de $\mathbf{x}$ si α no es uno de los índices $\beta_1 \ldots, \beta_n$. Como resultado, podemos escribir B como el producto

$$B = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$$

donde U_α denota el espacio entero X_α si $\alpha \neq \beta_1, \ldots, \beta_n$. Todo esto se resume en el siguiente teorema:

Teorema 19.1 (Comparación de las topologías por cajas y producto). *La topología por cajas sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α. La topología producto sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α y U_α es igual a X_α excepto para un número finito de valores de α.*

Dos cosas están inmediatamente claras. En primer lugar, para productos finitos $\prod_{\alpha=1}^{n} X_\alpha$, las dos topologías son, precisamente, la misma. En segundo lugar, la topología por cajas es, en general, más fina que la topología producto.

Lo que no está tan claro es por qué preferimos la topología producto a la topología por cajas. La respuesta aparecerá a medida que continuemos nuestro estudio de la topología. Encontraremos que un número de teoremas importantes sobre productos finitos también se cumplirán para productos arbitrarios si usamos la topología producto, pero no si utilizamos la topología por cajas. Como consecuencia, la topología producto es importantísima en matemáticas. La topología por cajas no es tan importante; la usaremos principalmente para construir contraejemplos. Por tanto, convendremos lo siguiente:

> *Siempre que consideremos el producto $\prod X_\alpha$ lo supondremos con la topología producto, a menos que específicamente establezcamos lo contrario.*

Algunos de los teoremas que hemos probado para el producto $X \times Y$ se cumplen también para el producto $\prod X_\alpha$ sin importar la topología que usemos. Los enunciamos a continuación, donde la mayoría de las demostraciones se dejan como ejercicios.

Teorema 19.2. *Supongamos que la topología sobre cada espacio X_α está dada por una base $\mathcal{B}_\alpha$. La colección de todos los conjuntos de la forma*

$$\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada α, es una base para la topología por cajas sobre $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

La colección de todos los conjuntos de la misma forma, donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para un conjunto finito de índices α y $B_\alpha = X_\alpha$ para todos los índices restantes, servirá como base para la topología producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

EJEMPLO 1. Consideremos el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Una base de $\mathbb{R}$ consiste en todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$; de aquí, una base para la topología de $\mathbb{R}^n$ consiste en todos los productos de la forma

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Puesto que $\mathbb{R}^n$ es un producto finito, las topologías por cajas y producto coinciden. Siempre que estudiemos el espacio $\mathbb{R}^n$, supondremos que se da esta topología, a menos que digamos lo contrario.

Teorema 19.3. *Sea A_α un subespacio de X_α, para cada $\alpha \in J$. Entonces $\prod A_\alpha$ es un subespacio de $\prod X_\alpha$ si en ambos productos está dada la topología por cajas, o si en ambos productos está dada la topología producto.*

Teorema 19.4. *Si cada espacio X_α es un espacio de Hausdorff, entonces $\prod X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff en las topologías por cajas y producto.*

Teorema 19.5. *Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios y sea $A_\alpha \subset X_\alpha$, para cada α. Si $\prod X_\alpha$ está dotado de la topología por cajas o producto, entonces*

$$\prod \bar{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ un punto de $\prod \bar{A}_\alpha$; probaremos que $\mathbf{x} \in \overline{\prod A_\alpha}$. Sea $U = \prod U_\alpha$ un elemento básico, bien para la topología por cajas, bien para la topología producto que contiene a $\mathbf{x}$. Ya que $x_\alpha \in \bar{A}_\alpha$ podemos elegir un punto $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$ para cada α. Entonces $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ pertenece tanto a U como a $\prod A_\alpha$. Puesto que U es arbitrario, se sigue que $\mathbf{x}$ pertenece a la clausura de $\prod A_\alpha$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ pertenece a la clausura de $\prod A_\alpha$, en cualquiera de las dos topologías. Probaremos que para cualquier índice dado β, tenemos que $x_\beta \in \bar{A}_\beta$. Sea V_β un conjunto abierto arbitrario de X_β que contiene a x_β. Puesto que $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ es abierto en $\prod X_\alpha$ en cualquiera de las dos topologías, contiene un punto $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ de $\prod A_\alpha$. Entonces y_β pertenece a $V_\beta \cap A_\beta$. Se sigue que $x_\beta \in \bar{A}_\beta$. ∎

Hasta aquí no ha aparecido razón alguna para preferir la topología producto a la topología por cajas. Es cuando intentamos generalizar nuestro teorema anterior sobre continuidad de aplicaciones en espacios producto cuando nos encontramos con la primera diferencia. Aquí tenemos un teorema que no se cumple si $\prod X_\alpha$ está dotado con la topología por cajas:

Teorema 19.6. *Sea $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dada por la ecuación*

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$$

donde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Tomemos sobre $\prod X_\alpha$ la topología producto. Entonces la función f es continua si, y sólo si, cada función f_α es continua.

Demostración. Sea π_β la proyección del producto sobre su factor β-ésimo. La función π_β es continua, por lo que si U_β es abierto en X_β, el conjunto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un elemento de la subbase para la topología producto sobre X_α. Ahora supongamos que $f : A \to \prod X_\alpha$ es continua. La función f_β es igual a la composición $\pi_\beta \circ f$ que, al ser la composición de dos funciones continuas, es continua.

Recíprocamente, supongamos que cada función coordenada f_α es continua. Para probar que f es continua, es suficiente demostrar que la imagen inversa mediante f de cada elemento de la subbase es abierto en A; hemos insistido en este hecho cuando definimos las funciones continuas. Un elemento característico de la subbase para la topología producto sobre $\prod X_\alpha$ es un conjunto de la forma $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, donde β es algún índice y U_β es abierto en X_β. Ahora,

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta)$$

porque $f_\beta = \pi_\beta \circ f$. Puesto que f_β es continua, este conjunto es abierto en A, como se deseaba. ■

¿Por qué no se cumple este teorema si usamos la topología por cajas? Probablemente, el argumento más convincente sea ver un ejemplo.

EJEMPLO 2. Consideremos $\mathbb{R}^\omega$, el producto numerable de $\mathbb{R}$ consigo mismo infinitas veces. Recuérdese que

$$\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} X_n$$

donde $X_n = \mathbb{R}$ para todo n. Definamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la ecuación

$$f(t) = (t, t, t, \ldots);$$

la n-ésima función coordenada de f es la función $f_n(t) = t$. Cada una de las funciones coordenadas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua; así pues, la función f es continua si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología producto. Pero f no es continua si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología por cajas. Consideremos, por ejemplo, el elemento básico

$$B = (-1, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots$$

para la topología por cajas. Afirmamos que $f^{-1}(B)$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Si $f^{-1}(B)$ fuera abierto en $\mathbb{R}$, contendría algún intervalo $(-\delta, \delta)$ alrededor del punto 0. Esto significaría que $f((-\delta, \delta)) \subset B$, por lo que, aplicando π_n a ambos lados de la inclusión,

$$f_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subset (-1/n, 1/n)$$

para todo n, lo que es una contradicción.

Ejercicios

1. Pruebe el Teorema 19.2.
2. Pruebe el Teorema 19.3.
3. Pruebe el Teorema 19.4.

4. Pruebe que $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ es homeomorfo a $X_1 \times \cdots \times X_n$.

5. Una de las implicaciones establecidas en el Teorema 19.6 se cumple para la topología por cajas. ¿Cuál es?

6. Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ una sucesión de puntos del espacio producto $\prod X_\alpha$. Pruebe que esta sucesión converge al punto $\mathbf{x}$ si, y sólo si, la sucesión $\pi_\alpha(\mathbf{x}_1), \pi_\alpha(\mathbf{x}_2), \ldots$ converge a $\pi_\alpha(\mathbf{x})$ para cada α. ¿Es cierto este hecho si se usa la topología por cajas en lugar de la topología producto?

7. Sea $\mathbb{R}^\infty$ el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones que son "finalmente cero", esto es, todas las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots)$ tales que $x_i \neq 0$ sólo para un número finito de valores de i. ¿Cuál es la clausura de $\mathbb{R}^\infty$ en $\mathbb{R}^\omega$ en las topologías por cajas y producto? Justifique la respuesta.

8. Dadas las sucesiones $(a_1, a_2, \ldots)$ y $(b_1, b_2, \ldots)$ de números reales con $a_i > 0$ para todo i, definamos $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la ecuación

$$h((x_1, x_2, \ldots)) = (a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2, \ldots),$$

Pruebe que si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología producto, h es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^\omega$ consigo mismo. ¿Qué ocurre si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología por cajas?

9. Pruebe que el axioma de elección es equivalente a la afirmación de que para cualquier familia indexada $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos no vacíos, con $J \neq \varnothing$, el producto cartesiano

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

es no vacío.

10. Sean A un conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de funciones $f_\alpha : A \to X_\alpha$.

(a) Pruebe que existe una única topología más gruesa $\mathcal{T}$ sobre A relativa a la cual las funciones f_α son continuas.

(b) Sea

$$\mathcal{S}_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y sea $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_\beta$. Pruebe que $\mathcal{S}$ es una subbase para $\mathcal{T}$.

(c) Pruebe que una aplicación $g : Y \to A$ es continua relativa a $\mathcal{T}$ si, y sólo si, cada aplicación $f_\alpha \circ g$ es continua.

(d) Sea $f : A \to \prod X_\alpha$ definida mediante la ecuación

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$$

y denotemos por Z al subespacio $f(A)$ del espacio producto $\prod X_\alpha$. Pruebe que la imagen por f de cada elemento de $\mathcal{T}$ es un conjunto abierto de Z.

§20 La topología métrica

Uno de los métodos más importantes y frecuentemente usados para dotar de una topología a un conjunto es definir la topología en términos de una distancia en el conjunto. Las topologías dadas de esta forma se sitúan en el centro del análisis moderno, por ejemplo. En esta sección, definiremos la topología métrica y daremos unos cuantos ejemplos. En la sección siguiente consideraremos algunas de las propiedades que satisfacen las topologías métricas.

Definición. Una ***distancia*** en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$; la igualdad se da si, y sólo si, $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.

(3) (Desigualdad triangular) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Dada una distancia d en X, el número $d(x, y)$ se llama a menudo ***distancia*** entre x e y en la distancia d. Dado $\epsilon > 0$, consideremos el conjunto

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

de todos los puntos y cuya distancia a x es menor que ϵ, que se denomina ***bola de radio ϵ centrada en x***. Algunas veces omitiremos la distancia d de la notación y escribiremos esta bola simplemente como $B(x, \epsilon)$, cuando no exista problema de confusión.

Definición. Si d es una distancia en el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_d(x, \epsilon)$ de radio ϵ, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, denominada ***topología métrica*** inducida por d.

La primera condición para una base es trivial, puesto que $x \in B(x, \epsilon)$, para cualquier $\epsilon > 0$. Antes de comprobar la segunda condición para una base, demostramos que si y es un punto del elemento básico $B(x, \epsilon)$, entonces existe un elemento básico $B(y, \delta)$ *centrado* en y que está contenido en $B(x, \epsilon)$. Definamos δ como el número positivo $\epsilon - d(x, y)$. Entonces $B(y, \delta) \subset B(x, \epsilon)$, por lo que si $z \in B(y, \delta)$, entonces $d(y, z) < \epsilon - d(x, y)$, con lo que concluimos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon.$$

Véase la Figura 20.1.

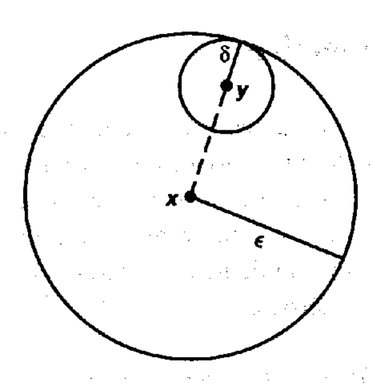


Figura 20.1

Para comprobar la segunda condición para una base, sean B_1 y B_2 dos elementos básicos y sea $y \in B_1 \cap B_2$. Acabamos de ver que podemos elegir números positivos δ_1 y δ_2 de tal modo que $B(y, \delta_1) \subset B_1$ y $B(y, \delta_2) \subset B_2$. Tomando δ como el más pequeño de δ_1 y δ_2, concluimos que $B(y, \delta) \subset B_1 \cap B_2$.

Usando lo que acabamos de probar, podemos reformular la definición de topología métrica como sigue:

> *Un conjunto U es abierto en la topología métrica inducida por d si, y sólo si, para cada $y \in U$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(y, \delta) \subset U$.*

Claramente, esta condición implica que U es abierto. Recíprocamente, si U es abierto, contiene un elemento básico $B = B_d(x, \epsilon)$ que contiene a y, y B, a su vez, contiene un elemento básico $B_d(y, \delta)$ centrado en y.

EJEMPLO 1. Dado un conjunto X, definimos

$$d(x, y) = 1 \qquad \text{si } x \neq y,$$
$$d(x, y) = 0 \qquad \text{si } x = y.$$

Es trivial comprobar que d es una distancia. La topología que induce es la topología discreta; el elemento básico $B(x, 1)$, por ejemplo, consiste únicamente en el punto x.

EJEMPLO 2. La distancia usual sobre los números reales $\mathbb{R}$ está definida por la ecuación

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Es fácil comprobar que d es una distancia. La topología que induce es la misma que la topología del orden: cada elemento (a, b) básico para la topología del orden es un elemento básico para la topología métrica; efectivamente,

$$(a, b) = B(x, \epsilon)$$

donde $x = (a + b)/2$ y $\epsilon = (b - a)/2$. Y recíprocamente, cada bola $B(x, \epsilon)$ de radio ϵ es igual a un intervalo abierto: el intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Definición. Si X es un espacio topológico, se dice que X es ***metrizable*** si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X. Un ***espacio métrico*** es un espacio metrizable X junto a una distancia específica d que da la topología de X.

Muchos de los espacios importantes para las matemáticas son metrizables, pero algunos no lo son. La metrizabilidad es siempre un atributo altamente deseable para un espacio, puesto que la existencia de una distancia nos ofrece una valiosa herramienta para probar teoremas sobre dicho espacio.

Sin embargo, es un problema de importancia fundamental en topología encontrar condiciones sobre un espacio topológico que garanticen que es metrizable. Uno de nuestros objetivos en el Capítulo 4 será encontrar tales condiciones; se expresan allí en el famoso teorema llamado *teorema de metrización de Urysohn*. Aparecerán más teoremas sobre metrización en el Capítulo 6. En esta sección nos conformaremos simplemente con probar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^\omega$ son metrizables.

Aunque el problema de la metrización es un problema importante en topología, el estudio de los espacios métricos como tales no pertenece propiamente a la topología tanto como al análisis. La metrizabilidad de un espacio depende solamente de la topología del espacio en cuestión, pero no, en general, de las propiedades que implica una distancia específica para X. Por ejemplo, se puede hacer la siguiente definición en un espacio métrico:

Definición. Sea X un espacio métrico con una distancia d. Un subconjunto A de X se dice que está ***acotado*** si existe algún número M tal que

$$d(a_1, a_2) \leq M$$

para todo par a_1, a_2 de puntos de A. Si A es un conjunto acotado y no vacío, el ***diámetro*** de A se define como el número

$$\text{diám}\, A = \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

La acotación de un conjunto no es una propiedad topológica, porque depende de la distancia particular d que se use para X. Por ejemplo, si X es un espacio métrico con distancia d, entonces existe una distancia $\bar{d}$ que da la topología de X, relativa a la cual *cada* subconjunto de X está acotado. Se define como sigue:

Teorema 20.1. *Sea X un espacio métrico con una distancia d. Se define $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación*

$$\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}.$$

Entonces $\bar{d}$ es una distancia que induce la misma topología que d.

La distancia $\bar{d}$ se denomina ***distancia acotada*** correspondiente a d.

Demostración. La comprobación de las primeras dos condiciones de una distancia es trivial. Comprobemos la desigualdad triangular:

$$\bar{d}(x, z) \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

Ahora bien, si $d(x, y) \geq 1$ ó $d(y, z) \geq 1$, entonces la parte derecha de esta desigualdad es, al menos, 1; puesto que la parte izquierda es (por definición) como mucho 1, la desigualdad se satisface. Queda estudiar el caso en el que $d(x, y) < 1$ y $d(y, z) < 1$. En este caso, tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

Como $\bar{d}(x, z) \leq d(x, z)$ por definición, la desigualdad triangular se cumple para $\bar{d}$.

Ahora bien, recordemos que, en cualquier espacio métrico, la colección de las bolas de radio ϵ con $\epsilon < 1$ forma una base para la topología métrica, puesto que cada elemento básico que contiene a x contiene una bola de esa forma, centrada en x y de radio ϵ. Se sigue que d y $\bar{d}$ inducen la misma topología sobre X, porque las colecciones de bolas de radio ϵ, con $\epsilon < 1$, para estas dos distancias son idénticas. ∎

Estudiaremos a continuación algunos espacios que nos son familiares y probaremos que son metrizables.

Definición. Dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se definen la ***norma*** de $\mathbf{x}$ mediante la ecuación

$$||x|| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

y la ***distancia euclídea*** d sobre $\mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \left[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right]^{1/2}.$$

Definimos la ***distancia del supremo*** ρ por la ecuación

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

La demostración de que d es una distancia requiere algo de trabajo; probablemente ya le sea familiar. Si no, en los ejercicios podrá encontrar una idea de la prueba. Casi nunca tendremos la ocasión de usar esta distancia en $\mathbb{R}^n$.

Probar que ρ es una distancia es más fácil. Sólo la desigualdad triangular no es trivial. De la desigualdad triangular para $\mathbb{R}$ se sigue que, para cada entero positivo i,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Entonces, por definición de ρ,

$$|x_i - z_i| \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Por consiguiente,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \text{máx}\{|x_i - z_i|\} \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

como se deseaba.

Sobre la recta real $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, estas dos distancias coinciden con la distancia usual de $\mathbb{R}$. En el plano $\mathbb{R}^2$, los elementos básicos para d se pueden dibujar como regiones circulares, mientras que los elementos básicos para ρ se pueden dibujar como regiones cuadradas.

Ahora veremos que cada una de estas distancias induce la topología usual sobre $\mathbb{R}^n$. Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 20.2. *Sean d y d' dos distancias sobre el conjunto X, y $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ las topologías que inducen, respectivamente. Entonces $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada x en X y cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon).$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$. Dado el elemento básico $B_d(x, \epsilon)$ para $\mathcal{T}$, existe, por el Lema 13.3, un elemento básico B' para la topología $\mathcal{T}'$ tal que $x \in B' \subset B_d(x, \epsilon)$. Dentro de B' podemos tomar una bola $B_{d'}(x, \delta)$ centrada en x.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición δ-ϵ. Dado un elemento básico B para $\mathcal{T}$ que contenga a x, podemos tomar dentro de B una bola $B_d(x, \epsilon)$ centrada en x. Por la condición dada, existe un δ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. Entonces se aplica el Lema 13.3 para probar que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$. ■

Teorema 20.3. *Las topologías sobre $\mathbb{R}^n$ inducidas por la distancia euclídea d y la distancia del supremo ρ son la misma que la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$. Es un simple ejercicio de álgebra comprobar que

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

La primera desigualdad nos dice que

$$B_d(\mathbf{x}, \epsilon) \subset B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$$

para todos $\mathbf{x}$ y ϵ, puesto que si $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$, entonces $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$ también. De modo similar, la segunda desigualdad nos dice que

$$B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$$

para todos $\mathbf{x}$ y ϵ. Se sigue, del lema anterior, que las dos topologías asociadas a las distancias son la misma.

Ahora demostraremos que la topología producto es la misma que la dada por la distancia ρ. En primer lugar, sea

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

un elemento básico para la topología producto, y sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un elemento de B. Para cada i, existe un ϵ_i tal que

$$(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subset (a_i, b_i),$$

y sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. Entonces $B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon) \subset B$, como se puede comprobar. Por tanto, la ρ-topología es más fina que la topología producto.

Recíprocamente, sea $B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$ un elemento básico para la ρ-topología. Dado el elemento $\mathbf{y} \in B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$, necesitamos encontrar un elemento básico B para la topología producto tal que

$$\mathbf{y} \in B \subset B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon).$$

Pero esto es trivial, pues

$$B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$$

es ya un elemento básico para la topología producto. ∎

Ahora consideraremos el producto cartesiano infinito $\mathbb{R}^\omega$. Es natural intentar generalizar las distancias d y ρ a este espacio. Por ejemplo, se puede intentar definir una distancia d sobre $\mathbb{R}^\omega$ por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

Pero esta ecuación no siempre tiene sentido, puesto que las series en juego no tienen por qué ser convergentes (esta ecuación, sin embargo, define una distancia en cierto subconjunto importante de $\mathbb{R}^\omega$; véanse los ejercicios).

Análogamente, se puede intentar generalizar la distancia del supremo ρ a $\mathbb{R}^\omega$ definiendo

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|x_n - y_n|\}.$$

De nuevo, esta fórmula no siempre tiene sentido. Si, aun así, reemplazamos la distancia usual $d(x, y) = |x-y|$ en $\mathbb{R}$ por su homóloga acotada, $\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{|x-y|, 1\}$, entonces esta definición *tiene* sentido; da una distancia en $\mathbb{R}^\omega$ llamada *distancia uniforme*. La distancia uniforme se puede definir más generalmente sobre el producto cartesiano $\mathbb{R}^J$ para J arbitrario, como sigue:

Definición. Dado un conjunto de índices J, y puntos dados $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha\in J}$ de $\mathbb{R}^J$, definimos una distancia $\bar{\rho}$ sobre $\mathbb{R}^J$ por la ecuación

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\}$$

donde $\bar{d}$ es la distancia acotada sobre $\mathbb{R}$. Es fácil comprobar que $\bar{\rho}$ es, efectivamente, una distancia; se denomina ***distancia uniforme*** sobre $\mathbb{R}^J$, y la topología que induce se denomina ***topología uniforme***.

La relación entre esta topología y las topologías producto y por cajas es la siguiente:

Teorema 20.4. *La topología uniforme sobre $\mathbb{R}^J$ es más fina que la topología producto y más gruesa que la topología por cajas; estas tres topologías son todas distintas si J es infinito.*

Demostración. Supongamos que nos dan un punto $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$, y un elemento básico $\prod U_\alpha$ para la topología producto, alrededor de $\mathbf{x}$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ los índices para los cuales $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. Entonces, para cada i, elegimos $\epsilon_i > 0$ de manera que la bola de radio ϵ_i centrada en x_{α_i} en la distancia $\bar{d}$ esté contenida en U_α; esto lo podemos hacer porque U_{α_i} es abierto en $\mathbb{R}$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$, entonces la bola de radio ϵ centrada en $\mathbf{x}$ en la distancia $\bar{\rho}$ está contenida en $\prod U_\alpha$. En efecto, si $\mathbf{z}$ es un punto de $\mathbb{R}^J$ tal que $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \epsilon$, entonces $\bar{d}(x_\alpha, z_\alpha) < \epsilon$ para todo α, por lo que $\mathbf{z} \in \prod U_\alpha$. Se sigue que la topología uniforme es más fina que la topología producto.

Por otro lado, sea B la bola de radio ϵ centrada en $\mathbf{x}$ en la distancia $\bar{\rho}$. Entonces el entorno caja de $\mathbf{x}$

$$U = \prod (x_\alpha - \frac{1}{2}\epsilon, x_\alpha + \frac{1}{2}\epsilon)$$

está contenido en B. Pero si $\mathbf{y} \in U$, entonces $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \frac{1}{2}\epsilon$ para todo α, por lo que $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Probar que estas tres topologías son distintas si J es infinito es una tarea que dejaremos para los ejercicios. ■

En el caso en que J es infinito, aún no hemos determinado si $\mathbb{R}^J$ es metrizable en la topología producto o por cajas. Resulta que el único de estos casos donde $\mathbb{R}^J$ es metrizable es el caso donde J es numerable y $\mathbb{R}^J$ tiene la topología producto. Lo veremos más adelante.

Teorema 20.5. *Sea $\bar{d}(a,b) = \text{mín}\{|a-b|, 1\}$ la distancia acotada usual sobre $\mathbb{R}$. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos puntos de $\mathbb{R}^\omega$, definimos*

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}\right\}.$$

Entonces D es una distancia que induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$.

Demostración. Las propiedades de una distancia se satisfacen trivialmente excepto para la desigualdad triangular, que se prueba al observar que, para todo i,

$$\frac{\bar{d}(x_i,z_i)}{i} \leq \frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i} + \frac{\bar{d}(y_i,z_i)}{i} \leq D(\mathbf{x},\mathbf{y}) + D(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

de manera que

$$\sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i}\right\} \leq D(\mathbf{x},\mathbf{y}) + D(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

El hecho de que D induce la topología producto requiere un poco más de trabajo. En primer lugar, sea U abierto en la topología métrica y sea $\mathbf{x} \in U$; encontraremos un conjunto abierto V en la topología producto tal que $\mathbf{x} \in V \subset U$. Elegimos una bola $B_D(\mathbf{x},\epsilon)$ que esté en U. Después elegimos N suficientemente grande para que $1/N < \epsilon$. Finalmente, sea V el elemento básico para la topología producto

$$V = (x_1-\epsilon, x_1+\epsilon) \times \cdots \times (x_N-\epsilon, x_N+\epsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots .$$

Afirmamos que $V \subset B_D(\mathbf{x},\epsilon)$: dado cualquier $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^\omega$,

$$\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i} \leq \frac{1}{N} \qquad \text{para } i \geq N.$$

Por lo tanto,

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \text{máx}\left\{\frac{\bar{d}(x_1,y_1)}{1}, \cdots, \frac{\bar{d}(x_N,y_N)}{N}, \frac{1}{N}\right\}.$$

Si $\mathbf{y}$ está en V, esta expresión es más pequeña que ϵ, por lo que $V \subset B_D(\mathbf{x},\epsilon)$, como se deseaba.

Recíprocamente, consideremos un elemento básico

$$U = \prod_{i \in \mathbb{Z}_+} U_i$$

para la topología producto, donde U_i es abierto en $\mathbb{R}$ para $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $U_i = \mathbb{R}$ para el resto de índices i. Dado $\mathbf{x} \in U$, podemos tomar un conjunto abierto V en la topología métrica tal que $\mathbf{x} \in V \subset U$. Tomemos un intervalo $(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i)$

en $\mathbb{R}$ centrado en x_i y contenido en U_i para $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; elijamos cada $\epsilon_i \leq 1$. Entonces definimos

$$\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_i/i \mid i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Afirmamos que

$$\mathbf{x} \in B_D(\mathbf{x}, \epsilon) \subset U.$$

Sea $\mathbf{y}$ un punto de $B_D(\mathbf{x}, \epsilon)$. Entonces, para todo i,

$$\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon.$$

Ahora bien, si $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces $\epsilon \leq \epsilon_i/i$, por lo que $\bar{d}(x_i, y_i) < \epsilon_i \leq 1$; se sigue que $|x_i - y_i| < \epsilon_i$. Por tanto, $\mathbf{y} \in \prod U_i$, como se deseaba. ■

Ejercicios

1. (a) En $\mathbb{R}^n$, definimos

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Pruebe que d' es una distancia que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Dé una idea de cómo son los elementos básicos para d' cuando $n = 2$.

(b) De modo más general, dado $p \geq 1$, definimos

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}$$

para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que d' es una distancia. Pruebe que induce la topología usual sobre $\mathbb{R}^n$.

2. Pruebe que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable.

3. Sea X un espacio métrico con distancia d.

(a) Pruebe que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua.

(b) Denotemos por X' a un espacio topológico construido sobre el mismo conjunto X. Pruebe que si $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la topología de X' es más fina que la topología de X.

Se puede resumir el resultado de este ejercicio como sigue: si X tiene una distancia d, entonces la topología inducida por d es la topología relativa más gruesa para la cual la función d es continua.

4. Consideremos las topologías producto, uniforme y por cajas sobre $\mathbb{R}^\omega$.

(a) ¿En qué topologías son continuas las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$?

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \dots), \\ g(t) &= (t, t, t, \dots), \\ h(t) &= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \dots). \end{aligned}$$

(b) ¿En qué topologías convergen las siguientes sucesiones?

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= (1, 1, 1, 1, \dots), & \mathbf{x}_1 &= (1, 1, 1, 1, \dots), \\ \mathbf{w}_2 &= (0, 2, 2, 2, \dots), & \mathbf{x}_2 &= (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots), \\ \mathbf{w}_3 &= (0, 0, 3, 3, \dots), & \mathbf{x}_3 &= (0, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \dots), \\ &\dots & &\dots \\ \mathbf{y}_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots), & \mathbf{z}_1 &= (1, 1, 0, 0, \dots), \\ \mathbf{y}_2 &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0, \dots), & \mathbf{z}_2 &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0, \dots), \\ \mathbf{y}_3 &= (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, \dots), & \mathbf{z}_3 &= (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \dots), \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

5. Sea $\mathbb{R}^\infty$ el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones que son finalmente cero. ¿Cuál es la clausura de $\mathbb{R}^\infty$ en $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme? Explique su respuesta.

6. Sea $\bar{\rho}$ la distancia uniforme sobre $\mathbb{R}^\omega$. Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ y dado $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(\mathbf{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \times \cdots .$$

(a) Pruebe que $U(\mathbf{x}, \epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \epsilon)$.

(b) Pruebe que $U(\mathbf{x}, \epsilon)$ ni siquiera es abierto en la topología uniforme.

(c) Pruebe que

$$B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \epsilon) = \bigcup_{\delta < \epsilon} U(\mathbf{x}, \delta).$$

7. Considere la aplicación $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ definida en el Ejercicio 8 de §19 y dote a $\mathbb{R}^\omega$ de la topología uniforme. ¿Bajo qué condiciones sobre los números a_i y b_i es h continua? ¿Y un homeomorfismo?

8. Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones $\mathbf{x}$ tales que $\sum x_i^2$ converge. Entonces la fórmula

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

es una distancia bien definida sobre X.

***11.** Pruebe que si d es una distancia sobre X, entonces

$$d'(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$$

es una distancia acotada que induce la topología de X. [*Indicación:* si $f(x) = x/(1 + x)$ para $x > 0$, use el teorema del valor medio para demostrar que $f(a + b) - f(b) \leq f(a)$.]

§21 La topología métrica (continuación)

En esta sección hablaremos de la relación de la topología métrica con los conceptos que hemos introducido previamente.

Los *subespacios* de los espacios métricos se comportan de la forma que desearíamos; si A es un subespacio del espacio topológico X y d es una distancia para X, entonces la restricción de d a $A \times A$ es una distancia para la topología de A. Dejamos que el lector compruebe la veracidad de esta afirmación.

Sobre *topologías del orden* no se puede decir nada; algunas son metrizables (por ejemplo, $\mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{R}$), y otras no lo son, como veremos.

El *axioma de Hausdorff* se satisface en toda topología métrica. Si x e y son puntos distintos del espacio métrico (X, d), tomaremos $\epsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$, con lo que la desigualdad triangular implica que $B_d(x, \epsilon)$ y $B_d(y, \epsilon)$ son disjuntas.

Ya hemos considerado la *topología producto* en casos especiales; hemos probado que los productos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^\omega$ son metrizables. Es cierto, en general, que los productos numerables de espacios metrizables son metrizables; la demostración sigue un estilo similar a la prueba para $\mathbb{R}^\omega$, por lo que lo dejaremos para los ejercicios.

Sobre *funciones continuas* hay mucho que decir. El estudio de este tema nos ocupará el resto de la sección.

Cuando estudiemos funciones continuas sobre espacios métricos, estaremos más cerca del estudio del cálculo y del análisis que en ninguna otra parte de este libro. Hay dos cosas que queremos hacer en este punto.

En primer lugar, queremos probar que la familiar "definición ϵ-δ" de continuidad se transfiere a espacios métricos generales, y así ocurre también con la "definición de sucesión convergente" de continuidad.

En segundo lugar, queremos considerar dos métodos adicionales para construir funciones continuas, además de los discutidos en §18. Uno es el proceso de tomar sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas con valores reales. El otro es el proceso de tomar límites de sucesiones uniformemente convergentes de funciones continuas.

Teorema 21.1. *Sea $f : X \to Y$ y sean X e Y metrizables con distancias d_X y d_Y, respectivamente. Entonces la continuidad de f es equivalente a exigir que dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Demostración. Supongamos que f es continua. Dados x y ϵ, consideramos el conjunto

$$f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$$

que es abierto en X y contiene al punto x. Contiene alguna bola $B(x, \delta)$ centrada en x. Si y está en esta bola, entonces $f(y)$ está en la bola centrada en $f(x)$, como se deseaba.

Recíprocamente, supongamos que se satisface la condición ϵ-δ. Sea V abierto en Y; probaremos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Sea x un punto del conjunto $f^{-1}(V)$. Puesto que $f(x) \in V$, existe una bola $B(f(x), \epsilon)$ centrada en $f(x)$ y contenida en V. Por la condición ϵ-δ, existe una bola $B(x, \delta)$ centrada en x tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Entonces $B(x, \delta)$ es un entorno de x contenido en $f^{-1}(V)$, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto, como se deseaba. ■

Volvamos ahora a la definición de continuidad mediante sucesiones convergentes. Empezaremos por considerar la relación entre sucesiones convergentes y clausuras de conjuntos. Es ciertamente creíble, a partir de la experiencia que se tiene en análisis, que si x pertenece a la clausura de un subconjunto A del espacio X, entonces debería existir una sucesión de puntos de A que converge a x. Esto no es cierto en general, pero es cierto para espacios metrizables.

Lema 21.2 (El lema de la sucesión). *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x, entonces $x \in \bar{A}$; el recíproco se cumple si X es metrizable.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$, donde $x_n \in A$. Entonces cada entorno U de x contiene un punto de A, por lo que $x \in \bar{A}$ por el Teorema 17.5. Recíprocamente, supongamos que X es metrizable y que $x \in \bar{A}$. Sea d una distancia para la topología de X. Para cada entero positivo n, tomemos el entorno $B_d(x, 1/n)$ de radio $1/n$ de x, y elijamos x_n como el punto de su intersección con A. Afirmamos que la sucesión x_n converge a x: cualquier conjunto abierto U que contenga a x contiene una bola $B_d(x, \epsilon)$ centrada en x; si elegimos N de forma que $1/N < \epsilon$, entonces U contiene a x_i, para todo $i \geq N$. ■

Teorema 21.3. *Sea $f : X \to Y$. Si la función f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es metrizable.*

Demostración. Supongamos que f es continua. Dada $x_n \to x$, queremos probar que $f(x_n) \to f(x)$. Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es un entorno de x, y por lo tanto existe un N tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para $n \geq N$. Entonces, $f(x_n) \in V$ para $n \geq N$.

Para probar el recíproco, supongamos que la condición de sucesión convergente se satisface. Sea A un subconjunto de X; vamos a demostrar que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Si $x \in \bar{A}$, entonces existe una sucesión x_n de puntos de A que converge a x (por el lema anterior). Por hipótesis, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. Puesto que $f(x_n) \in f(A)$, el lema anterior implica que $f(x) \in \overline{f(A)}$ (observe que no se necesita la metrizabilidad de Y). De aquí $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, como se deseaba. ∎

A propósito, en la demostración del Lema 21.2 y el Teorema 21.3, no hemos utilizado en su totalidad la hipótesis de que el espacio X es metrizable. Todo lo que necesitábamos en realidad era la colección numerable $B_d(x, 1/n)$ de bolas alrededor de x. Este hecho nos lleva a enunciar una nueva definición.

Un espacio X se dice que tiene una ***base numerable en el punto*** x si existe una colección numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de entornos de x tales que cualquier entorno U de x contiene *al menos uno* de los conjuntos U_n. Un espacio X que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el ***primer axioma de numerabilidad***.

Si X tiene una base numerable $\{U_n\}$ en x, entonces la prueba del Lema 21.2 sigue valiendo; simplemente se reemplaza la bola $B_d(x, 1/n)$ por el conjunto

$$B_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n.$$

La prueba del Teorema 21.3 es válida sin ningún cambio.

Un espacio metrizable siempre satisface el primer axioma de numerabilidad, pero el recíproco no es cierto, como veremos. Como el axioma de Hausdorff, el primer axioma de numerabilidad es una condición que algunas veces impondremos sobre un espacio topológico para probar teoremas más fuertes sobre el espacio. Lo estudiaremos con más detalle en el Capítulo 4.

Ahora consideraremos métodos adicionales para construir funciones continuas. Necesitamos el siguiente lema:

Lema 21.4. *Las operaciones de adición, sustracción y multiplicación son funciones continuas de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$, *y la operación cociente es una función continua de* $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ *en* $\mathbb{R}$.

Probablemente ya habrá visto antes este lema y su demostración; es un "argumento ϵ-δ" usual. Si no, se dan las ideas de una prueba en el Ejercicio 12 próximo; no debería tener problemas en completar los detalles que faltan.

Teorema 21.5. *Si X es un espacio topológico, y si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces $f + g$, $f - g$, y $f \cdot g$ son continuas. Si $g(x) \neq 0$ para todo x, entonces f/g es continua.*

Demostración. La aplicación $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(x) \times g(x)$$

es continua, por el Teorema 18.4. La función $f + g$ es igual a la composición de h con la operación de adición

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

de lo que se deduce que $f + g$ es continua. Se aplican similares argumentos a $f - g$, $f \cdot g$, y f/g. ■

Finalmente, llegamos a la noción de convergencia uniforme.

Definición. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones del conjunto X al espacio métrico Y. Sea d la distancia para Y. Diremos que la sucesión (f_n) ***converge uniformemente*** a la función $f : X \to Y$ si, dado $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

para todo $n > N$ y todo x en X.

La convergencia uniforme depende no sólo de la topología de Y, sino también de su distancia. Tenemos el siguiente teorema sobre sucesiones uniformemente convergentes:

Teorema 21.6 (El teorema del límite uniforme). *Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas del espacio topológico X al espacio métrico Y. Si (f_n) converge uniformemente a f, entonces f es continua.*

Demostración. Sea V abierto en Y y sea x_0 un punto de $f^{-1}(V)$. Deseamos encontrar un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset V$.

Sea $y_0 = f(x_0)$. En primer lugar, elijamos ϵ tal que la bola $B(y_0, \epsilon)$ esté contenida en V. Entonces, usando la convergencia uniforme, elegimos N tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$,

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3.$$

Finalmente, usando la continuidad de f_N, elegimos un entorno U de x_0 tal que f_N aplica U en la bola de radio $\epsilon/3$ en Y centrada en $f_N(x_0)$.

Afirmamos que f lleva U a $B(y_0, \epsilon)$, y de aquí, a V, como se deseaba. Para este propósito, obsérvese que si $x \in U$, entonces

$$\begin{aligned} d(f(x), f_N(x)) &< \epsilon/3 \text{ (por la elección de } N), \\ d(f_N(x), f_N(x_0)) &< \epsilon/3 \text{ (por la elección de } U), \\ d(f_N(x_0), f(x_0)) &< \epsilon/3 \text{ (por la elección de } N). \end{aligned}$$

Sumando y usando la desigualdad triangular, vemos que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, como se deseaba. ■

Pongamos especial atención en que la noción de convergencia uniforme está relacionada con la definición de distancia uniforme, que dimos en la sección anterior. Consideremos, por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}^X$ de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$, en la distancia uniforme $\bar{\rho}$. No es difícil ver que la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a f si, y sólo si, la sucesión (f_n) converge a f cuando se consideran como elementos del espacio métrico $(\mathbb{R}^X, \bar{\rho})$. Dejamos la demostración para los ejercicios.

Concluimos la sección con algunos ejemplos de espacios que no son metrizables.

EJEMPLO 1. $\mathbb{R}^\omega$ *con la topología por cajas no es metrizable.*

Probaremos que el lema de la sucesión no se cumple para $\mathbb{R}^\omega$. Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por aquellos puntos cuyas coordenadas son todas positivas:

$$A = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i > 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Sea $\mathbf{0}$ el "origen" en $\mathbb{R}^\omega$, esto es, el punto $(0, 0, \dots)$ con cada una de sus coordenadas cero. En la topología por cajas, $\mathbf{0}$ pertenece a $\bar{A}$; por lo que si

$$B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots$$

es cualquier elemento básico que contiene a $\mathbf{0}$, entonces B interseca a A. Por ejemplo, el punto

$$(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \dots)$$

pertenece a $B \cap A$.

Pero afirmamos que no existe sucesión alguna de puntos de A que converja a $\mathbf{0}$. Sea $(\mathbf{a}_n)$ una sucesión de puntos de A, donde

$$\mathbf{a}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{in}, \dots).$$

Cada coordenada x_{in} es positiva, por lo que podemos construir un elemento básico B' para la topología por cajas sobre $\mathbb{R}$ haciendo

$$B' = (-x_{11}, x_{11}) \times (-x_{22}, x_{22}) \times \cdots.$$

Entonces B' contiene al origen $\mathbf{0}$, pero no contiene término alguno de la sucesión $(\mathbf{a}_n)$; el punto $\mathbf{a}_n$ no puede pertenecer a B' porque su coordenada n-ésima x_{nn} no pertenece al intervalo $(-x_{nn}, x_{nn})$. De aquí se deduce que la sucesión $(\mathbf{a}_n)$ no puede converger a $\mathbf{0}$ en la topología por cajas.

EJEMPLO 2. *Un producto no numerable de* $\mathbb{R}$ *consigo mismo no es metrizable.*

Sea J un conjunto de índices no numerable; probaremos que $\mathbb{R}^J$ no satisface el lema de la sucesión (en la topología producto).

Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^J$ formado por todos los puntos (x_α) tales que $x_\alpha = 1$ para todos los valores de α excepto para un número finito. Sea $\mathbf{0}$ el "origen" de $\mathbb{R}^J$, es decir, el punto que tiene todas las coordenadas iguales a 0.

Afirmamos que $\mathbf{0}$ pertenece a la clausura de A. Sea $\prod U_\alpha$ un elemento básico conteniendo a $\mathbf{0}$. Entonces $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ únicamente para un número finito de α, digamos para $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sea (x_α) el punto de A definido al hacer $x_\alpha = 0$ para $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $x_\alpha = 1$ para el resto de valores de α; entonces $(x_\alpha) \in A \cap \prod U_\alpha$, como se deseaba.

Pero no existe sucesión alguna de puntos de A que converja a $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{a}_n$ una sucesión de puntos de A. Dado n, denotemos por J_n al subconjunto de J formado por aquellos índices α para los cuales la coordenada α-ésima de $\mathbf{a}_n$ es distinta de 1. La unión de todos los conjuntos J_n es una unión numerable de conjuntos finitos y, por tanto, es numerable. Puesto que el propio J es no numerable, existe un índice en J, digamos β, que no pertenece a ningún J_n. Esto significa que para *cada uno* de los puntos $\mathbf{a}_n$, su coordenada β-ésima es igual a 1.

Sea ahora U_β el intervalo abierto $(-1, 1)$ en $\mathbb{R}$, y sea U el conjunto abierto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ en $\mathbb{R}^J$. El conjunto U es un entorno de $\mathbf{0}$ que no contiene ninguno de los puntos de $\mathbf{a}_n$, por consiguiente, la sucesión $\mathbf{a}_n$ no puede converger a $\mathbf{0}$.

Ejercicios

1. Sea $A \subset X$. Si d es una distancia para la topología de X, pruebe que $d \mid A \times A$ es una distancia para la topología de subespacio sobre A.

2. Sean X e Y espacios métricos con distancias d_X y d_Y, respectivamente. Sea $f : X \to Y$ con la propiedad de que para cada par de puntos x_1, x_2 de X,

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Pruebe que f es un embebimiento. Se denomina ***embebimiento isométrico*** de X en Y.

3. Sea X_n un espacio métrico con distancia d_n, para $n \in \mathbb{Z}_+$.

(a) Pruebe que

$$\rho(x, y) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

es una distancia para el espacio producto $X_1 \times \cdots \times X_n$.

(b) Sea $\bar{d}_i = \text{mín}\{d_i, 1\}$. Pruebe que

$$D(x, y) = \sup\{\bar{d}_i(x_i, y_i)/i\}$$

es una distancia para el espacio producto $\prod X_i$.

4. Pruebe que $\mathbb{R}_\ell$ y el cuadrado ordenado satisfacen el primer axioma de numerabilidad (este resultado no implica, por supuesto, que sean metrizables).

5. *Teorema.* *Sean $x_n \to x$ e $y_n \to y$ en el espacio $\mathbb{R}$. Entonces*

$$x_n + y_n \to x + y,$$
$$x_n - y_n \to x - y,$$
$$x_n y_n \to xy,$$

y siempre que cada $y_n \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$x_n / y_n \to x/y.$$

[*Indicación:* aplique el Lema 21.4 y recuerde, de los ejercicios de §19, que si $x_n \to x$ e $y_n \to y$, entonces $x_n \times y_n \to x \times y$.]

6. Definamos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por la ecuación $f_n(x) = x^n$. Pruebe que la sucesión $(f_n(x))$ converge para cada $x \in [0,1]$, pero que la sucesión (f_n) no converge uniformemente.

7. Sea X un conjunto, y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Sea $\bar{\rho}$ la distancia uniforme sobre el espacio $\mathbb{R}^X$. Pruebe que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la función $f : X \to \mathbb{R}$ si, y solamente si, la sucesión (f_n) converge a f como elementos del espacio métrico $(\mathbb{R}^X, \bar{\rho})$.

8. Sea X un espacio topológico y sea Y un espacio métrico. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas. Sea x_n una sucesión de puntos de X convergente a x. Pruebe que si la sucesión (f_n) converge uniformemente a f, entonces $(f_n(x_n))$ converge a $f(x)$.

9. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3[x - (1/n)]^2 + 1}.$$

Véase la Figura 21.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función nula.

(a) Pruebe que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que f_n no converge uniformemente a f (esto muestra que el recíproco del Teorema 21.6 no se cumple; la función límite f debe ser continua incluso cuando la convergencia no es uniforme).

10. Usando la formulación de continuidad por conjuntos cerrados (Teorema 18.1), pruebe que los siguientes subconjuntos son cerrados en $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{x \times y \mid xy = 1\},$$
$$S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\},$$
$$B^2 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

El conjunto B^2 se denomina ***bola unidad*** (cerrada) en $\mathbb{R}^2$.

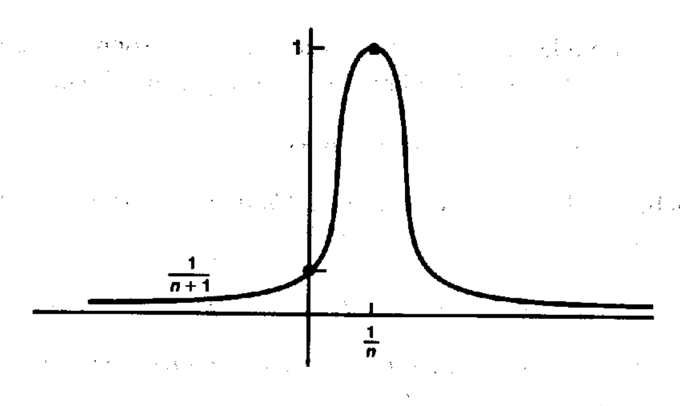


Figura 21.1

11. Pruebe los siguientes hechos usuales sobre series infinitas:

(a) Pruebe que si (s_n) es una sucesión acotada de números reales y $s_n \leq s_{n+1}$ para cada n, entonces (s_n) converge.

(b) Sea (a_n) una sucesión de números reales; definimos

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Si $s_n \to s$, decimos que la ***serie infinita***

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

converge también a s. Pruebe que si $\sum a_i$ converge a s y $\sum b_i$ converge a t, entonces $\sum(ca_i + b_i)$ converge a $cs + t$.

(c) Pruebe el ***test de comparación*** para series infinitas: si $|a_i| \leq b_i$ para cada i y la serie $\sum b_i$ converge, entonces la serie $\sum a_i$ también converge. [*Indicación:* pruebe que las series $\sum |a_i|$ y $\sum c_i$ convergen, donde $c_i = |a_i| + a_i$.]

(d) Dada una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$, sea

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Demuestre el ***test-M de Weierstrass*** para la convergencia uniforme: si $|f_i(x)| \leq M_i$ para todo $x \in X$ y todo i, y si la serie $\sum M_i$ converge, entonces la sucesión (s_n) converge uniformemente a una función s. [*Indicación:* sea $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i$. Pruebe que si $k > n$, entonces $|s_k(x) - s_n(x)| \leq r_n$; concluya que $|s(x) - s_n(x)| \leq r_n$.]

12. Pruebe la continuidad de las operaciones algebraicas sobre $\mathbb{R}$, como sigue: use la distancia $d(a,b) = |a - b|$ sobre $\mathbb{R}$ y la distancia en $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación

$$\rho((x,y),(x_0,y_0)) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}.$$

(a) Pruebe que la adición es continua. [*Indicación:* dado ϵ, tome $\delta = \epsilon/2$ y observe que

$$d(x + y, x_0 + y_0) \leq |x - x_0| + |y - y_0|.]$$

(b) Pruebe que la multiplicación es continua. [*Indicación:* dado (x_0, y_0) y $0 < \epsilon < 1$, tome

$$3\delta = \epsilon/(|x_0| + |y_0| + 1)$$

y observe que

$$d(xy, x_0y_0) \leq |x_0|\,|y - y_0| + |y_0|\,|x - x_0| + |x - x_0|\,|y - y_0|.]$$

(c) Pruebe que la operación de tomar inversos es una aplicación continua de $\mathbb{R} - \{0\}$ a $\mathbb{R}$. [*Indicación:* pruebe que la imagen inversa del intervalo (a, b) es abierto. Considere cinco casos, según sean a y b positivos, negativos o cero.]

(d) Pruebe que las operaciones de sustracción y cociente son continuas.

*§22 La topología cociente†

A diferencia de las topologías que ya hemos considerado en este capítulo, la topología cociente no es una generalización natural de algo que ya se haya estudiado en análisis. No obstante, es lo suficientemente sencilla para motivar. Una motivación es la que nos da la geometría, donde a menudo tenemos ocasión de utilizar técnicas de "cortar-y-pegar" para construir objetos geométricos tales como superficies. El *toro* (superficie de un donut), por ejemplo, se puede construir tomando un rectángulo y "pegando" sus aristas apropiadamente, como en la Figura 22.1. Y la *esfera* (superficie de una pelota) se puede construir tomando un disco y plegando su borde completo hasta tener un único punto (véase la Figura 22.2). La formalización de estas construcciones implica el concepto de topología cociente.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una ***aplicación cociente*** siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

†Esta sección se usará a lo largo de la Parte II del libro. También se referirán a ella algunos ejercicios de la Parte I.

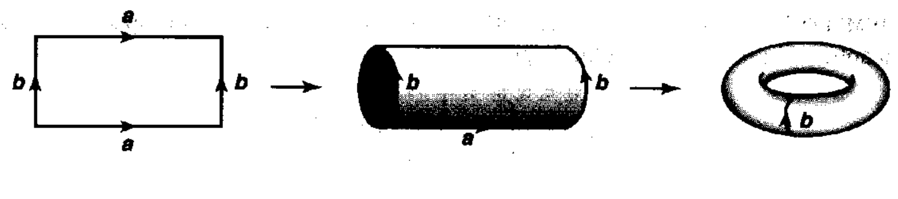


Figura 22.1

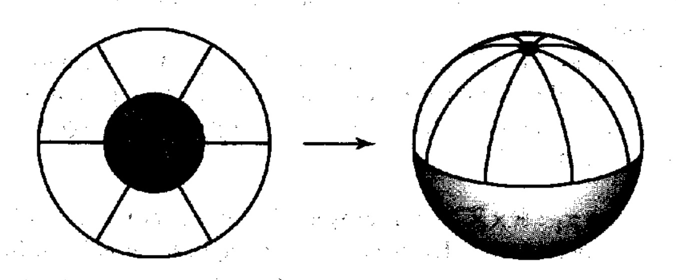


Figura 22.2

Esta condición es más fuerte que la de continuidad; algunos matemáticos la llaman "continuidad fuerte". Una condición equivalente es requerir que un subconjunto A de Y sea cerrado en Y si, y sólo si, $p^{-1}(A)$ es cerrado en X. La equivalencia de las dos condiciones se sigue de la ecuación

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B).$$

Otro modo de describir una aplicación cociente es el siguiente: diremos que un subconjunto C de X es ***saturado*** (respecto a la aplicación sobreyectiva $p : X \to Y$) si C contiene a cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ al que interseca. Así C es saturado si es igual a la imagen inversa completa de un subconjunto de Y. Decir que p es una aplicación cociente es equivalente a decir que p es continua y p asocia conjuntos abiertos *saturados* de X con conjuntos abiertos de Y (o conjuntos saturados cerrados de X con conjuntos cerrados de Y).

Dos clases especiales de aplicaciones cociente son las *aplicaciones abiertas* y las *aplicaciones cerradas*. Recordemos que una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es una ***aplicación abierta*** si para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y. Se dice que es una ***aplicación cerrada*** si para cada conjunto cerrado A de X, el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y. Se sigue inmediatamente de la definición que si $p : X \to Y$ es una aplicación continua sobreyectiva que es abierta o cerrada, entonces p es una aplicación cociente. Existen aplicaciones cociente que no son abiertas ni cerradas (véase el Ejercicio 3).

3 EJEMPLO 1. Sea X el subespacio $[0,1] \cup [2,3]$ de $\mathbb{R}$ y sea Y el subespacio $[0,2]$ de $\mathbb{R}$. La aplicación $p : X \rightarrow Y$ definida por

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{para } x \in [2,3] \end{cases}$$

se ve inmediatamente que es sobreyectiva, continua y cerrada. Por tanto, es una aplicación cociente. Sin embargo, no es una aplicación abierta; la imagen del conjunto abierto $[0,1]$ de X no es abierta en Y.

Obsérvese además que si A es el subespacio $[0,1) \cup [2,3]$ de X, entonces la aplicación $q : A \rightarrow Y$ obtenida al restringir p es continua y sobreyectiva, pero no es una aplicación cociente. En efecto, el conjunto $[2,3]$ es abierto en A y es saturado con respecto a q, pero su imagen no es abierta en Y.

EJEMPLO 2. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada; entonces π_1 es continua y sobreyectiva. Es más, π_1 es una aplicación abierta. Si $U \times V$ es un elemento básico no vacío para $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces $\pi_1(U \times V) = U$ es abierto en $\mathbb{R}$; se sigue que π_1 lleva conjuntos abiertos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Sin embargo, π_1 no es una aplicación cerrada. El subconjunto

$$C = \{x \times y \mid xy = 1\}$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es cerrado, pero $\pi_1(C) = \mathbb{R} - \{0\}$, que no es cerrado en $\mathbb{R}$.

Nótese que si A es el subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que es la unión de C y el origen $\{\mathbf{0}\}$, entonces la aplicación $q : A \rightarrow \mathbb{R}$ obtenida al restringir π_1 es continua y sobreyectiva, pero no es una aplicación cociente. En efecto, el conjunto unipuntual $\{\mathbf{0}\}$ es abierto en A y es saturado con respecto a q, pero su imagen no es abierta en $\mathbb{R}$.

Ahora mostramos cómo la noción de aplicación cociente se puede usar para construir una topología sobre un conjunto.

Definición. Si X es un espacio, A un *conjunto* y $p : X \rightarrow A$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología $\mathcal{T}$ sobre A relativa a la cual p es una aplicación cociente; se denomina ***topología cociente*** inducida por p.

La topología $\mathcal{T}$ está definida, por supuesto, reuniendo aquellos subconjuntos U de A tales que $p^{-1}(U)$ es abierto en X. Es fácil comprobar que $\mathcal{T}$ es una topología. Los conjuntos $\varnothing$ y A son abiertos porque $p^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $p^{-1}(A) = X$. Las otras dos condiciones se siguen de las ecuaciones

$$p^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in J} p^{-1}(U_\alpha),$$

$$p^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i).$$

EJEMPLO 3. Sea p la aplicación de la recta real $\mathbb{R}$ sobre el conjunto de tres puntos $A = \{a, b, c\}$ definida por

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Puede comprobar que la topología cociente sobre A inducida por p es la que se indica en la Figura 22.3.

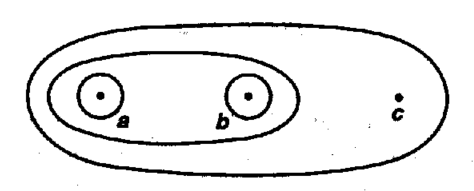


Figura 22.3

Hay una situación especial en la que la topología cociente es particularmente frecuente de encontrar. Es la siguiente:

Definición. Sea X un espacio topológico y sea X^* una partición de X en subconjuntos disjuntos cuya unión es X. Sea $p : X \to X^*$ la aplicación sobreyectiva que lleva cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. En la topología cociente inducida por p, el espacio X^* se denomina ***espacio cociente*** de X.

Dado X^*, hay una relación de equivalencia sobre X en la que los elementos de X^* son las clases de equivalencia. Se puede pensar en X^* como obtenido al "identificar" cada par de puntos equivalentes. Por este motivo, el espacio cociente X^* se denomina a menudo *espacio de identificación*, o *espacio de descomposición*, del espacio X.

Podemos describir la topología de X^* de otro modo. Un subconjunto U de X^* es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $p^{-1}(U)$ es justo la unión de las clases de equivalencia que pertenecen a U. Así, el conjunto abierto característico de X^* es una colección de clases de equivalencia cuya *unión* es un conjunto abierto de X.

EJEMPLO 4. Sea X la bola unitaria cerrada

$$\{x \times y \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

en $\mathbb{R}^2$, y sea X^* la partición de X formada por todos los conjuntos unipuntuales $\{x \times y\}$ para los que $x^2 + y^2 < 1$, junto con el conjunto $S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Los conjuntos abiertos saturados característicos en X son los que están dibujados como regiones rayadas en la Figura 22.4. Se puede probar que X^* es homeomorfo al subespacio de $\mathbb{R}^3$ llamado la ***2-esfera unidad***, definida por

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

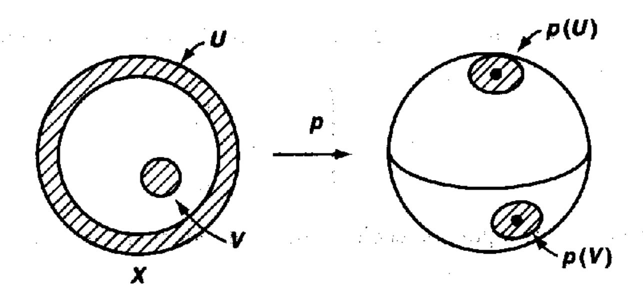


Figura 22.4

EJEMPLO 5. Sea X el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$. Definimos una partición X^* de X como sigue: consiste en todos los conjuntos unipuntuales $\{x \times y\}$ donde $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, los siguientes tipos de conjuntos de dos puntos:

$$\{x \times 0, x \times 1\} \qquad \text{donde } 0 < x < 1,$$
$$\{0 \times y, 1 \times y\} \qquad \text{donde } 0 < y < 1,$$

y el conjunto de cuatro puntos

$$\{0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1\}.$$

Los conjuntos abiertos saturados característicos de X son los que están dibujados como regiones rayadas en la Figura 22.5; cada uno es un conjunto abierto de X que es igual a la unión de elementos de X^*.

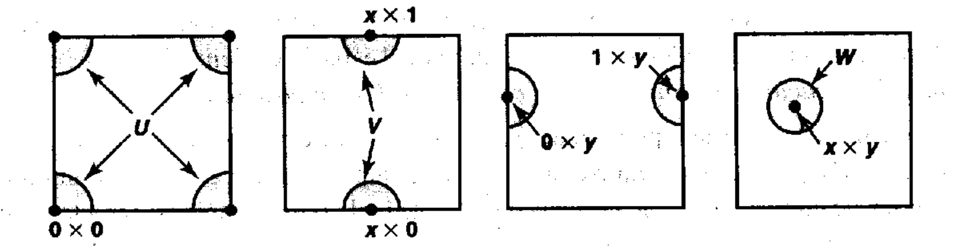


Figura 22.5

La imagen de cada uno de estos conjuntos bajo p es un conjunto abierto de X^*, como se indica en la Figura 22.6. Esta descripción de X^* es exactamente la forma matemática de decir lo que expresamos en los dibujos cuando pegábamos las aristas de un rectángulo para formar un toro.

Ahora examinaremos la relación entre las nociones de aplicación cociente y espacio cociente y los conceptos introducidos previamente. Es interesante observar que esta relación no es tan simple como uno podría desear.

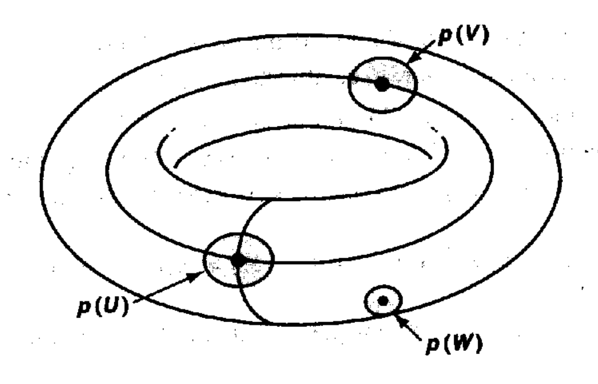


Figura 22.6

Ya hemos observado que los *subespacios* no se comportan bien; si $p : X \to Y$ es una aplicación cociente y A es un subespacio de X, entonces la aplicación obtenida al restringir p, $q : A \to p(A)$, no es necesariamente una aplicación cociente. Sin embargo, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 22.1. *Sean $p : X \to Y$ una aplicación cociente, A un subespacio de X que es saturado con respecto a p y $q : A \to p(A)$ la aplicación obtenida al restringir p.*

(1) *Si A es abierto o cerrado en X, entonces q es una aplicación cociente.*

*(2) *Si p es una aplicación abierta o cerrada, entonces q es una aplicación cociente.*

Demostración. *Paso 1*. En primer lugar comprobaremos las dos siguientes ecuaciones:

$$q^{-1}(V) = p^{-1}(V) \qquad \text{si } V \subset p(A),$$
$$p(U \cap A) = p(U) \cap p(A) \qquad \text{si } U \subset X.$$

Para comprobar la primera ecuación, observamos que, como $V \subset p(A)$ y A es saturado, $p^{-1}(V)$ está contenido en A. Se sigue que tanto $p^{-1}(V)$ como $q^{-1}(V)$ son todos los puntos de A que son aplicados por p en V. Para comprobar la segunda ecuación, nótese que para cualesquiera dos subconjuntos U y A de X, tenemos la inclusión

$$p(U \cap A) \subset p(U) \cap p(A).$$

Para probar la inclusión inversa, supongamos que $y = p(u) = p(a)$, para $u \in U$ y $a \in A$. Puesto que A es saturado, A contiene al conjunto $p^{-1}(p(a))$, por lo que A, en particular, contiene a u. Entonces $y = p(u)$, donde $u \in U \cap A$.

Paso 2. Ahora supongamos que A es abierto o que p es abierta. Dado el subconjunto V de $p(A)$, suponemos que $q^{-1}(V)$ es abierto en A y vamos a probar que V es abierto en $p(A)$.

Supongamos primero que A es abierto. Como $q^{-1}(V)$ es abierto en A y A es abierto en X, entonces $q^{-1}(V)$ es abierto en X. Puesto que $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$, el

segundo conjunto es abierto en X, por lo que V es abierto en Y ya que p es una aplicación cociente. En particular, V es abierto en $p(A)$.

Supongamos ahora que p es abierta. Puesto que $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ y $q^{-1}(V)$ es abierto en A, tenemos que $p^{-1}(V) = U \cap A$ para algún conjunto U abierto en X. Ahora bien, $p(p^{-1}(V)) = V$ puesto que p es sobreyectiva; entonces

$$V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) = p(U) \cap p(A).$$

El conjunto $p(U)$ es abierto en Y porque p es una aplicación abierta; de aquí, V es abierto en $p(A)$.

Paso 3. La prueba cuando A o p son cerrados se obtiene reemplazando la palabra "abierto" por la palabra "cerrado" en todo el Paso 2. ■

A continuación consideramos otros conceptos introducidos previamente. *Las composiciones de aplicaciones* se comportan bien; es fácil comprobar que la composición de dos aplicaciones cociente es una aplicación cociente; este hecho se sigue de la ecuación

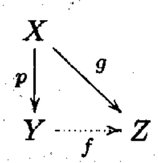
$$p^{-1}(q^{-1}(U)) = (q \circ p)^{-1}(U).$$

Por otro lado, *los productos de aplicaciones* no se comportan bien; el producto cartesiano de dos aplicaciones cociente no necesita ser una aplicación cociente. Véase el Ejemplo 7 siguiente. Se necesitan imponer más condiciones en las aplicaciones o en los espacios para que este hecho sea cierto. Una de ellas, una condición sobre los espacios, se llama *compacidad local*, que estudiaremos más adelante. Otra, una condición para las aplicaciones, es la condición de que las aplicaciones p y q sean aplicaciones abiertas. En ese caso, es fácil ver que $p \times q$ es también una aplicación abierta, por lo que es una aplicación cociente.

Finalmente, la *condición de Hausdorff* no se comporta bien; incluso si X es de Hausdorff, no existe razón alguna para que el espacio cociente X^* tenga que ser de Hausdorff. Hay una condición simple para que X^* satisfaga el axioma T_1; simplemente se pide que cada elemento de la partición X^* sea un subconjunto cerrado de X. Las condiciones que asegurarán que X^* sea de Hausdorff son más difíciles de encontrar. Esta es una de las cuestiones más delicadas sobre espacios cociente; volveremos a ella en varias ocasiones a lo largo del libro.

Quizás el resultado más importante en el estudio de espacios cociente tiene que ver con el problema de construir *funciones continuas* sobre un espacio cociente. Consideramos este problema a continuación. Cuando estudiamos espacios producto, teníamos un criterio para determinar si una aplicación $f : Z \to \prod X_\alpha$ *en* un espacio producto era continua. Su homólogo en la teoría de espacios cociente es un criterio para determinar cuándo una aplicación $f : X^* \to Z$ *que parte de* un espacio cociente es continua. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 22.2. *Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Sea Z un espacio y sea $g : X \to Z$ una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$, para $y \in Y$. Entonces g induce una aplicación $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$. La aplicación inducida f es continua si, y sólo si, g es continua; f es una aplicación cociente si, y sólo si, g es una aplicación cociente.*



Demostración. Para cada $y \in Y$, el conjunto $g(p^{-1}(\{y\}))$ es un conjunto unipuntual en Z (puesto que g es constante sobre $p^{-1}(\{y\})$). Si denotamos por $f(y)$ a este punto, entonces hemos definido una aplicación $f : Y \to Z$ tal que para cada $x \in X$, $f(p(x)) = g(x)$. Si f es continua, entonces $g = f \circ p$ es continua. Recíprocamente, supongamos que g es continua. Dado un conjunto abierto V de Z, $g^{-1}(V)$ es abierto en X. Pero $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$; como p es una aplicación cociente, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en Y. De aquí, f es continua.

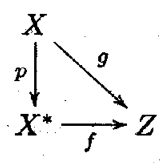
Si f es una aplicación cociente, entonces g es la composición de dos aplicaciones cociente y es así una aplicación cociente. Recíprocamente, supongamos que g es una aplicación cociente. Puesto que g es sobreyectiva, también lo es f. Sea V un subconjunto de Z; probaremos que V es abierto en Z si $f^{-1}(V)$ es abierto en Y. Ahora el conjunto $p^{-1}(f^{-1}(V))$ es abierto en X porque p es continua. Puesto que este conjunto es igual a $g^{-1}(V)$, este último es abierto en X. Entonces, como g es una aplicación cociente, V es abierto en Z. ■

Corolario 22.3. *Sea $g : X \to Z$ una aplicación continua sobreyectiva. Sea X^* la siguiente colección de subconjuntos de X:*

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}.$$

Dotemos a X^* de la topología cociente.

(a) *La aplicación g induce una aplicación continua biyectiva $f : X^* \to Z$, que es un homeomorfismo si, y sólo si, g es una aplicación cociente.*



(b) *Si Z es de Hausdorff, también lo es X^*.*

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que g induce una aplicación continua $f : X^* \to Z$; está claro que f es biyectiva. Supongamos que f es un homeomorfismo. Entonces, tanto f como la aplicación proyección $p : X \to X^*$ son aplicaciones cociente, por lo que su composición q es una aplicación cociente. Recíprocamente, supongamos que g es una aplicación cociente. Entonces se sigue del teorema anterior que f es una aplicación cociente. Al ser biyectiva, f es así un homeomorfismo.

Supongamos que Z es de Hausdorff. Dados puntos distintos de X^*, sus imágenes bajo f son distintas y así poseen entornos disjuntos U y V. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son entornos disjuntos de los dos puntos dados de X^*. ■

EJEMPLO 6. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que es la unión de los segmentos de recta $[0,1] \times \{n\}$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, y sea Z el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por todos los puntos de la forma $x \times (x/n)$ para $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Entonces X es la unión de un conjunto numerable de segmentos de recta disjuntos, y Z es la unión de un conjunto numerable de segmentos de recta con un punto final en común (véase la Figura 22.7).

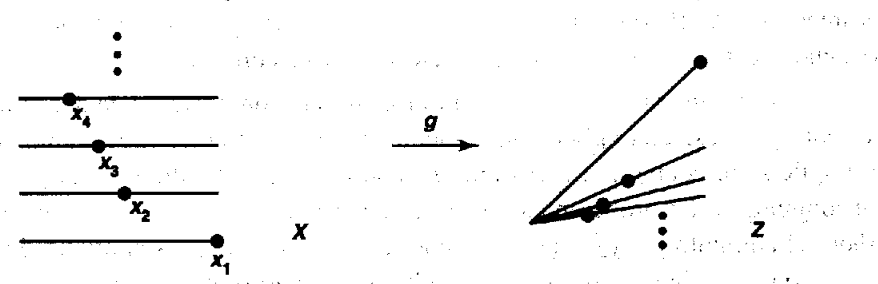


Figura 22.7

Definamos una aplicación $g : X \to Z$ por la ecuación $g(x \times n) = x \times (x/n)$; entonces g es sobreyectiva y continua. El espacio cociente X^* cuyos elementos son los conjuntos $g^{-1}(\{z\})$ es simplemente el espacio obtenido de X al identificar el subconjunto $\{0\} \times \mathbb{Z}_+$ con un punto. La aplicación g induce una aplicación continua biyectiva $f : X^* \to Z$. Pero f *no* es un homeomorfismo.

Para verificar este hecho, es suficiente mostrar que g no es una aplicación cociente. Consideremos la sucesión de puntos $x_n = (1/n) \times n$ de X. El conjunto $A = \{x_n\}$ es un subconjunto cerrado de X porque no tiene puntos límite. También es saturado con respecto a g. Por otro lado, el conjunto $g(A)$ no es cerrado en Z, ya que está formado por los puntos $z_n = (1/n) \times (1/n^2)$; este conjunto tiene el origen como punto límite.

EJEMPLO 7. *El producto de dos aplicaciones cociente no necesariamente es una aplicación cociente.*

Presentamos un ejemplo con espacios que no son de Hausdorff en los ejercicios. Aquí tenemos otro con espacios que se comportan mejor.

Sea $X = \mathbb{R}$ y sea X^* el espacio cociente obtenido de X al identificar el subconjunto $\mathbb{Z}_+$ con un punto b; sea $p : X \to X^*$ la aplicación cociente. Sea $\mathbb{Q}$ el subespacio de $\mathbb{R}$ formado por los números racionales y sea $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ la aplicación identidad. Mostraremos

que

$$p \times i : X \times \mathbb{Q} \to X^* \times \mathbb{Q}$$

no es una aplicación cociente.

Para cada n, sea $c_n = \sqrt{2}/n$, y consideremos las líneas rectas en $\mathbb{R}^2$ con pendientes 1 y -1, respectivamente, que pasan por el punto $n \times c_n$. Sea U_n formado por todos los puntos de $X \times \mathbb{Q}$ que están, o bien en la zona superior de estas rectas, o en la zona inferior de ellas, y también entre las rectas verticales $x = n - 1/4$ y $x = n + 1/4$. Entonces U_n es abierto en $X \times \mathbb{Q}$ y contiene al conjunto $\{n\} \times \mathbb{Q}$ porque c_n no es racional (véase la Figura 22.8).

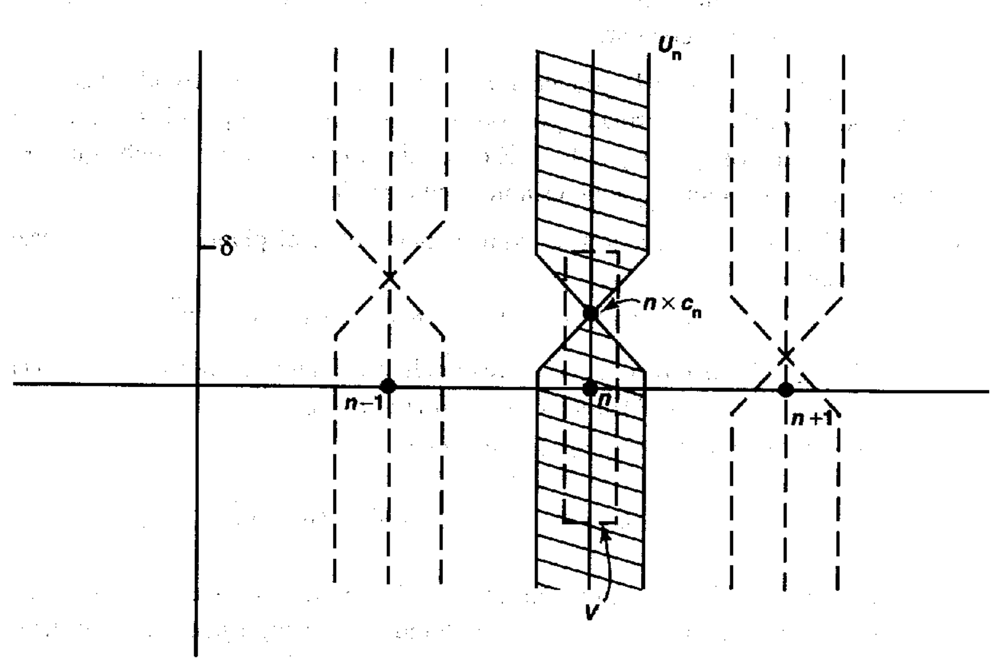


Figura 22.8

Sea U la unión de los conjuntos U_n; entonces U es abierto en $X \times \mathbb{Q}$. Es saturado con respecto a $p \times i$ porque contiene al conjunto entero $\mathbb{Z}_+ \times \{q\}$ para cada $q \in \mathbb{Q}$. Supongamos que $U' = (p \times i)(U)$ es abierto en $X^* \times \mathbb{Q}$ y obtengamos una contradicción.

Puesto que U contiene, en particular, al conjunto $\mathbb{Z}_+ \times 0$, el conjunto U' contiene al punto $b \times 0$. De aquí U' contiene un conjunto abierto de la forma $W \times I_\delta$, donde W es un entorno de b en X^* e I_δ está formado por todos los números racionales y con $|\, y \,| < \delta$. Entonces

$$p^{-1}(W) \times I_\delta \subset U.$$

Elijamos n lo suficientemente grande de modo que $c_n < \delta$. Entonces, puesto que $p^{-1}(W)$ es abierto en X y contiene a $\mathbb{Z}_+$, podemos elegir $\epsilon < 1/4$ de modo que el intervalo $(n - \epsilon, n + \epsilon)$ esté contenido en $p^{-1}(W)$. Entonces U contiene al subconjunto $V = (n - \epsilon, n + \epsilon) \times I_\delta$ de $X \times \mathbb{Q}$. Pero el dibujo aclara que hay muchos puntos $x \times y$ de V que no pertenecen a U. (Uno de ellos es el punto $x \times y$ donde $x = n + \frac{1}{2}\epsilon$ e y es un número racional con $|\, y - c_n \,| < \frac{1}{2}\epsilon$.)

Ejercicios

1. Compruebe los detalles del Ejemplo 3.

2. (a) Sea $p : X \to Y$ una aplicación continua. Pruebe que si existe una aplicación continua $f : Y \to X$ tal que $p \circ f$ es igual a la aplicación identidad de Y, entonces p es una aplicación cociente.

   (b) Si $A \subset X$, una ***retracción*** de X sobre A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Pruebe que una retracción es una aplicación cociente.

3. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada. Sea A el subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formado por todos los puntos $x \times y$ para los que $x \geq 0$ ó $y = 0$ (ó ambos) y sea $q : A \to \mathbb{R}$ obtenida al restringir π_1. Pruebe que q es una aplicación cociente que no es abierta ni cerrada.

4. (a) Definamos una relación de equivalencia sobre el plano $X = \mathbb{R}^2$ como sigue:
$$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1 \qquad \text{si } x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$
   Sea X^* el espacio cociente correspondiente. Es homeomorfo a un espacio conocido: ¿cuál es? [*Indicación:* defina $g(x \times y) = x + y^2$.]

   (b) Repita (a) para la relación de equivalencia
$$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1 \qquad \text{si } x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

5. Sea $p : X \to Y$ una aplicación abierta. Pruebe que si A es abierto en X, entonces la aplicación $q : A \to p(A)$, obtenida al restringir p, es una aplicación abierta.

6. Recordemos que $\mathbb{R}_K$ denota la recta real en la K-topología (véase §13). Sea Y el espacio cociente obtenido de $\mathbb{R}_K$ al reducir el conjunto K a un punto y sea $p : \mathbb{R}_K \to Y$ la aplicación cociente.

   (a) Pruebe que Y satisface el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.

   (b) Pruebe que $p \times p : \mathbb{R}_K \times \mathbb{R}_K \to Y \times Y$ no es una aplicación cociente. [*Indicación:* la diagonal no es cerrada en $Y \times Y$, pero su imagen inversa es cerrada en $\mathbb{R}_K \times \mathbb{R}_K$.]

*Ejercicios complementarios: grupos topológicos

En estos ejercicios consideraremos grupos topológicos y algunas de sus propiedades. La topología cociente toma su nombre de un caso especial que surge cuando uno forma el cociente de un grupo topológico con un subgrupo.

Un ***grupo topológico*** G es un grupo que es también un espacio topológico satisfaciendo el axioma T_1, tal que la aplicación de $G \times G$ a G enviando $x \times y$ a $x \cdot y$, y la aplicación de G a G que envía x a x^{-1}, son aplicaciones continuas. A lo largo de los siguientes ejercicios, denotaremos por G a un grupo topológico.

1. Denotemos por H a un grupo que es también un espacio topológico satisfaciendo el axioma T_1. Pruebe que H es un grupo topológico si, y sólo si, la aplicación de $H \times H$ en H que envía $x \times y$ a $x \cdot y^{-1}$ es continua.

2. Pruebe que los siguientes son grupos topológicos:

   (a) $(\mathbb{Z}, +)$.

   (b) $(\mathbb{R}, +)$.

   (c) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

   (d) $(S^1, \cdot)$, donde tomamos S^1 como el espacio de todos los números complejos z para los que $|z| = 1$.

   (e) El *grupo general lineal* $\mathrm{GL}(n)$, bajo la operación de multiplicación de matrices. ($\mathrm{GL}(n)$ es el conjunto de todas las matrices de orden n por n no singulares, con la topología de subespacio al considerarlas como un subconjunto del espacio euclídeo de dimensión n^2 de forma obvia.)

3. Sea H un subespacio de G. Pruebe que si H es también un subgrupo de G, entonces tanto H como $\bar{H}$ son grupos topológicos.

4. Sea α un elemento de G. Pruebe que las aplicaciones $f_\alpha, g_\alpha : G \to G$ definidas por

$$f_\alpha(x) = \alpha \cdot x \qquad \text{y} \qquad g_\alpha(x) = x \cdot \alpha$$

   son homeomorfismos de G. Concluya que G es un *espacio homogéneo* (esto significa que para cada par x, y de puntos de G, existe un homeomorfismo de G sobre él mismo que lleva x a y).

5. Sea H un subgrupo de G. Si $x \in G$, definimos $xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$; este conjunto se denomina ***clase por la izquierda*** de H en G. Denotemos por G/H a la colección de clases por la izquierda de H en G, que es una partición de G. Dotemos a G/H de la topología cociente.

   (a) Pruebe que, si $\alpha \in G$, la aplicación f_α del ejercicio anterior induce un homeomorfismo de G/H que lleva a xH sobre $(\alpha \cdot x)H$. Concluya que G/H es un espacio homogéneo.

   (b) Pruebe que si H es un conjunto cerrado en la topología de G, entonces los conjuntos unipuntuales son cerrados en G/H.

   (c) Pruebe que la aplicación cociente $p : G \to G/H$ es abierta.

   (d) Pruebe que si H es cerrado en la topología de G y es un subgrupo normal de G, entonces G/H es un grupo topológico.

6. Los enteros $\mathbb{Z}$ son un subgrupo normal de $(\mathbb{R}, +)$. El cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un grupo topológico conocido: ¿cuál es?

7. Si A y B son subconjuntos de G, denotemos por $A \cdot B$ al conjunto de todos los puntos $a \cdot b$ para $a \in A$ y $b \in B$, y representemos por A^{-1} al conjunto de todos los puntos a^{-1}, para $a \in A$.

(a) Un entorno V del elemento identidad e se dice que es ***simétrico*** si verifica que $V = V^{-1}$. Si U es un entorno de e, pruebe que existe un entorno simétrico V de e tal que $V \cdot V \subset U$. [*Indicación:* si W es un entorno de e, entonces $W \cdot W^{-1}$ es simétrico.]

(b) Pruebe que G es de Hausdorff. De hecho, pruebe que si $x \neq y$ existe un entorno V de e tal que $V \cdot x$ y $V \cdot y$ son disjuntos.

(c) Pruebe que G satisface el siguiente axioma de separación, que se denomina ***axioma de regularidad***: dado un conjunto cerrado A y un punto x que no está en A, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y a x, respectivamente. [*Indicación:* existe un entorno V de e tal que $V \cdot x$ y $V \cdot A$ son disjuntos.]

(d) Sea H un subgrupo de G que es cerrado en la topología de G y sea $p : G \to G/H$ la aplicación cociente. Pruebe que G/H satisface el axioma de regularidad. [*Indicación:* examine la prueba de (c) cuando A es saturado.]

Capítulo 3

Conexión y compacidad

En el estudio de cálculo elemental existen tres teoremas básicos acerca de funciones continuas sobre los que se apoyan la mayoría de resultados que encontramos en esta materia. Son los siguientes:

Teorema del valor intermedio. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y r es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un elemento $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = r$.

Teorema del valor máximo. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe un elemento $c \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para cada $x \in [a,b]$.

Teorema de la continuidad uniforme. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para cada par de números x_1, x_2 de $[a,b]$ verificando $|x_1 - x_2| < \delta$.

Estos tres teoremas se utilizan en otros muchos resultados. Por ejemplo, el teorema del valor intermedio se emplea para construir funciones inversas, tales como $\sqrt[3]{x}$ y arcsen$x$; el teorema del valor máximo se utiliza para probar el teorema del valor medio para derivadas, resultado sobre el que se apoyan los dos *teoremas fundamentales del cálculo*. El teorema de la continuidad uniforme se utiliza, entre otras cosas, para demostrar que cada función continua es integrable.

Hemos hablado de estos tres teoremas como resultados sobre funciones continuas, pero también pueden ser considerados como teoremas sobre funciones definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ de los números reales. Este hecho es realmente decisivo ya que los tres teoremas dependen no sólo de la continuidad de f, sino también de ciertas propiedades que satisface el espacio topológico $[a,b]$.

La propiedad del espacio $[a,b]$ que nos permite enunciar el teorema del valor intermedio se llama *conexión* y la propiedad en la que se apoyan los otros dos resultados se denomina *compacidad*. En este capítulo definiremos estas propiedades para

espacios topológicos arbitrarios y demostraremos las correspondientes versiones de estos teoremas en un contexto más general.

Así como los tres teoremas señalados son fundamentales para cálculo elemental, las nociones de conexión y compacidad son también fundamentales e imprescindibles en análisis, geometría y topología —de hecho, lo son en cualquier contexto en el que la noción de espacio topológico sea en sí misma relevante.

§23 Espacios conexos

La definición de conexión para un espacio topológico es muy natural. Así, se dice que un espacio puede ser "separado" si es posible dividirlo en dos conjuntos abiertos con intersección trivial. En caso contrario, diremos que el espacio es conexo. En términos más precisos, se tiene la siguiente definición.

Definición. Sea X un espacio topológico. Una ***separación*** de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es ***conexo*** si no existe una separación de X.

Obviamente, la conexión es una propiedad topológica, ya que se formula completamente en términos de la colección de los conjuntos abiertos de X. En otras palabras, si X es un espacio conexo, también lo es cualquier espacio homeomorfo a X.

Otro modo de formular la definición de conexión es la siguiente:

> *Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.*

Obsérvese que si A es un subconjunto propio no vacío de X que es a la vez abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X - A$ constituyen una separación de X. Recíprocamente, si U y V forman una separación de X, entonces U es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado.

Para un subespacio Y de un espacio topológico X existe otra manera alternativa de formular la definición de conexión.

Lema 23.1. *Si Y es un subespacio de X, una separación de Y es un par A, B de conjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es Y de modo que ninguno de ellos contiene puntos límite del otro. El espacio Y es conexo si no existe una separación de Y.*

Demostración. Supongamos primero que A, B es una separación de Y. Entonces A es abierto y cerrado en Y. La adherencia de A en Y es el conjunto $\bar{A} \cap Y$ (donde $\bar{A}$ denota la adherencia de A en X). Como A es cerrado en Y, $A = \bar{A} \cap Y$, o lo

que es igual, $\bar{A} \cap B = \varnothing$. Como $\bar{A}$ es la unión de A con sus puntos límite, B no contiene puntos límite de A. Un argumento análogo demuestra que A no contiene puntos límite de B.

Recíprocamente, supongamos que A y B son conjuntos disjuntos no vacíos cuya unión es Y, ninguno de los cuales contiene puntos límite del otro. Entonces se satisface que $\bar{A} \cap B = \varnothing$ y $A \cap \bar{B} = \varnothing$; de esta forma, concluimos que $\bar{A} \cap Y = A$ y $\bar{B} \cap Y = B$. Así, A y B son cerrados en Y y, como $A = Y - B$ y $B = Y - A$, también son abiertos en Y. ■

EJEMPLO 1. Sea X un conjunto con dos elementos dotado de la topología indiscreta. Es obvio que no existe una separación de X, luego X es conexo.

EJEMPLO 2. Sea Y el subespacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son no vacíos y abiertos en Y (aunque no en $\mathbb{R}$) y, de esta forma, constituyen una separación de Y. Por otra parte, obsérvese que ninguno de estos conjuntos contiene puntos límite del otro.

EJEMPLO 3. Sea X el subespacio $[-1, 1]$ de la recta real. Los conjuntos $[-1, 0]$ y $(0, 1]$ son disjuntos y no vacíos pero no forman una separación de X ya que el primer conjunto no es abierto en X. Por otro lado, obsérvese que el primer conjunto contiene un punto límite, el 0, del segundo. De hecho, probaremos enseguida que no existe una separación del espacio $[-1, 1]$.

EJEMPLO 4. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo. Es más, los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos unipuntuales: si Y es un subespacio de $\mathbb{Q}$ conteniendo dos puntos p y q, es posible elegir un número irracional a entre p y q y escribir Y como la unión de los abiertos

$$Y \cap (-\infty, a) \quad \text{e} \quad Y \cap (a, +\infty).$$

EJEMPLO 5. Sea X el siguiente subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{x \times y \mid y = 0\} \cup \{x \times y \mid x > 0, y = 1/x\}.$$

Entonces X no es conexo. De hecho, los dos conjuntos constituyen una separación de X pues ninguno de ellos contiene puntos límite del otro (véase la Figura 23.1).

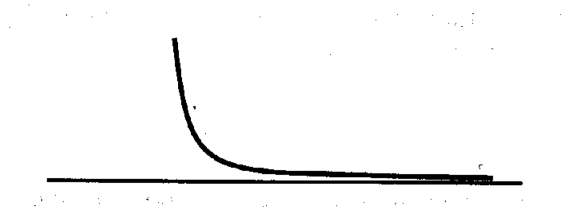


Figura 23.1

Hemos proporcionado varios ejemplos de espacios que no son conexos. ¿Cómo podemos construir espacios que sean conexos? Demostraremos varios resultados que

nos dicen cómo construir espacios conexos a partir de espacios conexos que ya están dados de antemano. En la próxima sección aplicaremos estos teoremas para demostrar que algunos espacios específicos, tales como los intervalos en $\mathbb{R}$, las bolas y los cubos en $\mathbb{R}^n$, son conexos. En primer lugar, veamos un lema.

Lema 23.2. *Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y además Y es un subespacio conexo de X, entonces Y está contenido bien en C, bien en D.*

Demostración. Como C y D son abiertos en X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son abiertos en Y. Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y; si fueran ambos no vacíos, constituirían una separación de Y. De esta forma, alguno de ellos es vacío. Por tanto, Y está contenido enteramente en C o en D. ■

Teorema 23.3. *La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y sea p un punto de $\bigcap A_\alpha$. Probemos que el espacio $Y = \bigcup A_\alpha$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y. El punto p está, bien en C bien en D; supongamos que $p \in C$. Como A_α es conexo, ya $A_\alpha \subset C$, ya $A_\alpha \subset D$, aunque esta última posibilidad se descarta pues $p \in A_\alpha$ y $p \in C$. Por tanto, $A_\alpha \subset C$ para cada α, y así $\bigcup A_\alpha \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era no vacío. ■

Teorema 23.4. *Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B es también conexo.*

En otras palabras: si B se forma añadiéndole a A alguno o todos sus puntos límite, entonces B es conexo.

Demostración. Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \bar{A}$. Supongamos que $B = C \cup D$ es una separación de B. Por el Lema 23.2, el conjunto A verifica $A \subset C$ o $A \subset D$; supongamos que $A \subset C$. Entonces $\bar{A} \subset \bar{C}$. Como $\bar{C}$ y D son disjuntos, B no puede intersecar a D. Esto contradice el hecho de que D es un subconjunto no vacío de B. ■

Teorema 23.5. *La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y supongamos que X es conexo. Queremos probar que el espacio imagen $Z = f(X)$ es conexo. Como la

aplicación obtenida de f al restringir su rango al espacio Z es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva

$$g : X \to Z.$$

Supongamos que $Z = A \cup B$ es una separación de Z en dos conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en Z. Entonces $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X. Además son abiertos en X, pues g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de X, contradiciendo la hipótesis de que X era conexo. ∎

Teorema 23.6. *El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.*

Demostración. Vamos a demostrar primero el resultado para el producto de dos espacios conexos X e Y. La prueba es sencilla de visualizar. Elijamos un "punto base" $a \times b$ en el producto $X \times Y$. Obsérvese que la "rebanada horizontal" $X \times b$ es conexa, ya que es homeomorfa a X, y que también lo es cada "rebanada vertical" ya que éstas son homeomorfas a Y. Como consecuencia, cada espacio

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto $x \times b$ en común (véase la Figura 23.2). Ahora, consideremos la unión $\cup_{x \in X} T_x$ de todos estos espacios. Como todos tienen al punto $a \times b$ en común, esta unión es conexa. Finalmente, al coincidir esta unión con el propio espacio $X \times Y$, se concluye que $X \times Y$ es conexo.

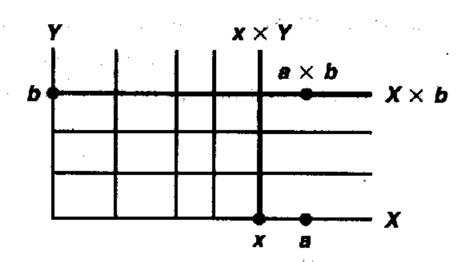


Figura 23.2

La prueba para cualquier colección finita de espacios conexos puede realizarse por inducción, utilizando el hecho (fácilmente demostrable) de que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$. ∎

Es natural preguntarse cuándo puede extenderse este teorema a productos arbitrarios de espacios conexos. La respuesta depende de la topología que utilicemos para dicho producto, tal y como demuestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6. Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas. Podemos escribir $\mathbb{R}^\omega$ como la unión de un conjunto A constituido por todas las sucesiones acotadas de números reales, y de un conjunto B formado por las sucesiones no acotadas. Estos conjuntos son disjuntos y además son abiertos en la topología por cajas ya que si $\mathbf{a}$ es un punto de $\mathbb{R}^\omega$, el conjunto abierto

$$U = (a_1 - 1, a_1 + 1) \times (a_2 - 1, a_2 + 1) \times \cdots$$

está ya formado por sucesiones acotadas si $\mathbf{a}$ es una sucesión acotada, ya por sucesiones no acotadas si $\mathbf{a}$ no lo está. De esta forma, incluso a pesar de que $\mathbb{R}$ es conexo (tal y como probaremos en la próxima sección), el producto $\mathbb{R}^\omega$ no es conexo con la topología por cajas.

EJEMPLO 7. Consideremos ahora $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto y supongamos que $\mathbb{R}$ es conexo. Entonces probaremos que $\mathbb{R}^\omega$ también es conexo. Denotemos por $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ el subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ tales que $x_i = 0$ para $i > n$. El espacio $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ es claramente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y utilizando el resultado anterior concluimos que es conexo. Se sigue entonces que el espacio $\mathbb{R}^\infty$ es conexo, pues es la unión de los espacios $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ que tienen el punto $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ en común. Veamos ahora que la adherencia de $\mathbb{R}^\infty$ coincide con $\mathbb{R}^\omega$ de lo cual se deduce que éste también es un espacio conexo.

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ un punto de $\mathbb{R}^\omega$. Sea $U = \prod U_i$ un abierto básico de la topología producto que contiene a $\mathbf{a}$. Veamos que U interseca a $\mathbb{R}^\infty$. Existe un entero N tal que $U_i = \mathbb{R}$ para $i > N$. Entonces el punto

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

de $\mathbb{R}^\infty$ pertenece a U ya que $a_i \in U_i$ para $i > N$.

El argumento que acabamos de presentar puede generalizarse para demostrar que un producto arbitrario de espacios conexos es conexo en la topología producto. Como no utilizaremos este resultado, dejaremos la prueba para los ejercicios.

Ejercicios

1. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ¿qué puede decir de la conexión de X respecto de una topología y respecto de la otra?
2. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para cada n. Demuestre que $\bigcup A_n$ es conexo.
3. Sean $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X. Demuestre que si $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para todo α, entonces $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ es conexo.
4. Demuestre que si X es un conjunto infinito, entonces X es conexo con la topología de los complementos finitos (o topología cofinita).

5. Un espacio es ***totalmente disconexo*** si sus únicos subespacios conexos son los conjuntos unipuntuales. Demuestre que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente disconexo. ¿Es cierto el recíproco?

6. Sea $A \subset X$. Demuestre que si C es un subespacio conexo de X que interseca tanto a A como a $X - A$, entonces C interseca a $\operatorname{Fr} A$.

7. ¿Es el espacio $\mathbb{R}_\ell$ conexo? Justifique la respuesta.

8. Determine si $\mathbb{R}^\omega$ es o no conexo en la topología uniforme.

9. Sean A un subconjunto propio de X y B un subconjunto propio de Y. Si X e Y son conexos, demuestre que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

10. Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios conexos y X el espacio producto

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X.

(a) Dado un subconjunto finito K de J, denotemos por X_K el subespacio de X dado por todos los puntos $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para todo $\alpha \notin K$. Demuestre que X_K es conexo.

(b) Demuestre que la unión Y de los espacios X_K es conexa.

(c) Demuestre que X coincide con la adherencia de Y. Concluya que X es conexo.

11. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Demuestre que si Y y los conjuntos de la forma $p^{-1}(\{y\})$ son conexos, entonces X también es conexo.

12. Sea $Y \subset X$ y supongamos que X e Y son conexos. Demuestre que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ e $Y \cup B$ son conexos.

§24 Subespacios conexos de la recta real

Los teoremas de la sección precedente nos muestran cómo construir nuevos espacios conexos partiendo de ciertos espacios conexos dados. ¿Pero dónde podemos encontrar estos espacios conexos para empezar a construir los otros? El mejor lugar para empezar a buscar es la propia recta real. Probaremos así que $\mathbb{R}$ es conexo y que también lo son los intervalos y los rayos en $\mathbb{R}$.

Una aplicación de estos resultados es el teorema del valor intermedio del cálculo, que generalizaremos fácilmente a cualquier función continua sobre un espacio conexo. Otra es el hecho de que espacios tan familiares como las bolas y las esferas del

espacio euclídeo también son espacios conexos; la demostración involucra una nueva noción, llamada *conexión por caminos*, la cual también discutiremos.

El hecho de que los intervalos y los rayos en $\mathbb{R}$ sean conexos puede resultar familiar de análisis elemental. Probaremos de nuevo este resultado de una forma generalizada; además, descubriremos que no depende de las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$, sino de sus propiedades como conjunto ordenado. Para justificar esta afirmación, demostraremos los resultados para un conjunto ordenado arbitrario que tiene las mismas propiedades relativas al orden que $\mathbb{R}$. Tales conjuntos se denominan *continuos lineales*.

Definición. Un conjunto simplemente ordenado L con más de un elemento se dice que es un ***continuo lineal*** si se verifican las siguientes condiciones:

(1) L tiene la propiedad del supremo.

(2) Si $x < y$, entonces existe z tal que $x < z < y$.

Teorema 24.1. *Si L es un continuo lineal con la topología del orden, entonces L es conexo, y también lo son los intervalos y los rayos de L.*

Demostración. Recordemos que un subespacio Y de L se dice *convexo* si cada par de puntos a, b de Y con $a < b$, el intervalo $[a, b]$ de puntos de L está contenido en Y. Vamos a probar que si Y es un subespacio convexo de L, entonces Y es conexo.

Supongamos entonces que Y es la unión disjunta de dos conjuntos A y B, cada uno de los cuales es abierto en Y. Elegimos $a \in A$ y $b \in B$; supongamos por conveniencia que $a < b$. El intervalo $[a, b]$ de puntos de L está enteramente contenido en Y ya que Y es convexo, por tanto, podemos escribir $[a, b]$ como la unión de dos conjuntos disjuntos

$$A_0 = A \cap [a, b] \quad \text{y} \quad B_0 = B \cap [a, b],$$

cada uno de los cuales es abierto en $[a, b]$ con la topología relativa, que es la misma que la topología del orden. Los conjuntos A_0 y B_0 son no vacíos pues $a \in A_0$ y $b \in B_0$. Así, A_0 y B_0 constituyen una separación de $[a, b]$.

Sea $c = \sup A_0$. Veamos que c no pertenece a A_0 ni a B_0 lo cual contradice el hecho de que $[a, b]$ es la unión de A_0 y B_0.

Caso 1. Supongamos que $c \in B_0$. Entonces $c \neq a$, así que bien $c = b$, o bien $a < c < b$. En cualquier caso, se sigue del hecho de que B_0 es abierto en $[a, b]$ que existe un intervalo de la forma $(d, c]$ contenido en B_0. Si $c = b$, se llega a una contradicción ya que d es una cota superior de A_0 más pequeña que c. Si $c < b$, observamos que $(c, b]$ no interseca a A_0 (pues c es una cota superior de A_0). Entonces

$$(d, b] = (d, c] \cup (c, b]$$

no interseca a A_0. De nuevo, d es una cota superior de A_0 más pequeña que c, situación contraria a nuestra hipótesis de partida (véase la Figura 24.1).

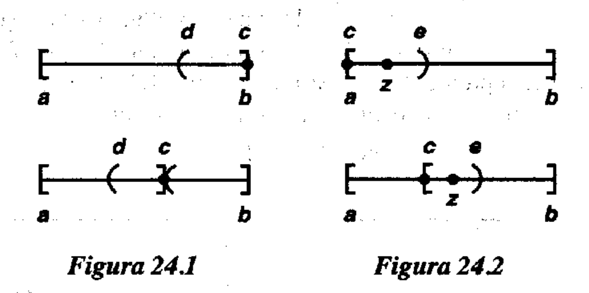


Figura 24.1 *Figura 24.2*

Caso 2. Supongamos que $c \in A_0$. Entonces $c \neq b$ así que bien $c = a$, o bien $a < c < b$. Como A_0 es abierto en $[a, b]$, debe existir algún intervalo de la forma $[c, e)$ contenido en A_0 (véase la Figura 24.2). Utilizando la segunda propiedad que verifica por definición un continuo lineal L, podemos elegir un punto $z \in L$ tal que $c < z < e$. Entonces $z \in A_0$, lo cual contradice el hecho de que c es una cota superior de A_0. ■

Corolario 24.2. *La recta real $\mathbb{R}$ es conexa y también lo son los intervalos y los rayos en $\mathbb{R}$.*

Como una aplicación, probamos el teorema del valor intermedio del cálculo elemental en un contexto más general.

Teorema 24.3 (Teorema del valor intermedio). *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua, donde X es un espacio conexo e Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si a y b son dos puntos de X y r es un punto de Y que se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c en X tal que $f(c) = r$.*

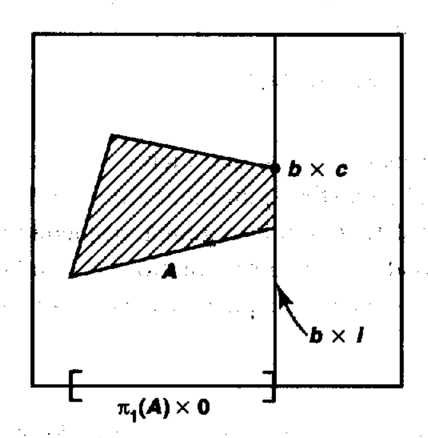
El teorema del valor intermedio del cálculo es un caso especial de este teorema cuando X es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y el espacio Y es la propia recta real $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos las hipótesis del teorema. Los conjuntos

$$A = f(X) \cap (-\infty, r) \quad \text{y} \quad B = f(X) \cap (r, +\infty)$$

son disjuntos, y además son no vacíos pues uno contiene a $f(a)$ mientras el otro contiene a $f(b)$. Cada uno es abierto en la imagen $f(X)$ ya que son la intersección de un rayo abierto en Y con $f(X)$. Si no existiera un punto c de X tal que $f(c) = r$, entonces $f(X)$ sería la unión de los conjuntos A y B. Entonces A y B constituirían una separación de $f(X)$ lo cual contradice el hecho de que la imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua sigue siendo un conjunto conexo. ■

EJEMPLO 1. Un ejemplo de continuo lineal distinto de $\mathbb{R}$ es el cuadrado ordenado. Vamos a comprobar la propiedad del supremo (la segunda propiedad de la definición es trivial). Sean A un subconjunto de $I \times I$, $\pi_1 : I \times I \to I$ la proyección sobre la primera coordenada y $b = \sup \pi_1(A)$. Si $b \in \pi_1(A)$, entonces A interseca el subconjunto $b \times I$ de $I \times I$. Como $b \times I$ tiene el mismo orden que I, el conjunto $A \cap (b \times I)$ tendrá un supremo $b \times c$, el cual será el supremo de A (véase la Figura 24.3). Si $b \notin \pi_1(A)$ entonces $b \times 0$ es el supremo de A; ningún elemento de la forma $b' \times c$ con $b' < b$ puede ser un supremo de A ya que entonces b' sería un supremo para $\pi_1(A)$.



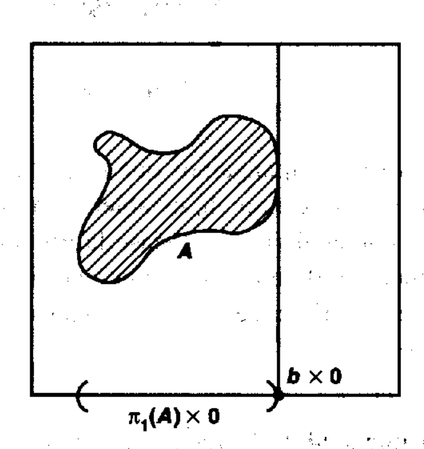


Figura 24.3

EJEMPLO 2. Si X es un conjunto bien ordenado, entonces $X \times [0, 1)$ es un continuo lineal con el orden del diccionario; dejamos al lector la comprobación de este hecho como ejercicio. Este conjunto se puede interpretar como el resultado de encajar inmediatamente después de cada uno de los elementos de X el intervalo $(0, 1)$.

La conexión de los intervalos en $\mathbb{R}$ nos lleva a enunciar un criterio muy útil para demostrar que un espacio X es conexo; concretamente, nos referimos a la condición de que cualquier par de puntos de X pueda unirse mediante un *camino* en X.

Definición. Dados dos puntos x e y del espacio X, un ***camino*** en X que une x con y es una aplicación continua $f : [a, b] \to X$ de algún intervalo cerrado de la recta real en X, de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X se dice que es ***conexo por caminos*** si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X.

Es sencillo comprobar que todo espacio X que es conexo por caminos también es un espacio conexo. Supongamos que $X = A \cup B$ es una separación de X. Sea $f : [a, b] \to X$ un camino en X. Como $[a, b]$ es conexo, entonces el conjunto $f([a, b])$ debe estar contenido ya en A, ya en B. Por tanto, no existen caminos en X que unan puntos de A con puntos de B lo cual es contrario al hecho de que X sea conexo por caminos.

El recíproco de esta implicación no es cierto; un espacio conexo no es necesariamente conexo por caminos. Los Ejemplos 6 y 7 ilustran esta situación.

EJEMPLO 3. Se define la ***bola unidad*** B^n en $\mathbb{R}^n$ como

$$B^n = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

donde

$$\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

La bola unidad es conexa por caminos; dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de B^n, el segmento de línea recta $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$f(t) = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

está enteramente contenido en B^n ya que

$$\|f(t)\| \leq (1 - t)\|\mathbf{x}\| + t\|\mathbf{y}\| \leq 1.$$

Un argumento similar muestra que tanto las bolas abiertas $B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$ como las cerradas $\bar{B}_d(\mathbf{x}, \epsilon)$ contenidas en $\mathbb{R}^n$ son conexas por caminos.

EJEMPLO 4. Se define el ***espacio euclídeo agujereado*** como el espacio $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el origen en $\mathbb{R}^n$. Si $n > 1$, este espacio es conexo por caminos: dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ distintos de $\mathbf{0}$, podemos unir $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ con el segmento de línea recta que ambos determinan si este segmento no pasa por el origen. En caso de que así ocurriera, podemos elegir otro punto $\mathbf{z}$ que no esté contenido en la recta que determinan $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y a continuación considerar la línea recta quebrada que determinan $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ y finalmente $\mathbf{y}$.

EJEMPLO 5. Se define la ***esfera unidad*** S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$ como el conjunto

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Si $n > 1$, es conexa por caminos ya que la aplicación $g : \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \to S^{n-1}$ definida por $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ es continua y sobreyectiva, y es sencillo demostrar que la imagen bajo una aplicación continua de un espacio conexo por caminos es también conexo por caminos.

EJEMPLO 6. *El cuadrado ordenado I_o^2 es conexo pero no conexo por caminos.* Hemos demostrado que el cuadrado ordenado es un continuo lineal, luego es un espacio conexo. Veamos que no es conexo por caminos: sean $p = 0 \times 0$ y $q = 1 \times 1$. Supongamos que existe un camino $f : [a, b] \to I_o^2$ uniendo p con q y llegaremos a una contradicción. Por el teorema del valor intermedio, el conjunto imagen $f([a, b])$ debe contener cada punto $x \times y$ de I_o^2. Así, para cada $x \in I$, el conjunto

$$U_x = f^{-1}(x \times (0, 1))$$

es un subconjunto no vacío de $[a, b]$ y, por continuidad, es también abierto en $[a, b]$ (véase la Figura 24.4). Elijamos para cada $x \in I$, un número racional q_x perteneciente a U_x. Como los conjuntos U_x son disjuntos, la aplicación $x \to q_x$ es una aplicación inyectiva de I en $\mathbb{Q}$. Esto contradice el hecho de que el intervalo I es no numerable (tal y como probaremos más tarde).

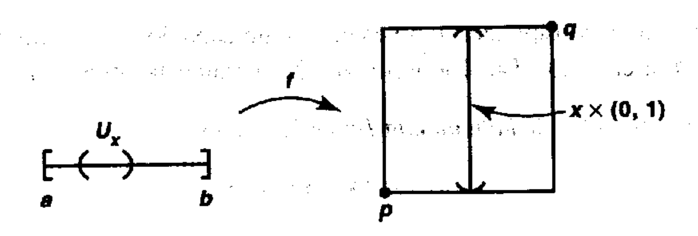


Figura 24.4

EJEMPLO 7. Sea S el siguiente subconjunto del plano

$$S = \{x \times \operatorname{sen}(1/x) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

Como S es la imagen del conjunto conexo $(0, 1]$ bajo una aplicación continua, S es conexo. De esta forma, su adherencia $\bar{S}$ en $\mathbb{R}^2$ también es conexa. El conjunto $\bar{S}$ es un ejemplo clásico en topología que se conoce como ***curva seno del topólogo***. Está ilustrada en la Figura 24.5 y es simplemente la unión del conjunto inicial S con el intervalo vertical $0 \times [-1, 1]$. Vamos a demostrar que $\bar{S}$ no es conexo por caminos.

Supongamos que existiera un camino $f : [a, c] \to \bar{S}$ empezando en el origen y terminando en un punto cualquiera de S. El conjunto de los números t para los cuales $f(t) \in 0 \times [-1, 1]$ es cerrado y, por tanto, tiene un máximo que denotaremos por b. Entonces $f : [b, c] \to \bar{S}$ es un camino que aplica b en el intervalo vertical $0 \times [-1, 1]$ mientras el resto de puntos de $[b, c]$ se aplican en puntos de S.

Sustituyamos $[b, c]$ por $[0, 1]$ para simplificar la prueba; sea $f(t) = (x(t), y(t))$. Entonces $x(0) = 0$, mientras que $x(t) > 0$ e $y(t) = \operatorname{sen}(1/x(t))$ para $t > 0$. Vamos a demostrar que existe una sucesión de puntos $t_n \to 0$ tales que $y(t_n) = (-1)^n$. Entonces tendremos que la sucesión $y(t_n)$ no es convergente, contradiciendo la continuidad de f.

Para encontrar los números t_n procedemos del siguiente modo: dado n, elegimos u con $0 < u < x(1/n)$ tal que $\operatorname{sen}(1/u) = (-1)^n$. Usando entonces el teorema del valor intermedio podemos encontrar t_n con $0 < t_n < 1/n$ tal que $x(t_n) = u$.

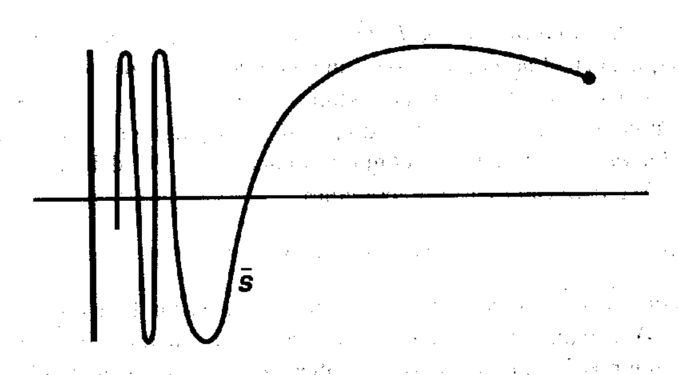


Figura 24.5

Ejercicios

1. (a) Dados los espacios $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$, demuestre que ningún par de ellos son homeomorfos. [*Indicación:* ¿qué ocurre si le quitamos un punto a cada uno de estos espacios?]
   (b) Supongamos que existen embebimientos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$. Demuestre con un ejemplo que X e Y no son necesariamente homeomorfos.
   (c) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.
2. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Demuestre que existe un punto de S^1 tal que $f(x) = f(-x)$.
3. Sea $f : X \to X$ continua. Demuestre que si $X = [0,1]$, entonces existe un punto x tal que $f(x) = x$. El punto x se denomina ***punto fijo*** de f. ¿Qué ocurre si X es el espacio $[0,1)$ o el espacio $(0,1)$?
4. Sea X un conjunto ordenado con la topología del orden. Demuestre que si X es conexo, entonces X es un continuo lineal.
5. Considere los siguientes conjuntos con la topología del orden. ¿Cuáles de ellos son un continuo lineal?
   (a) $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$.
   (b) $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$.
   (c) $[0,1) \times [0,1]$.
   (d) $[0,1] \times [0,1)$.
6. Demuestre que si X es un conjunto bien ordenado, entonces $X \times [0,1)$ con la topología del orden es un continuo lineal.
7. (a) Sean X e Y dos conjuntos ordenados con la topología del orden. Demuestre que si $f : X \to Y$ es una aplicación sobreyectiva que preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
   (b) Sea $X = Y = \bar{\mathbb{R}}_+$. Dado un entero positivo n, demuestre que la función $f(x) = x^n$ preserva el orden y es sobreyectiva. Concluya que su inversa, la *función raíz n-ésima*, es continua.
   (c) Sea X el subespacio $(-\infty,-1) \cup [0,\infty)$ de $\mathbb{R}$. Demuestre que la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x+1$ si $x < -1$ y por $f(x) = x$ si $x \geq 0$ es una función que preserva el orden y que además es sobreyectiva. ¿Es f un homeomorfismo? Compare esta situación con (a).
8. (a) ¿El producto de espacios conexos por caminos es también un espacio conexo por caminos?
   (b) Si $A \subset X$ y A es conexo por caminos, ¿es necesariamente $\bar{A}$ conexo por caminos?

(c) Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo por caminos, ¿es $f(X)$ necesariamente conexo por caminos?

(d) Si $\{A_\alpha\}$ es una colección de subespacios conexos por caminos de X verificando $\cap A_\alpha \neq \varnothing$, ¿es $\cup A_\alpha$ conexo por caminos?

9. Asumamos que $\mathbb{R}$ es no numerable. Demuestre que si A es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{R}^2 - A$ es conexo por caminos. [*Indicación:* ¿cuántas líneas pasan a través de un punto dado de $\mathbb{R}^2$?]

10. Demuestre que si U es un subespacio abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$, entonces U es conexo por caminos. [*Indicación:* demuestre que, dado $x_0 \in U$, el conjunto de los puntos que se pueden unir a x_0 por un camino en U es abierto y cerrado en U.]

11. Si A es un subespacio conexo de X, ¿se puede afirmar que $\operatorname{Int} A$ y $\operatorname{Fr} A$ son conexos? ¿Es cierto el recíproco? Justifique sus respuestas.

12. Recordemos que S_Ω denota el conjunto no numerable, minimal y bien ordenado. Denotemos por L el conjunto ordenado $S_\Omega \times [0, 1)$ con el orden del diccionario en el que hemos extraído el elemento mínimo. El conjunto L es un ejemplo clásico en topología que se conoce como ***línea larga***.

Teorema. La línea larga es conexa por caminos y localmente homeomorfa a $\mathbb{R}$, *pero no puede ser embebida en* $\mathbb{R}$.

(a) Sea X un conjunto ordenado; sean $a < b < c$ puntos de X. Demuestre que $[a, c)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$ si, y sólo si, tanto $[a, b)$ como $[b, c)$ tienen el mismo tipo de orden que $[0, 1)$.

(b) Sea X un conjunto ordenado. Sea $x_0 < x_1 < \cdots$ una sucesión creciente de puntos de X; supongamos que $b = \sup\{x_i\}$. Demuestre que $[x_0, b)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$ si, y sólo si, cada intervalo $[x_i, x_{i+1})$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$.

(c) Denotemos por a_0 al mínimo de S_Ω. Para cada elemento a de S_Ω diferente de a_0, demuestre que el intervalo $[a_0 \times 0, a \times 0)$ de $S_\Omega \times [0, 1)$ tiene el mismo tipo de orden que $[0, 1)$. [*Indicación:* proceda por inducción transfinita. Bien a tiene un inmediato predecesor en S_Ω, o bien existe una sucesión creciente a_i en S_Ω con $a = \sup\{a_i\}$.]

(d) Demuestre que L es conexo por caminos.

(e) Demuestre que cada punto de L tiene un entorno homeomorfo a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

(f) Demuestre que L no puede ser embebido en $\mathbb{R}$, ni en cualquiera de los espacios $\mathbb{R}^n$. [*Indicación:* cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base numerable de entornos.]

*§25 Componentes y conexión local†

Dado un espacio arbitrario X, existe una manera natural de dividirlo en varios trozos que son conexos (o conexos por caminos). Vamos a considerar este proceso a continuación.

Definición. Dado X, se define la siguiente relación de equivalencia en X: $x \sim y$ si existe un subespacio conexo de X que contiene a ambos puntos. Las clases de equivalencia se denominan ***componentes*** (o "componentes conexas") de X.

La simetría y la reflexividad de la relación son obvias. La transitividad se sigue del siguiente hecho: si A es un subespacio conexo que contiene a x y a y, y B es un subespacio conexo que contiene a y y a z, entonces $A \cup B$ es un subespacio que contiene a x y a z que además es conexo pues A y B tienen el punto y en común.

Las componentes de X también se pueden describir como sigue:

Teorema 25.1. *Las componentes de X son subespacios disjuntos y conexos de X cuya unión es X de forma que cada subespacio conexo de X no trivial interseca sólo a una de ellas.*

Demostración. Por tratarse de una relación de equivalencia y ser cada componente una clase, está claro que son disjuntas y que su unión es el espacio X. Además, cada subespacio conexo A de X interseca únicamente a una de ellas. Pues si A interseca a las componentes C_1 y C_2 en X, tomando $x_1 \in C_1$ y $x_2 \in C_2$ se tiene que $x_1 \sim x_2$ por definición y esto no puede ocurrir a menos que $C_1 = C_2$.

Para demostrar que cada componente C es conexa elijamos un punto x_0 de C. Para cada punto x de C, sabemos que $x \sim x_0$, luego existe un subespacio A_x que contiene a ambos puntos. Tal y como acabamos de probar, $A_x \subset C$ y así

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x.$$

Como los subespacios A_x son conexos y tienen al punto x_0 en común, se tiene que C es conexo. ■

Definición. Definimos otra relación de equivalencia en el espacio X dada por: $x \sim y$ si existe un camino en X uniendo x con y. Las clases de equivalencia se denominan ***componentes conexas por caminos*** de X.

---

†Esta sección se utilizará en la Parte II del libro.

Veamos que se trata de una relación de equivalencia. Primero, observemos que si existe un camino $f : [a,b] \to X$ que une x con y y cuyo dominio es el intervalo $[a,b]$, entonces también existe un camino g uniendo x con y y con dominio $[c,d]$ (cualquier pareja de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ son homeomorfos). El hecho de que $x \sim x$ es claro pues basta considerar el camino constante $f : [a,b] \to X$ dado por $f(t) = x$ para todo t. La simetría se tiene por el siguiente motivo: si $f : [0,1] \to X$ es un camino que une x con y, entonces el camino contrario $g : [0,1] \to X$ dado por $g(t) = f(1-t)$ es un camino que une y con x. Finalmente la transitividad de la relación se prueba así; sea $f : [0,1] \to X$ un camino que une x con y y sea $g : [1,2] \to X$ un camino que une y con z. Podemos "pegar" los caminos f y g y obtener un nuevo camino $h : [0,2] \to X$ que une x con z; el camino h será una aplicación continua por el "lema del pegamiento", Teorema 18.3.

Podemos obtener el siguiente resultado, cuya demostración es similar a la del teorema precedente:

Teorema 25.2. *Las componentes conexas por caminos de X son subespacios disjuntos conexos por caminos de X cuya unión es X, tales que cada subespacio conexo por caminos de X no trivial interseca sólo a una de ellas.*

Obsérvese que cada componente de un espacio X es cerrada en X ya que la adherencia de un subespacio conexo de X es conexo. Si X tiene sólo un número finito de componentes, entonces cada componente es también un abierto en X, pues su complementario es una unión finita de cerrados; en general, las componentes de X no son abiertas en X.

No podemos afinar tanto cuando hablamos de las componentes conexas por caminos ya que, en general, no son ni abiertas ni cerradas en X. Consideremos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1. Si consideramos $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, entonces cada componente de $\mathbb{Q}$ es un único punto. Ninguna de las componentes de $\mathbb{Q}$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{Q}$.

EJEMPLO 2. La "curva seno del topólogo" $\bar{S}$ de la sección precedente es un espacio que tiene una única componente (pues es conexo) y dos componentes conexas por caminos. Una de ellas es la curva S y la otra es el intervalo vertical $V = 0 \times [-1,1]$. Obsérvese que S es abierto en $\bar{S}$ pero no es cerrado, mientras que V es cerrado pero no abierto. Si consideramos el espacio que resulta de quitarle a $\bar{S}$ todos los puntos de V cuya segunda coordenada es racional, se obtiene un espacio que tiene sólo una componente y una cantidad no numerable de componentes conexas por caminos.

La conexión es una propiedad muy deseable para un espacio topológico, aunque para ciertos propósitos es más importante que el espacio satisfaga una condición de conexión *localmente*. A grandes rasgos, la conexión local significa que cada punto tiene entornos conexos arbitrariamente pequeños. Siendo más precisos, podemos establecer la siguiente definición:

Definición. Un espacio X se dice que es ***localmente conexo en*** x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo V de x contenido en U. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es ***localmente conexo***. De manera análoga, se dice que un espacio X es ***localmente conexo por caminos en*** x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo por caminos V de x contenido en U. Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es ***localmente conexo por caminos***.

EJEMPLO 3. Cada intervalo y cada rayo de la recta real son conexos y localmente conexos. El subespacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ no es conexo, pero es localmente conexo. La curva seno del topólogo es conexa pero no localmente conexa por caminos. Los racionales $\mathbb{Q}$ no son ni conexos, ni localmente conexos.

Teorema 25.3. *Un espacio X es localmente conexo si, y sólo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es abierta en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo; sean U un abierto de X y C una componente de U. Si x es un punto de C, podemos elegir un entorno conexo V de x tal que $V \subset U$. Como V es conexo, debe estar enteramente contenido en la componente C de U. Así, C es abierto en X.

Recíprocamente, supongamos que las componentes de los abiertos de X son abiertos. Dado un punto x de X y un entorno U de x, sea C la componente de U que contiene a x. Ahora, C es conexo y como es abierto en X por hipótesis, X es localmente conexo en x. ∎

Una demostración análoga se tiene para el siguiente teorema:

Teorema 25.4. *Un espacio X es localmente conexo por caminos si, y sólo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente conexa por caminos de U es abierta en X.*

La relación entre componentes conexas y conexas por caminos está dada por el siguiente resultado:

Teorema 25.5. *Si X es un espacio topológico, cada componente conexa por caminos de X está contenida en una componente de X. Si X es localmente conexo por caminos, entonces las componentes y las componentes conexas por caminos de X coinciden.*

Demostración. Sean C una componente de X, x un punto de C y P la componente conexa por caminos de X que contiene a x. Como P es conexa, $P \subset C$. Queremos demostrar que si X es localmente conexo por caminos, entonces $P = C$. Supongamos que $P \subsetneq C$. Denotemos por Q a la unión de todas las componentes conexas

por caminos de X que son distintas de P y que intersecan a C; cada una de ellas está contenida necesariamente en C, así que

$$C = P \cup Q.$$

Como X es localmente conexo por caminos, cada componente conexa por caminos de X es un abierto de X. Así P (que es una componente conexa por caminos) y Q (que es unión de componentes conexas por caminos) son abiertos en X y, por tanto, constituyen una separación de C, lo cual contradice la conexión de C. ■

Ejercicios

1. ¿Cuáles son las componentes y las componentes conexas por caminos de $\mathbb{R}_\ell$? ¿Cuáles son las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$?
2. (a) ¿Cuáles son las componentes y las componentes conexas por caminos de $\mathbb{R}^\omega$ (con la topología producto)?

   (b) Consideremos $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme. Demuestre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en la misma componente de $\mathbb{R}^\omega$ si, y sólo si, la sucesión

   $$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots)$$

   está acotada. [*Indicación:* es suficiente considerar el caso $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.]

   (c) Consideremos $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas. Demuestre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^\omega$ si, y sólo si, la sucesión $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es "finalmente cero". [*Indicación:* si $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ no es finalmente cero, demuestre que existe un homeomorfismo h de $\mathbb{R}^\omega$ en sí mismo tal que $h(\mathbf{x})$ está acotado mientras que $h(\mathbf{y})$ no lo está.]
3. Demuestre que el cuadrado ordenado es localmente conexo pero no es localmente conexo por caminos. ¿Cuáles son las componentes conexas por caminos de este espacio?
4. Sea X un espacio localmente conexo por caminos. Demuestre que cada conjunto abierto y conexo en X es también conexo por caminos.
5. Sean X el conjunto de los puntos racionales en el intervalo $[0, 1] \times 0$ de $\mathbb{R}^2$ y T la unión de todos los segmentos que unen el punto $p = 0 \times 1$ con los puntos de X.

   (a) Demuestre que T es conexo por caminos, pero es localmente conexo sólo en el punto p.

   (b) Encuentre un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo por caminos y que no sea localmente conexo en cualquiera de sus puntos.

6. Un espacio X se dice que es ***débilmente localmente conexo en x*** si para cada entorno U de x, existe un subespacio conexo de X contenido en U que contiene un entorno de x. Demuestre que si X es débilmente localmente conexo en cada uno de sus puntos, entonces X es localmente conexo. [*Indicación:* demuestre que las componentes de los conjuntos abiertos son abiertos.]

7. Considere la "rama infinita" X de la Figura 25.1. Demuestre que X no es localmente conexo en p, pero sí es débilmente localmente conexo en p. [*Indicación:* cualquier entorno conexo de p debe contener todos los puntos a_i.]

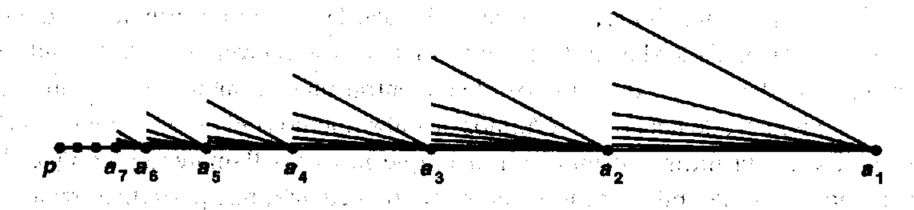


Figura 25.1

8. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Demuestre que si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo. [*Indicación:* si C es una componente del conjunto abierto U de Y, demuestre que $p^{-1}(C)$ es una unión de componentes de $p^{-1}(U)$.]

9. Sean G un grupo topológico y C la componente de G que contiene al elemento identidad e. Demuestre que C es un subgrupo normal de G. [*Indicación:* si $x \in G$, entonces xC es la componente de G que contiene a x.]

10. Sea X un espacio. Definamos la relación $x \sim y$ si no existe una separación $X = A \cup B$ de X donde A, B son abiertos disjuntos tales que $x \in A$ e $y \in B$.

(a) Demuestre que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se denominan ***cuasicomponentes*** de X.

(b) Demuestre que cada componente de X está contenida en una cuasicomponente de X y que las componentes coinciden con las cuasicomponentes si X es localmente conexo.

(c) Denotemos por K al conjunto $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ y denotemos por $-K$ al conjunto $\{-1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Determine las componentes, las componentes conexas por caminos y las cuasicomponentes de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$:

$$A = (K \times [0,1]) \cup \{0 \times 0\} \cup \{0 \times 1\}.$$
$$B = A \cup ([0,1] \times \{0\}).$$
$$C = (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K).$$

§26 Espacios compactos

La noción de compacidad no nos es tan cercana y natural como la de conexión. Desde los inicios de la topología, se ha admitido que el intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real gozaba de una cierta propiedad que era crucial en la demostración de teoremas tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme. Sin embargo, tal propiedad ha tardado muchísimo en poder ser formulada para un espacio topológico arbitrario. Normalmente, se pensaba que esta propiedad crucial del intervalo cerrado era el hecho de que cualquier subconjunto infinito de puntos de $[a, b]$ tenía un punto límite y fue esta propiedad la que en un principio recibió el nombre de compacidad. Más tarde, los matemáticos asumieron que esta formulación no era la más adecuada, y que era posible encontrar una definición en términos más débiles y generales; de hecho, en términos de cubrimientos del espacio por conjuntos abiertos. Es a esta última formulación a la que nosotros llamaremos compacidad. Aunque no es tan natural ni intuitiva como su precedente, nos permitirá trabajar en contextos más arbitrarios.

Definición. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que ***cubre*** X, o que es un ***cubrimiento*** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un ***cubrimiento abierto*** de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición. Un espacio X se dice que es ***compacto*** si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X.

EJEMPLO 1. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2. El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto:

$$X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un elemento U de $\mathcal{A}$ que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en U un elemento de $\mathcal{A}$ que los contenga. La colección de estos elementos de $\mathcal{A}$, junto con el propio U, es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre X.

EJEMPLO 3. Cualquier espacio X que contenga a un número finito de puntos es trivialmente compacto, pues cualquier cubrimiento por abiertos de X es finito.

EJEMPLO 4. El intervalo $(0,1]$ no es compacto; el cubrimiento abierto

$$\mathcal{A} = \{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

no contiene ninguna subcolección finita cubriendo $(0,1]$. Aplicando un argumento análogo se demuestra que tampoco es compacto el intervalo $(0,1)$. Por otra parte, el intervalo $[0,1]$ *sí es* compacto; quizá ya resulte familiar este hecho del análisis. En cualquier caso, lo demostraremos en breve.

En general, resulta complicado decidir cuándo un espacio dado es compacto o no. Primero vamos a probar algunos teoremas generales que nos muestran cómo construir nuevos espacios compactos a partir de otros compactos ya dados. En la siguiente sección demostraremos que algunos espacios en concreto son compactos. Estos espacios incluyen a todos los intervalos cerrados de la recta real y a todos los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Vamos a probar en primer lugar algunos hechos acerca de subespacios. Si Y es un subespacio de X, una colección $\mathcal{A}$ se dice que cubre Y (o que es un cubrimiento de Y) si la unión de sus elementos contiene a Y.

Lema 26.1. *Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si, y sólo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre Y.*

Demostración. Supongamos que Y es compacto y que $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X. Entonces la colección

$$\{A_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$$

es un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y; como Y es compacto, existirá una subcolección finita de la forma

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, \dots, A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

cubriendo Y. Entonces $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y.

Recíprocamente, sea $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha\}$ un cubrimiento de Y por abiertos de Y. Para cada α, podemos elegir un conjunto A_α abierto en X tal que

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y.$$

La colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos en X. Por hipótesis, alguna subcolección finita $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ cubre Y. Entonces $\{A'_{\alpha_1}, \dots, A'_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}'$ que cubre Y. ■

Teorema 26.2. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X. Dado un cubrimiento $\mathcal{A}$ de Y por conjuntos abiertos en X, podemos considerar el cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X uniendo a $\mathcal{A}$ el conjunto abierto $X - Y$, esto es,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}.$$

Como X es compacto, alguna subcolección finita cubre X. Si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así, la dejamos como está. La colección resultante en cualquier caso es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y. ■

Teorema 26.3. *Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sea Y un subespacio compacto del espacio de Hausdorff X. Probaremos que $X - Y$ es abierto, luego Y será cerrado.

Sea x_0 un punto de $X - Y$. Vamos a demostrar que existe un entorno de x_0 que no interseca a Y. Para cada punto y de Y, elijamos entornos disjuntos U_y y V_y de los puntos x_0 e y, respectivamente (utilizando la condición de Hausdorff). La colección $\{V_y \mid y \in Y\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X; por tanto, podemos cubrir Y con un número finito de estos conjuntos, por ejemplo $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. El conjunto abierto

$$V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

contiene a Y, y es disjunto del abierto

$$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$$

que se forma al tomar la intersección de los correspondientes entornos de x_0, ya que si z es un punto de V, entonces $z \in V_{y_i}$ para algún i, por tanto, $z \notin U_{y_i}$ y así $z \notin U$ (véase la Figura 26.1). Por tanto, U es un entorno de x_0 que no interseca a Y. ■

El resultado que hemos establecido a lo largo de la demostración anterior nos será útil más tarde, así que vamos a enunciarlo de un modo explícito para referirnos a él de una manera más fácil.

Lema 26.4. *Si Y es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff X y x_0 no está en Y, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.*

EJEMPLO 5. Una vez que hayamos demostrado que el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto, se sigue del Teorema 26.2 que cualquier subespacio cerrado de $[a, b]$ es compacto. Por otra parte, del Teorema 26.3 se deduce que los intervalos $(a, b]$ y (a, b) no pueden ser compactos (hecho que ya conocíamos) ya que no son cerrados en el espacio de Hausdorff $\mathbb{R}$.

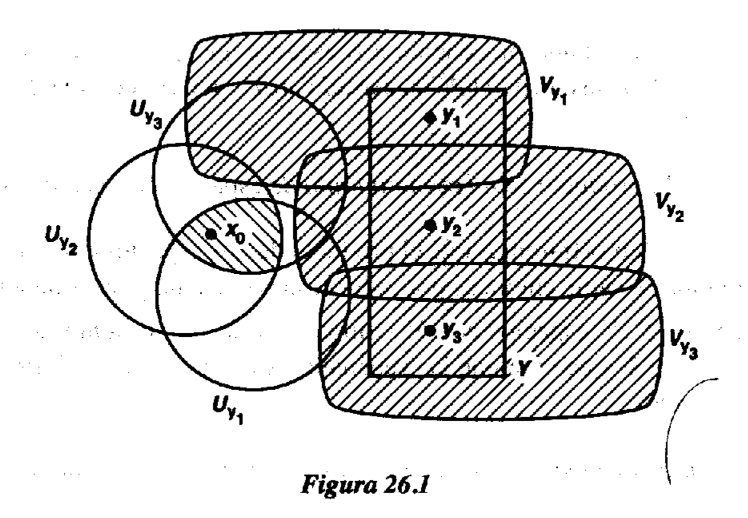


Figura 26.1

EJEMPLO 6. La condición de Hausdorff es imprescindible para demostrar el Teorema 26.3. Consideremos, por ejemplo, la topología cofinita en la recta real. Los únicos subconjuntos propios de $\mathbb{R}$ que son cerrados en esta topología son los finitos. Pero *cada* subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto con esta topología, tal y como se puede comprobar.

Teorema 26.5. *La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua con X compacto. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y. La colección

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos ya que f es continua. Por tanto, un número finito de ellos, por ejemplo

$$f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n)$$

cubren X. Entonces los conjuntos $A_1, \dots, A_n$ cubren $f(X)$. ■

Una utilidad importante del teorema precedente es la herramienta que nos ofrece para comprobar si una aplicación es un homeomorfismo.

Teorema 26.6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Probaremos que las imágenes de conjuntos cerrados de X bajo la aplicación f son también cerrados en Y; con esto demostraremos la continuidad de la aplicación f^{-1}. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto, por el Teorema

26.2. Por tanto, el resultado precedente nos asegura que $f(A)$ es compacto. Ahora bien, como Y es de Hausdorff, $f(A)$ es cerrado en Y, por el Teorema 26.3. ■

Teorema 26.7. *El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.*

Demostración. Demostraremos que el producto de dos espacios compactos es compacto; el teorema se sigue entonces por inducción sobre cualquier producto finito.

Paso 1. Sean X, Y espacios con Y compacto. Sea x_0 un punto de X, y sea N un abierto de $X \times Y$ que contiene la "rebanada" $x_0 \times Y$ de $X \times Y$. Probaremos el siguiente resultado:

> *Existe un entorno W de x_0 en X tal que N contiene al conjunto completo $W \times Y$.*

El conjunto $W \times Y$ se denomina ***tubo*** sobre $x_0 \times Y$. En primer lugar, cubramos $x_0 \times Y$ por elementos básicos $U \times V$ (para la topología de $X \times Y$) de modo que $U \times V \subset N$. El espacio $x_0 \times Y$ es compacto ya que es homeomorfo a Y. De esta forma, podemos cubrir $x_0 \times Y$ con un número finito de tales elementos básicos:

$$U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n.$$

(Suponemos que cada uno de los elementos básicos $U_i \times V_i$ interseca realmente a $x_0 \times Y$, ya que si así no ocurriera, tal elemento sería superfluo y lo podríamos descartar de la colección finita y seguir teniendo un cubrimiento de $x_0 \times Y$.) Definamos

$$W = U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

El conjunto W es abierto, y contiene a x_0 pues cada conjunto $U_i \times V_i$ interseca a $x_0 \times Y$. Afirmamos que los conjuntos $U_i \times V_i$, que fueron elegidos para cubrir la rebanada $x_0 \times Y$, también cubren el tubo $W \times Y$. Sea $x \times y$ un punto de $W \times Y$. Consideremos el punto $x_0 \times y$ de la rebanada $x_0 \times Y$ que tiene la misma y-coordenada en ese punto. Ahora, $x_0 \times y$ pertenece a algún $U_i \times V_i$ para algún i, así que $y \in V_i$. Pero $x \in U_j$ para todo j (ya que $x \in W$). Así, se tiene que $x \times y \in U_i \times V_i$, tal y como pretendíamos demostrar. Como todos los conjuntos $U_i \times V_i$ están contenidos en N, y como cubren al conjunto $W \times Y$, se tiene que el tubo $W \times Y$ también está contenido en N (véase la Figura 26.2).

Paso 2. Vamos a probar a continuación el teorema. Sean X e Y espacios compactos. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de $X \times Y$. Dado $x_0 \in X$, la rebanada $x_0 \times Y$ es compacta y estará cubierta por un número finito de elementos $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathcal{A}$.

La unión $N = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ es un abierto que contiene a $x_0 \times Y$; por el Paso 1, el abierto N contiene un tubo $W \times Y$ sobre $x_0 \times Y$ donde W es un abierto de X. Entonces $W \times Y$ está cubierto por un número finito de elementos $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathcal{A}$.

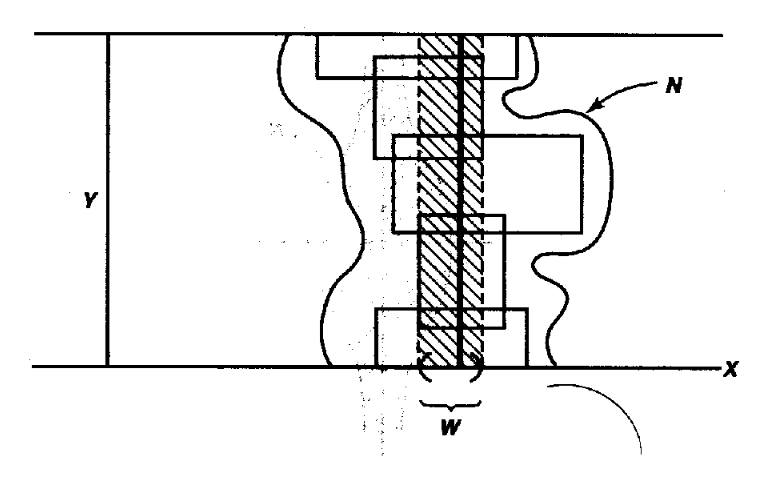


Figura 26.2

De esta forma, para cada x en X, podemos elegir un entorno W_x de x tal que el tubo $W_x \times Y$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. La colección de todos los entornos W_x es un cubrimiento abierto de X; por la compacidad de X, existe una subcolección finita

$$\{W_1, \ldots, W_k\}$$

cubriendo X. La unión de los tubos

$$W_1 \times Y, \ldots, W_k \times Y$$

es el espacio $X \times Y$ ya que cada cada uno de ellos puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, y así $X \times Y$ es compacto. ■

El resultado que hemos probado en el Paso 1 de la prueba anterior nos puede ser muy útil en posteriores capítulos, así que lo enunciamos a continuación como un lema.

Lema 26.8 (El lema del tubo). *Consideremos el espacio producto $X \times Y$, donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de $X \times Y$ conteniendo la rebanada $x_0 \times Y$ de $X \times Y$, entonces N contiene algún tubo $W \times Y$ sobre $x_0 \times Y$, donde W es un entorno de x_0 en X.*

EJEMPLO 7. No podemos eliminar la hipótesis de compacidad para el lema del tubo. Por ejemplo, sea Y el eje y de $\mathbb{R}^2$, y sea

$$N = \{x \times y\,;\ |x| < 1/(y^2+1)\}.$$

Entonces N es un abierto conteniendo al conjunto $0 \times \mathbb{R}$, pero que no contiene un tubo sobre $0 \times \mathbb{R}$ tal y como está ilustrado en la Figura 26.3.

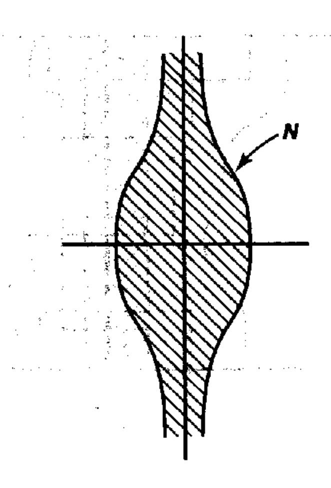


Figura 26.3

A continuación, nos podemos plantear la siguiente cuestión: *¿es el producto infinito de espacios compactos un espacio compacto?* Uno podría esperar que la respuesta fuera afirmativa, y de hecho así es. El resultado es lo suficientemente importante (y complicado) como para ser llamado por el nombre de la persona que lo descubrió: se denomina el *teorema de Tychonoff*.

A la hora de probar que el producto cartesiano de espacios conexos es conexo, lo que se hace es probar primero el resultado para un producto finito y a continuación deducir el caso general. Para el caso de la compacidad, no hay ninguna forma directa de extrapolar el resultado de productos finitos a productos arbitrarios de espacios. El caso infinito demanda un nuevo enfoque donde la prueba es bastante complicada. Por este motivo, y también para mantener la línea introductoria de este capítulo, hemos decidido posponerlo para más adelante. De cualquier forma, se podría estudiar en este momento si se desea; se demostrará este resultado en §37.

Existe un criterio último para decidir si un espacio es o no compacto, un criterio que es formulado en términos de conjuntos cerrados en lugar de abiertos. En un primer enfoque no parece muy natural ni útil. Sin embargo, y como veremos posteriormente, se utiliza en multitud de situaciones distintas. Primero vamos a escribir una definición.

Definición. Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la ***propiedad de la intersección finita*** si cada subcolección finita

$$\{C_1, \ldots, C_n\}$$

de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir, $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ es no vacía.

Teorema 26.9. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y sólo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección*

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$$

es no vacía.

Demostración. Dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, sea

$$\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

la colección de sus complementarios. Entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:

(1) $\mathcal{A}$ es una colección de abiertos si, y sólo si, $\mathcal{C}$ es una colección de cerrados.

(2) La colección $\mathcal{A}$ cubre X si, y sólo si, la intersección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía.

(3) La subcolección finita $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de $\mathcal{A}$ cubre X si, y sólo si, la intersección de los elementos correspondientes $C_i = X - A_i$ de $\mathcal{C}$ es vacía.

La primera afirmación es trivial, mientras que la segunda y la tercera se deducen de la ley de DeMorgan:

$$X - (\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J}(X - A_\alpha).$$

La prueba del teorema se resume en dos pasos sencillos: se trata de considerar contrarrecíprocos por un lado y de tomar el complementario de los conjuntos por otro.

Así, la afirmación "X es compacto" es equivalente a decir "dada cualquier colección $\mathcal{A}$ de abiertos de X, si $\mathcal{A}$ cubre X, entonces existe una subcolección finita que cubre también a X". Esta afirmación es equivalente a su contrarrecíproco, que es la siguiente: "dada cualquier colección $\mathcal{A}$ de abiertos de X, si ninguna subcolección finita de $\mathcal{A}$ cubre X, entonces la colección no cubre a X". Tomando $\mathcal{C}$ como la colección $\{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$ y aplicando los pasos (1)–(3), vemos que esta afirmación es equivalente a la siguiente: "dada cualquier colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados, si cada intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía, entonces la intersección de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía". Ésta es precisamente la condición de nuestro teorema. ■

Un caso especial de este resultado ocurre cuando tenemos una ***sucesión encajada*** $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \cdots$ de conjuntos cerrados en un espacio compacto X. Si cada uno de estos conjuntos C_n es no vacío, entonces la colección

$\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tiene automáticamente la propiedad de la intersección finita. Entonces la intersección

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n$$

es no vacía.

Utilizaremos este criterio de compacidad en la próxima sección para demostrar que el conjunto de los números reales es no numerable; en el Capítulo 5 cuando probemos el teorema de Tychonoff y, de nuevo, en el Capítulo 8 cuando demostremos el teorema de la categoría de Baire.

Ejercicios

1. (a) Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en el mismo conjunto X; supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. ¿Qué se puede decir acerca de la compacidad de X respecto de cada una de ellas?

(b) Demuestre que si X es un espacio compacto y de Hausdorff con respecto a ambas topologías, entonces bien $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden, o bien no son comparables.

2. (a) Demuestre que en la recta real con la topología de los complementos finitos, cualquier subespacio es compacto.

(b) Si $\mathbb{R}$ tiene la topología formada por los conjuntos A tales que bien $\mathbb{R} - A$ es numerable, o bien es todo $\mathbb{R}$, ¿es $[0, 1]$ un subespacio compacto?

3. Demuestre que una unión finita de subespacios compactos de X es también compacto.

4. Demuestre que cada subespacio compacto de un espacio métrico está acotado en la distancia y además es cerrado. Encuentre un espacio métrico en el cual no todo subespacio cerrado y acotado sea compacto.

5. Sean A y B dos subespacios compactos disjuntos en un espacio de Hausdorff X. Demuestre que existen abiertos disjuntos U y V conteniendo a A y B, respectivamente.

6. Demuestre que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada (esto es, f lleva conjuntos cerrados a conjuntos cerrados).

7. Demuestre que si Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ es una aplicación cerrada.

8. *Teorema. Sea $f : X \to Y$ una aplicación con Y compacto y de Hausdorff. Entonces f es continua si, y sólo si, el **grafo** de f,*

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$. [*Indicación:* si G_f es cerrado y V es un entorno de $f(x_0)$, entonces la intersección de G_f y $X \times (Y - V)$ es cerrada. Aplique entonces el Ejercicio 7.]

9. Generalice el lema del tubo del siguiente modo:
Teorema. Sean A y B subespacios de X e Y respectivamente; sea N un abierto en $X \times Y$ conteniendo a $A \times B$. Si A y B son compactos, entonces existen abiertos U y V en X e Y, respectivamente, tales que $A \times B \subset U \times V \subset N$.

10. (a) Demuestre el siguiente resultado parcial recíproco del teorema del límite uniforme:
Teorema. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas, con $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$. Si f es continua, y si la sucesión f_n es monótona creciente con X compacto, entonces la convergencia es uniforme. [Se dice que f_n es ***monótona creciente*** si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo x y n.]

(b) Encuentre ejemplos que demuestren que el teorema falla si no exigimos la compacidad de X, o si eliminamos la hipótesis de que la sucesión f_n sea monótona. [*Indicación:* véanse los ejercicios de §21.]

11. *Teorema. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos cerrados y conexos de X que está simplemente ordenada por la inclusión propia. Entonces*

$$Y = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

es conexo. [*Indicación:* si $C \cup D$ es una separación de Y, elija conjuntos abiertos y disjuntos U y V de X conteniendo a C y D, respectivamente, y demuestre que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A - (U \cup V))$$

es no vacío.]

12. Sea $p : X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva tal que $p^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada $y \in Y$ (tal aplicación se denomina ***aplicación perfecta***). Demuestre que si Y es compacto, entonces X es compacto. [*Indicación:* si U es un abierto conteniendo a $p^{-1}(\{y\})$, existe un entorno W de y tal que $p^{-1}(W)$ está contenido en U.]

13. Sea G un grupo topológico.

(a) Sean A y B subespacios de G. Si A es cerrado y B es compacto, demuestre que $A \cdot B$ es cerrado. [*Indicación:* si c no está en $A \cdot B$, encuentre un entorno W de c tal que $W \cdot B^{-1}$ no interseque a A.]

(b) Sea H un subgrupo de G y sea $p : G \to G/H$ la aplicación cociente. Si H es compacto, demuestre que p es cerrada.

(c) Sea H un subgrupo compacto de G. Demuestre que si G/H es compacto, entonces G es compacto.

§27 Subespacios compactos de la recta real

Los teoremas de la sección precedente nos permiten construir nuevos espacios compactos a partir de espacios compactos dados, pero si queremos llegar más lejos debemos encontrar algunos espacios compactos para comenzar. El lugar natural para empezar a buscar es la recta real; probaremos que cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto. Las aplicaciones de este hecho incluyen el teorema de los valores extremos y el teorema de la continuidad uniforme en un contexto general adecuado. También proporcionaremos una caracterización de todos los subespacios compactos de $\mathbb{R}^n$ y una prueba de la no numerabilidad del conjunto de los números reales.

A la hora de probar que cada intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es compacto, *sólo* necesitamos una de las propiedades del orden de la recta real —la propiedad del supremo. Probaremos entonces el resultado utilizando sólo esta hipótesis; entonces podremos aplicarla no sólo a la recta real, sino a cualquier conjunto bien ordenado y a otros conjuntos ordenados.

Teorema 27.1. *Sea X un conjunto simplemente ordenado que tiene la propiedad del supremo. Entonces cada subconjunto cerrado de X con la topología del orden es compacto.*

Demostración. *Paso 1.* Dados $a < b$, sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de $[a, b]$ por conjuntos abiertos en $[a, b]$ con la topología relativa (que es la misma que la topología del orden). Quisiéramos demostrar que existe una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a $[a, b]$. Primero veamos lo siguiente: si x es un punto de $[a, b]$ distinto de b, entonces existe un punto $y > x$ de $[a, b]$ tal que el intervalo $[x, y]$ puede ser cubierto como mucho por dos elementos de $\mathcal{A}$.

Si x tiene un inmediato sucesor en X, sea y este inmediato sucesor. Entonces $[x, y]$ contiene únicamente a los puntos x e y, y por tanto puede ser cubierto como mucho por dos elementos de $\mathcal{A}$. Si x no tiene inmediato sucesor en X, elijamos un elemento A de $\mathcal{A}$ conteniendo a x. Como $x \neq b$ y A es abierto, A contiene un intervalo de la forma $[x, c)$, para algún c de $[a, b]$. Elijamos un punto y en (x, c); entonces el intervalo $[x, y]$ está cubierto por el único elemento A de $\mathcal{A}$.

Paso 2. Sea C el conjunto de todos los puntos $y > a$ de $[a, b]$ tales que el intervalo $[a, y]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Aplicando el Paso 1 al caso $x = a$, vemos que existe al menos un punto y verificando tal condición, luego C no es vacío. Sea c el supremo del conjunto C; entonces $a < c \leq b$.

Paso 3. Veamos que c pertenece a C, esto es, vamos a demostrar que el intervalo $[a, c]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Elijamos un elemento A de $\mathcal{A}$ conteniendo a c; como A es abierto, contiene un intervalo de la forma $(d, c]$ para algún d en $[a, b]$. Si c no está en C, debe existir un punto z de C en el intervalo (d, c) pues si no, d sería una cota superior de C más pequeña que c (véase la Figura 27.1). Como z está en C, el intervalo $[a, z]$ puede ser cubierto por un número finito, por ejemplo n, de elementos de $\mathcal{A}$. Ahora $[z, c]$ está contenido en el elemento A de $\mathcal{A}$, por tanto $[a, c] = [a, z] \cup [z, c]$ puede ser cubierto por $n + 1$ elementos de $\mathcal{A}$. Así, c está en C.

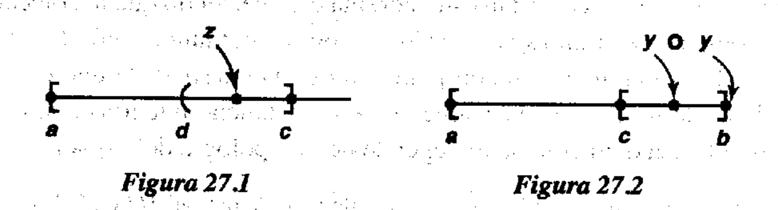


Figura 27.1 *Figura 27.2*

Paso 4. Finalmente, vamos a demostrar que $c = b$ y el teorema quedará probado. Supongamos que $c < b$. Aplicando el Paso 1 al caso $x = c$, concluimos que existe un punto $y > c$ de $[a, b]$ tal que el intervalo $[c, y]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$ (véase la Figura 27.2). Hemos probado en el Paso 3 que $c \in C$, por lo que $[a, c]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Por tanto, el intervalo

$$[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$$

puede ser cubierto también por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Esto significa que y está en C, contradiciendo el hecho de que c es una cota superior de C. ■

Corolario 27.2. *Cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto.*

Ahora caracterizamos los intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 27.3. *Un subespacio A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado en la distancia euclídea d o en la distancia del supremo ρ.*

Demostración. Será suficiente considerar sólo la distancia ρ pues las desigualdades

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y)$$

implican que A está acotado en la distancia d si, y sólo si, lo está en la distancia ρ. Supongamos que A es compacto. Entonces por el Teorema 26.3 es cerrado. Consideremos la colección de conjuntos abiertos

$$\{B_\rho(\mathbf{0}, m) \mid m \in \mathbb{Z}_+\}$$

cuya unión es el espacio total $\mathbb{R}^n$. Alguna subcolección finita debe cubrir A. Se sigue entonces que $A \subset B_\rho(\mathbf{0}, M)$ para algún M. De esta forma, dados dos puntos x e y de A, tenemos $\rho(x, y) \leq 2M$. Por tanto, A está acotado en ρ.

Recíprocamente, supongamos que A es cerrado y acotado en ρ; supongamos que $\rho(x, y) \leq N$ para cada par x, y de puntos de A. Elijamos un punto x_0 de A, y sea $\rho(x_0, \mathbf{0}) = b$. La desigualdad triangular implica que $\rho(x, \mathbf{0}) \leq N + b$ para cada x en A. Si $P = N + b$, entonces A es un subconjunto del cubo $[-P, P]^n$, el cual es compacto. Como A es cerrado, entonces A también es compacto. ■

Algunos estudiantes recuerdan este teorema estableciendo que la colección de los conjuntos compactos en un *espacio métrico* son los conjuntos cerrados y acotados. Este enunciado es claramente inapropiado ya que la cuestión de qué conjuntos son acotados depende única y exclusivamente de la distancia, mientras que el hecho de que un conjunto sea o no compacto depende de la topología del espacio.

EJEMPLO 1. La esfera unidad S^{n-1} y la bola cerrada unidad B^n en $\mathbb{R}^n$ son compactos pues son cerrados y acotados. El conjunto

$$A = \{x \times (1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no está acotado. El conjunto

$$S = \{x \times (\operatorname{sen}(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$$

está acotado en $\mathbb{R}^2$, pero no es compacto porque no es cerrado.

Ahora vamos a probar el teorema de los valores extremos del cálculo en un contexto generalizado.

Teorema 27.4 (Teorema de los valores extremos). *Sea $f : X \to Y$ continua, donde Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si X es compacto, entonces existen puntos c y d en X tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para cada $x \in X$.*

El teorema de los valores extremos del cálculo es un caso especial de éste cuando X es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ e Y es $\mathbb{R}$.

Demostración. Como f es continua y X es compacto, el conjunto $A = f(X)$ es compacto. Veamos que A tiene un máximo M y un mínimo m. Entonces, como m y M pertenecen a A, debemos tener $m = f(c)$ y $M = f(d)$ para algunos puntos c y d de X. Si A no tiene un máximo, entonces la colección

$$\{(-\infty, a) \mid a \in A\}$$

es un cubrimiento por abiertos de A. Como A es compacto, existe una subcolección finita

$$\{(-\infty, a_1), \ldots, (-\infty, a_n)\}$$

que cubre a A. Si a_i es el mayor de los elementos $a_1, \ldots, a_n$, entonces a_i no pertenece a ninguno de estos conjuntos, afirmación contraria al hecho de que estos conjuntos cubren a A. Un argumento similar demuestra que A tiene un mínimo. ■

Vamos a probar ahora el teorema de la continuidad uniforme del cálculo. En el proceso nos vemos obligados a introducir una nueva noción que nos será sorprendentemente útil. Esta noción es el *número de Lebesgue* para un cubrimiento abierto de un espacio métrico. Primero veamos una definición preliminar.

Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de X. Para cada $x \in X$, definimos la ***distancia de*** x ***a*** A por la ecuación

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Es sencillo demostrar que para A fijo, la función $d(x, A)$ es una función continua definida en X: dados $x, y \in X$, se tienen las desigualdades

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

para cada $a \in A$. Se sigue entonces que

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \text{ínf}\, d(y, a) = d(y, A),$$

así que

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

La misma igualdad se tiene con x e y intercambiados, de lo que se deduce la continuidad de la función $d(x, A)$.

Ahora introducimos la noción de número de Lebesgue. Recordamos que el diámetro de un conjunto acotado A en un espacio métrico (X, d) es el número

$$\sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Lema 27.5 (El lema del número de Lebesgue). *Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto del espacio métrico (X, d). Si X es compacto, existe un $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto X con diámetro menor que δ, existe un elemento de $\mathcal{A}$ conteniéndolo.*

El número δ se denomina ***número de Lebesgue*** para el cubrimiento $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Si X es un elemento de $\mathcal{A}$, entonces el resultado se sigue para cualquier δ positivo. Por tanto, supongamos que X no es un elemento de $\mathcal{A}$. Elegimos una subcolección finita $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de $\mathcal{A}$ que cubra a X. Para cada i, tomamos $C_i = X - A_i$, y definimos $f : X \to \mathbb{R}$ como la función media de las distancias de un punto x a los conjuntos C_i, esto es,

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i).$$

Vamos a demostrar que $f(x) > 0$ para todo x. Dado $x \in X$, escojamos i tal que $x \in A_i$. Entonces elegimos ϵ de modo que la bola de radio ϵ esté contenida en A_i. Por tanto, $d(x, C_i) \geq \epsilon$, y así $f(x) \geq \epsilon/n$. Como f es continua, tiene un valor mínimo δ; veamos que este número es precisamente el número de Lebesgue. Sea B un subconjunto de X cuyo diámetro sea menor que δ. Elijamos un punto x_0 de B; entonces B está contenido en la bola de radio δ y centrada en x_0. Ahora bien,

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$$

donde $d(x_0, C_m)$ es el mayor de los números $d(x_0, C_i)$. Entonces la bola de radio δ y centrada en x_0 está contenida en el elemento $A_m = X - C_m$ del cubrimiento $\mathcal{A}$. ■

Definición. Una función f del espacio métrico (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y) se dice que es ***uniformemente continua*** si dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos x_0, x_1 de X,

$$d_X(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon.$$

Teorema 27.6 (Teorema de la continuidad uniforme). *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua del espacio métrico compacto (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y). Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, tomamos un cubrimiento de Y por bolas $B(y, \epsilon/2)$ de radio $\epsilon/2$. Sea $\mathcal{A}$ el cubrimiento abierto de X que se obtiene al tomar las imágenes inversas de dichas bolas bajo f. Elegimos δ como el número de Lebesgue para el cubrimiento $\mathcal{A}$. Entonces, si x_1 y x_2 son dos puntos de X tales que $d_X(x_1, x_2) < \delta$, el conjunto $\{x_1, x_2\}$ tiene diámetro menor que δ, luego su imagen $\{f(x_1), f(x_2)\}$ está contenida en alguna bola $B(y, \epsilon/2)$. Entonces $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ tal y como se quería demostrar. ■

Finalmente, vamos a probar que el conjunto de los números reales es no numerable. El aspecto interesante de esta demostración es que no involucra elementos algebraicos, sino únicamente propiedades de orden del conjunto $\mathbb{R}$.

Definición. Si X es un espacio, un punto x de X se dice que es un ***punto aislado*** de X si el conjunto unipuntual $\{x\}$ es abierto en X.

Teorema 27.7. *Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Si X no tiene puntos aislados, entonces X es no numerable.*

Demostración. *Paso 1*. Vamos a probar primero que dado un conjunto no vacío U de X y cualquier punto $x \in X$, existe un conjunto no vacío V contenido en U tal que $x \notin \bar{V}$. Elegimos un punto y en U distinto de x; esto es posible si x está en U pues x no es un punto aislado, y si x no está en U simplemente porque U es no vacío. Ahora elegimos abiertos disjuntos W_1 y W_2 conteniendo a x e y, respectivamente. Entonces el conjunto $V = W_2 \cap U$ verifica las condiciones del enunciado: está contenido en U, es no vacío pues contiene a y y además su adherencia no contiene a x (véase la Figura 27.3).

Paso 2. Veamos que dada una función cualquiera $f : \mathbb{Z}_+ \to X$, dicha función no puede ser sobreyectiva. Se sigue entonces que X es no numerable.

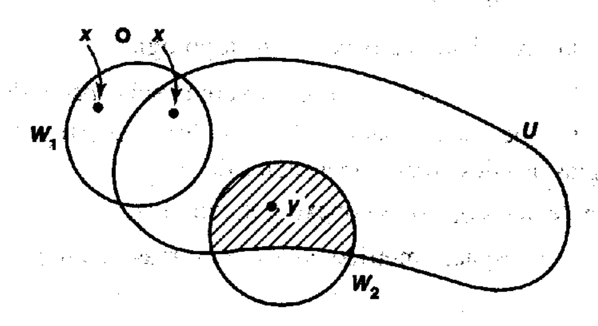


Figura 27.3

Sea $x_n = f(n)$. Aplicando el Paso 1 al conjunto no vacío $U = X$ podemos elegir un conjunto abierto y no vacío $V_1 \subset X$ tal que $\bar{V}_1$ no contenga a x_1. En general, dado V_{n-1} abierto y no vacío, elegimos V_n un abierto no vacío tal que $V_n \subset V_{n-1}$ y $\bar{V}_n$ no contiene a x_n. Consideramos así la sucesión encajada

$$\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \cdots$$

de cerrados no vacíos en X. Como X es compacto, por el Teorema 26.9 existe un punto $x \in \cap \bar{V}_n$. Ahora, x no puede coincidir con ninguno de los x_n para cada n, ya que $x \in \bar{V}_n$ mientras que x_n no. ∎

Corolario 27.8. *Cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es no numerable.*

Ejercicios

1. Pruebe que si X es un conjunto ordenado en el cual cada intervalo cerrado es compacto, entonces X tiene la propiedad del supremo.
2. Sea X un espacio métrico con distancia d y sea $A \subset X$ no vacío.
   (a) Demuestre que $d(x, A) = 0$ si, y sólo si, $x \in \bar{A}$.

(b) Demuestre que si A es compacto, $d(x, A) = d(x, a)$ para algún $a \in A$.

(c) Defina el ϵ-entorno de A en X como el conjunto

$$U(A, \epsilon) = \{x \mid d(x, A) < \epsilon\}.$$

Demuestre que $U(A, \epsilon)$ coincide con la unión de las bolas abiertas $B_d(a, \epsilon)$ para $a \in A$.

(d) Supongamos que A es compacto y sea U un abierto conteniendo a A. Demuestre que algún ϵ-entorno de A está contenido en U.

(e) Demuestre que la afirmación (d) no es cierta si suponemos que A es cerrado pero no compacto.

3. Recordemos que $\mathbb{R}_K$ denota a $\mathbb{R}$ con la K-topología.

(a) Demuestre que $[0, 1]$ no es compacto como subespacio de $\mathbb{R}_K$.

(b) Demuestre que $\mathbb{R}_K$ es conexo. [*Indicación:* $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ heredan sus topologías usuales como subespacios de $\mathbb{R}_K$.]

(c) Demuestre que $\mathbb{R}_K$ no es conexo por caminos.

4. Demuestre que un espacio métrico conexo con más de un punto es no numerable.

5. Sean X un espacio compacto y de Hausdorff y $\{A_n\}$ una colección numerable de conjuntos cerrados de X. Demuestre que si cada conjunto A_n tiene interior vacío en X, entonces la unión $\cup A_n$ tiene interior vacío en X. [*Indicación:* es una prueba análoga a la del Teorema 27.7.]

Éste es un caso especial del *teorema de la categoría de Baire* que estudiaremos en el Capítulo 8.

6. Sea A_0 el intervalo cerrado $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$; sea A_1 el conjunto obtenido de A_0 quitando el *tercio medio* $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y sea A_2 el conjunto obtenido de A_1 quitando los *tercios medios* $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. En general, se define A_n por la ecuación

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right).$$

La intersección

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n$$

se denomina ***conjunto de Cantor*** y es un subespacio de $[0, 1]$.

(a) Demuestre que C es totalmente disconexo.

(b) Demuestre que C es compacto.

(c) Demuestre que cada conjunto A_n es unión de un número finito de intervalos cerrados disjuntos con longitud $1/3^n$; demuestre que los extremos de dichos intervalos están en C.

(d) Demuestre que C no tiene puntos aislados.

(e) Concluya que C es no numerable.

§28 Compacidad por punto límite

Tal y como indicamos a la hora de introducir la noción de compacidad, existen otras formulaciones equivalentes que son frecuentemente utilizadas. En esta sección introducimos una de ellas que es más débil, en general, aunque coincide cuando se trata de espacios metrizables.

Definición. Un espacio se dice que es ***compacto por punto límite*** si cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite.

En cierto sentido, esta propiedad es más intuitiva y natural que la definición de compacidad. En los inicios de la topología, era esta definición la que se conocía como "compacidad", mientras que la definición en términos de cubrimientos era llamada "bicompacidad". Más tarde, la palabra "compacta" se empezó a utilizar también para la definición por cubrimientos y se buscó un nuevo nombre para la definición que nos ocupa en esta sección (de hecho, todavía no se ha encontrado un nombre definitivo). Algunos han propuesto "compacidad de Frechet", otros la llaman "propiedad de Bolzano-Weierstrass". Nosotros sugerimos el término "compacidad por punto límite". Creemos que es tan buena como cualquier otra y además describe la propiedad de la que hablamos.

Teorema 28.1. *Compacidad implica compacidad por punto límite, pero el recíproco no es cierto.*

Demostración. Sea X un espacio compacto. Dado un subconjunto A de X, queremos probar que si A es infinito, entonces tiene un punto límite. Vamos a demostrar el contrarrecíproco —si A no tiene un punto límite, entonces es finito.

Supongamos pues que A no tiene un punto límite. Entonces A contiene todos sus puntos límite, luego es cerrado. Más aún, podemos elegir para cada $a \in A$ un entorno U_a de a de modo que U_a interseque a A sólo en el punto a. El espacio X está cubierto por el conjunto abierto $X - A$ y los abiertos U_a. Como es compacto, puede ser cubierto por un número finito de tales conjuntos. Como $X - A$ no interseca a A y cada conjunto U_a contiene únicamente un punto de A, el conjunto A debe ser finito. ■

EJEMPLO 1. Sea Y un conjunto con dos puntos; consideramos en Y la topología trivial, es decir, la formada por el conjunto vacío y el propio Y. Entonces el espacio $X = \mathbb{Z}_+ \times Y$ es compacto por punto límite, pues cada subconjunto no vacío de X tiene un punto límite.

Sin embargo, no es compacto, ya que el cubrimiento de X por los abiertos $U_n = \{n\} \times Y$ no admite una subcolección finita que cubra a X.

EJEMPLO 2. He aquí un ejemplo menos trivial. Consideremos el conjunto no numerable, bien ordenado y minimal S_Ω con la topología del orden. El espacio S_Ω no es compacto ya que no tiene un elemento máximo. Sin embargo, sí es compacto por punto límite. En efecto, sea A un subconjunto infinito de S_Ω. Elijamos un subconjunto B de A que sea infinito numerable. Siendo numerable, el conjunto B tiene una cota superior b en S_Ω; entonces B es un subconjunto del intervalo $[a_0, b]$ de S_Ω, donde a_0 es el mínimo de S_Ω. Como S_Ω tiene la propiedad del supremo, el intervalo $[a_0, b]$ es compacto. Por el teorema precedente, B tiene un punto límite x en $[a_0, b]$. El punto x es también un punto límite de A. Así, S_Ω es compacto por punto límite.

Veamos ahora que estas dos definiciones alternativas de compacidad coinciden para espacios metrizables. Para este propósito, introducimos un nueva versión de compacidad llamada *compacidad sucesional*. Este resultado será utilizado en el Capítulo 7.

Definición. Sea X un espacio topológico. Si (x_n) es una sucesión de puntos de X y si

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$$

es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión (y_i) definida por $y_i = x_{n_i}$ se denomina ***subsucesión*** de la sucesión (x_n). El espacio X se dice que es ***sucesionalmente compacto*** si cada sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.

***Teorema 28.2.** *Sea X un espacio metrizable. Entonces son equivalentes:*

(1) X es compacto.

(2) X es compacto por punto límite.

(3) X es sucesionalmente compacto.

Demostración. Ya hemos demostrado que (1) $\Rightarrow$ (2). Para demostrar que (2) $\Rightarrow$ (3), supongamos que X es compacto por punto límite. Dada una sucesión (x_n) de puntos de X, consideremos el conjunto $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Si el conjunto A es finito, entonces existe un punto x tal que $x = x_n$ para un número infinito de valores de n. En este caso, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión que es constante y, por tanto, converge trivialmente. Por otro lado, si A es infinito, entonces A tiene un punto límite x. Definimos una subsucesión de (x_n) convergente a x del siguiente modo: primero elegimos n_1 tal que

$$x_{n_1} \in B(x, 1).$$

Supongamos entonces que el entero positivo n_{i-1} está dado. Como la bola $B(x, 1/i)$ interseca a A en un número infinito de puntos, podemos elegir un índice $n_i > n_{i-1}$ tal que

$$x_{n_i} \in B(x, 1/i).$$

Entonces la subsucesión $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ converge a x.

Finalmente, veamos que (3) $\Rightarrow$ (1). Esta es la parte más complicada de la demostración. Primero veamos que si X es sucesionalmente compacto, entonces el lema del número de Lebesgue se tiene para X (esto se seguiría de la condición de compacidad, pero ésta es precisamente la propiedad que tratamos de demostrar). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Supongamos que no existe un $\delta > 0$ tal que cada conjunto de diámetro menor que δ esté contenido en un elemento de $\mathcal{A}$ y veamos que se llega a una contradicción.

Nuestra suposición implica, en particular, que para cada entero positivo n, existe un conjunto C_n con diámetro menor que $1/n$ que no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{A}$. Elijamos un punto $x_n \in C_n$ para cada n. Por hipótesis, existe una subsucesión (x_{n_i}) de la sucesión (x_n) que converge a un punto a. Ahora, a pertenece a algún elemento A de $\mathcal{A}$. Como A es abierto, podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subset A$. Si i es suficientemente grande para que $1/n_i < \epsilon/2$, entonces el conjunto C_n está contenido en el $\epsilon/2$-entorno de x_{n_i}; si i se elige suficientemente grande como para que $d(x_{n_i}, a) < \epsilon/2$, entonces C_{n_i} está contenido en el ϵ-entorno de a. Pero esto significa que $C_{n_i} \subset A$, que es contrario a la hipótesis.

En segundo lugar vamos a demostrar que si X es sucesionalmente compacto, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un cubrimiento finito de X por ϵ-bolas abiertas. Una vez probado esto, de nuevo llegaremos a una contradicción. Supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de ϵ-bolas. Construimos una sucesión de puntos de x_n como sigue: primero elegimos x_1, un punto cualquiera de X. Observando que la bola $B(x_1, \epsilon)$ no es todo el espacio X (si lo fuera, X estaría cubierto por una única ϵ-bola), elegimos x_2 un punto de X que no esté en $B(x_1, \epsilon)$. En general, dados $x_1, \ldots, x_n$, elegimos x_{n+1} un punto que no esté en la unión

$$B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$$

utilizando el hecho de que estas bolas no cubren X. Observemos que, por construcción, $d(x_{n+1}, x_i) \geq \epsilon$ para $i = 1, \ldots, n$. De esta forma, la sucesión (x_n) no puede tener una subsucesión convergente; de hecho, cualquier bola de radio $\epsilon/2$ contiene a lo más un punto de la sucesión.

Finalmente, veamos que si X es sucesionalmente compacto, entonces es compacto. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Como X es sucesionalmente compacto, el cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ tiene un número de Lebesgue δ. Si $\epsilon = \delta/3$, como X es sucesionalmente compacto, podemos encontrar un cubrimiento finito de X por ϵ-bolas. Cada una de estas bolas tiene como mucho diámetro $2\delta/3$, por tanto están conteni-

das en algún elemento de $\mathcal{A}$. Eligiendo dicho elemento de $\mathcal{A}$ para cada una de estas ϵ-bolas, obtenemos una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre X. ∎

EJEMPLO 3. Recordemos que $\bar{S}_\Omega$ denota el conjunto no numerable, bien ordenado y minimal S_Ω con el punto Ω añadido (en la topología del orden, Ω es un punto límite de S_Ω y es por este motivo por el que hemos introducido en §10 la notación $\bar{S}_\Omega$ para $S_\Omega \cup \{\Omega\}$). Es fácil comprobar que el espacio $\bar{S}_\Omega$ no es metrizable ya que no satisface el lema de la sucesión: el punto Ω es un punto límite de S_Ω pero no es el límite de una sucesión de puntos de S_Ω ya que cualquier sucesión de puntos de S_Ω tiene una cota superior en S_Ω. El espacio S_Ω, por otra parte, sí satisface el lema de la sucesión tal y como se puede comprobar fácilmente. No obstante, S_Ω no es metrizable ya que es compacto por punto límite pero no compacto.

Ejercicios

1. Considere $[0,1]^\omega$ con la topología uniforme. Encuentre un subconjunto infinito de este espacio que no tenga puntos límite.

2. Demuestre que $[0,1]$ no es compacto por punto límite como subespacio de $\mathbb{R}_\ell$.

3. Sea X un espacio compacto por punto límite.

(a) Si $f : X \to Y$ es continua, ¿es $f(X)$ compacto por punto límite?

(b) Si A es un subconjunto cerrado de X, ¿es A compacto por punto límite?

(c) Si X es un subespacio del espacio de Hausdorff Z, ¿es X un cerrado de Z?

Comentemos aquí que, en general, no es cierto que el producto de dos espacios compactos por punto límite sea un espacio compacto por punto límite, incluso cuando la condición de Hausdorff se asume. Sin embargo, los ejemplos son demasiado complicados (véase [S-S], Ejemplo 112).

4. Un espacio X se dice que es ***numerablemente compacto*** si cada cubrimiento numerable de abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a X. Demuestre que para un espacio T_1, la condición numerablemente compacto equivale a la de compacto por punto límite. [*Indicación:* si ninguna subcolección finita de los U_n cubre a X, elija $x_n \notin U_1 \cup \cdots \cup U_n$, para cada n.]

5. Demuestre que X es numerablemente compacto si, y sólo si, cada sucesión encajada $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía.

6. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $f : X \to X$ satisface la condición

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$, entonces f se dice que es una ***isometría*** de X. Demuestre que si f es una isometría y X es compacto, entonces f es biyectiva y, por tanto, un homeomorfismo. [*Indicación:* si $a \notin f(X)$, elija ϵ tal que el ϵ-entorno de a sea disjunto de $f(X)$. Elija $x_1 = a$ y, en general, $x_{n+1} = f(x_n)$. Demuestre que $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ si $n \neq m$.]

7. Sea (X, d) un espacio métrico. Si f satisface la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces f se dice que es una ***aplicación contráctil***. Si existe un número $\alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$, entonces f se denomina ***contracción***. Un ***punto fijo*** de f es un punto x tal que $f(x) = x$.

(a) Si f es una contracción y X es compacto, demuestre que f tiene un único punto fijo. [*Indicación:* defina $f^1 = f$ y $f^{n+1} = f \circ f^n$. Considere la intersección A de los conjuntos $A_n = f^n(X)$.]

(b) Demuestre que si f es una aplicación contráctil y X es compacto, entonces f tiene un único punto fijo. [*Indicación:* sea A como antes. Dado $x \in A$, elija x_n tal que $x = f^{n+1}(x_n)$. Si a es el límite de alguna subsucesión de la sucesión $y_n = f^n(x_n)$, demuestre que $a \in A$ y que $f(a) = x$. Concluya que $f(A) = A$, luego diám $A = 0$.]

(c) Sea $X = [0, 1]$. Demuestre que $f(x) = x - x^2/2$ aplica X en X y es una aplicación contráctil pero no una contracción. [*Indicación:* utilice el teorema del valor medio del cálculo.]

(d) El resultado en (a) se tiene también si X es un espacio métrico completo, tal como $\mathbb{R}$; véanse los ejercicios de la sección §43. Sin embargo, no ocurre lo mismo para el resultado (b): demuestre que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [x + (x^2 + a)^{1/2}]/2$ es una aplicación contráctil que no es una contracción y no tiene puntos fijos.

§29 Compacidad local

En esta sección estudiamos el concepto de compacidad local, y probamos el teorema básico que demuestra que cualquier espacio de Hausdorff y localmente compacto puede ser embebido en un cierto espacio compacto de Hausdorff que se llama *compactificación por un punto*.

Definición. Un espacio X se dice que es ***localmente compacto en*** x si existe un subespacio compacto C de X que contiene un entorno de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es ***localmente compacto***.

Obsérvese que un espacio compacto es automáticamente localmente compacto.

EJEMPLO 1. La recta real $\mathbb{R}$ es localmente compacta. El punto x está contenido en un intervalo de la forma (a, b), el cual a su vez está contenido en el subespacio compacto $[a, b]$. El subespacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es localmente compacto como se puede comprobar fácilmente.

EJEMPLO 2. El espacio $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto; el punto x está contenido en algún elemento básico de la forma $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, el cual está contenido en el subespacio compacto $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. El espacio $\mathbb{R}^\omega$ no es localmente compacto; ninguno de sus elementos básicos están contenidos en un subespacio compacto ya que si

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$$

estuviera contenido en un subespacio compacto, su adherencia

$$\bar{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$$

sería compacta, cuando ciertamente no lo es.

EJEMPLO 3. Cada conjunto simplemente ordenado X con la propiedad del supremo es localmente compacto. Dado un elemento básico para X, está contenido en un intervalo cerrado de X, el cual es compacto.

De entre todas las clases de espacios topológicos, los espacios metrizables por un lado y los espacios que son a la vez de Hausdorff y compactos por otro presentan una serie de facilidades para trabajar con ellos en matemáticas. Tales espacios tienen multitud de propiedades útiles, las cuales se utilizan a la hora de demostrar teoremas o cuando se realizan construcciones. Si un espacio dado no pertenece a ninguna de estas dos clases, lo mejor que uno puede esperar es que dicho espacio sea en realidad un subespacio topológico de otro mayor que sí pertenezca a alguna de las dos clases. Por supuesto, un subespacio de un espacio metrizable también es metrizable, así que esta posibilidad no parece interesante. Sin embargo, un subespacio de un espacio compacto y de Hausdorff no es necesariamente compacto. De esta forma surge la cuestión: ¿bajo qué hipótesis es un espacio homeomorfo a algún subespacio de un espacio de Hausdorff y compacto? Proporcionaremos una respuesta a esta pregunta a continuación. Volveremos a esta cuestión posteriormente en el Capítulo 5 cuando estudiemos compactificaciones en general.

Teorema 29.1. *Sea X un espacio. Entonces X es localmente compacto y de Hausdorff si, y sólo si, existe un subespacio Y que satisfaga las siguientes condiciones:*

(1) X es un subespacio de Y.

(2) El conjunto $Y - X$ consta de un solo elemento.

(3) Y es un espacio compacto y de Hausdorff.

Si Y e Y' son dos espacios que satisfacen estas condiciones, entonces existe un homeomorfismo de Y en Y' que, restringido al subespacio X, es simplemente la identidad en X.

Demostración. *Paso 1.* Vamos a verificar primero la unicidad. Sean Y e Y' dos espacios que satisfacen estas condiciones. Definimos $h : Y \to Y'$ donde h aplica el único punto p de $Y - X$ en el único punto q de $Y' - X$ y $h(x) = x$ para todo x en X. Veamos que si U es abierto en Y, entonces $h(U)$ es abierto en Y'. Por simetría, se concluirá que h es un homeomorfismo.

Primero, consideremos el caso en el que U no contiene a p. Entonces $h(U) = U$. Como U es abierto en Y y está contenido en X, entonces es abierto en X. Como X es abierto en Y', entonces U es abierto también en Y' tal y como queríamos demostrar.

Segundo, supongamos que U contiene al punto p. Como $C = Y - U$ es cerrado en Y, es compacto como subespacio de Y. Como C está contenido en X, es un subespacio compacto de X. Entonces, como X es un subespacio de Y', el espacio C también es un subespacio compacto de Y'. Como Y' es de Hausdorff, C es cerrado en Y', y así $h(U) = Y' - C$ es abierto en Y', como se deseaba.

Paso 2. Ahora supongamos que X es localmente compacto y de Hausdorff y construyamos el espacio Y. El Paso 1 nos da una idea acerca de cómo proceder. Elijamos algún objeto que no sea un punto de X, objeto que denotaremos por el símbolo ∞ por conveniencia. Consideremos entonces el conjunto $Y = X \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: los abiertos serán: (1) todos los subconjuntos U de X que son abiertos en X, y (2) todos los conjuntos de la forma $Y - C$, donde C es un subespacio compacto de X.

Necesitamos comprobar que esta colección es, de hecho, una topología sobre Y. El conjunto vacío es un conjunto del tipo (1), y el espacio total Y es un conjunto del tipo (2). Para comprobar que la intersección de dos abiertos es un abierto debemos distinguir tres casos:

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 & & \text{es del tipo (1)},\\ (Y - C_1) \cap (Y - C_2) &= Y - (C_1 \cup C_2) & \text{es del tipo (2)},\\ U_1 \cap (Y - C_1) &= U_1 \cap (X - C_1) & \text{es del tipo (1)}, \end{aligned}$$

pues C_1 es cerrado en X. Análogamente, se comprueba que la unión arbitraria de conjuntos abiertos de cualquier tipo es también un abierto:

$$\begin{aligned} \bigcup U_\alpha &= U & \text{es del tipo (1)},\\ \bigcup (Y - C_\beta) = Y - (\bigcap C_\beta) &= Y - C & \text{es del tipo (2)},\\ (\bigcup U_\alpha) \cup (\bigcup (Y - C_\beta)) = U \cup (Y - C) &= Y - (C - U), & \end{aligned}$$

que es del tipo (2) porque $C-U$ es un subespacio cerrado de C y, por tanto, compacto.

Veamos ahora que X es un subespacio de Y. Dado un conjunto abierto de Y, veamos que su intersección con X es un abierto en X. Si U es del tipo (1), entonces $U \cap X = U$ y si $Y - C$ es del tipo (2), entonces $(Y - C) \cap X = X - C$; ambos conjuntos son abiertos en X. Recíprocamente, cualquier abierto en X es un conjunto del tipo (1) y por tanto abierto en Y.

Para demostrar que A es compacto, sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de Y. La colección $\mathcal{A}$ debe contener un conjunto abierto del tipo (2), por ejemplo $Y - C$, ya que ninguno de los conjuntos abiertos del tipo (1) contiene al punto ∞. Si consideramos todos los miembros de $\mathcal{A}$ distintos de $Y - C$ y los intersecamos con X tenemos entonces un cubrimiento de C por abiertos de X. Como C es compacto, un número finito de ellos cubren C; la correspondiente colección finita de elementos de $\mathcal{A}$ junto con el elemento $Y - C$ cubrirán entonces todo Y.

Veamos ahora que Y es de Hausdorff: sean x e y dos puntos de Y. Si ambos están contenidos en X, existen abiertos disjuntos U y V en X conteniéndolos respectivamente. Por otra parte, si $x \in X$ e $y = \infty$, podemos elegir un conjunto compacto C conteniendo un entorno U de x. Entonces U e $Y - C$ son entornos disjuntos de x e ∞, respectivamente, en Y.

Paso 3. Finalmente, vamos a demostrar el recíproco. Supongamos que existe un espacio Y que satisface las condiciones (1)–(3). Entonces X es de Hausdorff porque es un subespacio del espacio de Hausdorff Y. Dado $x \in X$, veamos que X es localmente compacto en x. Elegimos abiertos disjuntos U y V de Y conteniendo a x y al único punto de $Y - X$, respectivamente. Entonces el conjunto $C = Y - V$ es cerrado en Y, luego es un subespacio compacto de Y. Como C está contenido en X, es también compacto como subespacio de X y además contiene un entorno U de x. ∎

Cuando el espacio X en cuestión ya es compacto, el espacio Y del teorema precedente no es interesante, ya que se obtiene al añadir a X un único punto aislado. Sin embargo, si X no es compacto, entonces el punto de $Y - X$ es un punto límite de X, de modo que $\bar{X} = Y$.

Definición. Si Y es un espacio compacto y de Hausdorff y X es un subespacio propio de Y cuya adherencia coincide con Y, entonces se dice que Y es ***compactificación*** de X. Si $Y - X$ consiste en un único punto, entonces Y se denomina ***compactificación por un punto*** de X.

Hemos demostrado que X admite una compactificación por un punto Y si, y sólo si, X es un espacio de Hausdorff y localmente compacto que no es compacto. Además, dicha compactificación es única salvo homeomorfismos.

EJEMPLO 4. La compactificación por un punto de la recta real $\mathbb{R}$ es homeomorfa al círculo, tal y como se puede comprobar. Análogamente, la compactificación de $\mathbb{R}^2$ por un punto es homeomorfa a la esfera S^2. Si $\mathbb{R}^2$ se identifica con el espacio de los números complejos $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se denomina *esfera de Riemann* o *plano complejo ampliado*.

En algunos aspectos nuestra definición de compacidad local no es satisfactoria. Normalmente, se dice que un espacio X satisface una propiedad "localmente" si cada $x \in X$ tiene entornos "arbitrariamente pequeños" verificando dicha propiedad. La definición de compacidad local que hemos proporcionado no se adapta a este esquema y, en este sentido, cabe preguntarse si no existe alguna formulación alternativa de esta propiedad. La respuesta nos la proporciona el siguiente resultado válido para espacios de Hausdorff:

Teorema 29.2. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si, y sólo si, dados x en X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.*

Demostración. Claramente esta nueva formulación implica la compacidad local; el conjunto $C = \bar{V}$ es el compacto requerido conteniendo un entorno V de x. Para demostrar el recíproco, supongamos que X es localmente compacto; sean x un punto de X y U un entorno de x. Consideramos la compactificación por un punto Y de X, y sea C el conjunto $Y - U$. Entonces C es cerrado en Y, así que C es un subespacio compacto de Y. Aplicando el Lema 26.4 elegimos abiertos disjuntos V y W conteniendo a x y C, respectivamente. Entonces la adherencia $\bar{V}$ de V en Y es compacta y además $\bar{V}$ es disjunto de C, así que $\bar{V} \subset U$, tal y como queríamos demostrar. ■

Corolario 29.3. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff y sea A un subespacio de X. Si A es cerrado en X o abierto en X, entonces A es localmente compacto.*

Demostración. Supongamos que A es cerrado en X. Dado $x \in A$, sea C un subespacio compacto de X conteniendo un entorno U de x. Entonces $C \cap A$ es cerrado en C y, por tanto, compacto. Además contiene al entorno $U \cap A$ de x en A (no hemos utilizado la condición de Hausdorff aquí).

Supongamos ahora que A es abierto en X. Dado $x \in A$, aplicamos el resultado precedente y elegimos un entorno V de x en X tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset A$. Entonces $C = \bar{V}$ es un subespacio compacto de A conteniendo el entorno V de x en A. ■

Corolario 29.4. *Un espacio X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y de Hausdorff si, y sólo si, X es localmente compacto y de Hausdorff.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Teorema 29.1 y el Corolario 29.3. ■

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ no es un espacio localmente compacto.

2. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios no vacíos.

(a) Demuestre que si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto excepto para un número finito de valores de α.

(b) Demuestre el recíproco, suponiendo cierto el teorema de Tychonoff.

3. Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿se sigue entonces que $f(X)$ es localmente compacto? ¿Qué ocurre si, además, f es una aplicación abierta? Justifique sus respuestas.

4. Demuestre que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

5. Si $f : X_1 \to X_2$ es un homeomorfismo de espacios de Hausdorff y localmente compactos, ¿cómo se extiende f a un homeomorfismo entre sus respectivas compactificaciones por un punto?

6. Demuestre que la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$ es homeomorfa a la circunferencia S^1.

7. Demuestre que la compactificación por un punto de S_Ω es homeomorfa a $\bar{S}_\Omega$.

8. Demuestre que la compactificación por un punto de $\mathbb{Z}_+$ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de $\mathbb{R}$.

9. Demuestre que si G es un grupo topológico localmente compacto y H es un subgrupo, entonces G/H es localmente compacto.

10. Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff que es localmente compacto en el punto x, entonces para cada entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.

***11.** Demuestre lo siguiente:

(a) Lema. *Si $p : X \to Y$ es una aplicación cociente y Z es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces la aplicación*

$$\pi = p \times i_Z : X \times Z \to Y \times Z$$

es una aplicación cociente. [*Indicación:* si $\pi^{-1}(A)$ es abierto y contiene a $x \times y$, elija abiertos U_1 y V con $\bar{V}$ compacto, tales que $x \times y \in U_1 \times V$ y $U_1 \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$. Dados $U_i \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$ utilice el lema del tubo

para elegir un abierto U_{i+1} conteniendo a $p^{-1}(p(U_i))$ tal que $U_{i+1} \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$. Sea $U = \cup U_i$; demuestre que $U \times V$ es un entorno saturado de $x \times y$ que está contenido en $\pi^{-1}(A)$.] Una prueba completamente distinta de este resultado se puede encontrar en los ejercicios de §46.

(b) *Teorema. Sean $p : A \to B$ y $q : C \to D$ aplicaciones cociente. Si B y C son espacios de Hausdorff y localmente compactos, entonces $p \times q : A \times C \to B \times D$ es una aplicación cociente.*

*Ejercicios complementarios: redes

Ya hemos visto que las sucesiones son instrumentos adecuados para detectar puntos límite, funciones continuas y conjuntos compactos en un espacio metrizable. Existe una generalización del concepto de sucesión, el concepto de ***red***, que sirve para los mismos propósitos que las sucesiones pero en un espacio topológico arbitrario. Vamos a proporcionar las definiciones más importantes aquí y dejaremos las demostraciones como ejercicios. Recuérdese que una relación $\preceq$ en un conjunto A es una *relación de orden parcial* si se dan las siguientes condiciones:

(1) $\alpha \preceq \alpha$ para todo α.

(2) Si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \alpha$ entonces $\alpha = \beta$.

(3) Si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \preceq \gamma$ entonces $\alpha \preceq \gamma$.

Además, se dice que un conjunto J es un ***conjunto dirigido*** con un orden parcial $\preceq$ si para cada par de elementos α, β de J, existe un elemento γ de J con la propiedad de que $\alpha \preceq \gamma$ y $\beta \preceq \gamma$.

1. Demuestre que los siguientes conjuntos son dirigidos:

(a) Cualquier conjunto simplemente ordenado, con la relación $\leq$.

(b) La colección de todos los subconjuntos de un conjunto S, parcialmente ordenados por la inclusión (es decir, $A \preceq B$ si $A \subset B$).

(c) La colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de S que son cerrados bajo intersecciones finitas, parcialmente ordenados por la inclusión inversa (esto es, $A \preceq B$ si $A \supset B$).

(d) La colección de todos los subconjuntos cerrados de un espacio X, parcialmente ordenados por la inclusión.

2. Un subconjunto K de J se dice que es ***cofinal*** en J si para cada $\alpha \in J$ existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \preceq \beta$. Demuestre que si J es un conjunto dirigido y K es cofinal en J, entonces K es un conjunto dirigido.

3. Sea X un espacio topológico. Una ***red*** en X es una función f de un conjunto dirigido J en X. Si $\alpha \in J$, denotaremos a la imagen $f(\alpha)$ por x_α. También

denotaremos a la propia red f por el símbolo $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, o simplemente por (x_α) si el conjunto de índices es único.

Se dice que la red (x_α) ***converge*** al punto x de X (y lo escribimos $x_\alpha \to x$) si para cada entorno U de x, existe $\alpha \in J$ tal que

$$\alpha \preceq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

Demuestre que estas definiciones se reducen a la definición natural de sucesión cuando $J = \mathbb{Z}_+$.

4. Supongamos que

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J} \longrightarrow x \text{ en } X \qquad \text{e} \qquad (y_\alpha)_{\alpha \in J} \longrightarrow y \text{ en } Y.$$

Demuestre que $(x_\alpha \times y_\alpha) \longrightarrow x \times y$ en $X \times Y$.

5. Demuestre que si X es de Hausdorff, una red en X converge a lo más a un único punto.

6. Teorema. *Sea $A \subset X$. Entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, existe una red de puntos en A que converge a x.* [*Indicación:* para probar la implicación $\Rightarrow$, tome como conjunto de índices la colección de todos los entornos de x, parcialmente ordenados por la inclusión inversa.]

7. Teorema. *Sea $f : X \to Y$. Entonces f es continua si, y sólo si, para cada red convergente (x_α) en X que converge a x, entonces la red $(f(x_\alpha))$ converge a $f(x)$.*

8. Sea $f : J \to X$ una red en X y $f(\alpha) = x_\alpha$. Si K es un conjunto dirigido y $g : K \to J$ es una función tal que

(i) $i \preceq j \Rightarrow g(i) \preceq g(j)$,
(ii) $g(K)$ es cofinal en J,

entonces la función compuesta $f \circ g : K \to X$ se dice que es una ***subred*** de (x_α). Demuestre que si la red (x_α) converge a x, entonces cualquier subred también converge a dicho punto.

9. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ una red en X. Se dice que x es un punto de acumulación de la red (x_α) si para cada entorno U de x, el conjunto de los índices α tales que $x_\alpha \in U$ es cofinal en J.
Lema. *El punto x es un punto de acumulación de la red (x_α) si, y sólo si, alguna subred de (x_α) converge a x.* [*Indicación*: para probar la implicación $\Rightarrow$, sea K el conjunto de todos los pares (α, U) donde $\alpha \in J$ y U es un entorno de x conteniendo a x_α. Se define el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \preceq \beta$ y $V \subset U$. Demuestre que K es un conjunto dirigido y utilice este hecho para definir la subred.]

10. *Teorema.* *X es compacto si, y sólo si, toda red en X tiene una subred convergente.* [*Indicación*: para probar la implicación $\Rightarrow$, sea $B_\alpha = \{x_\beta \mid \alpha \preceq \beta\}$ y pruebe que $\{B_\alpha\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Para demostrar $\Leftarrow$, sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita, y sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$, parcialmente ordenadas por la inclusión inversa.]

11. *Corolario.* *Sean G un grupo topológico y A y B subconjuntos de G. Si A es un cerrado en G y B es compacto, entonces $A \cdot B$ es cerrado en G.* [*Indicación*: en primer lugar, dé una prueba utilizando sucesiones, suponiendo que G es metrizable.]

12. Compruebe que los ejercicios precedentes siguen teniendo validez si la condición (2) se omite en la definición de *conjunto dirigido*. Muchos matemáticos utilizan el término "conjunto dirigido" en un sentido más general.

Capítulo 4

Axiomas de separación y numerabilidad

Los conceptos que vamos a introducir ahora, a diferencia de la compacidad y conexión, no surgen naturalmente en el estudio del cálculo y el análisis. Surgen de un estudio más profundo de la topología misma. Tales problemas, como embeber un espacio dado en un espacio métrico o en un espacio compacto de Hausdorff, son problemas básicamente de topología más que de análisis. Estos problemas particulares poseen soluciones que incluyen a los axiomas de separación y numerabilidad.

Ya hemos presentado el primer axioma de numerabilidad que estaba relacionado con el estudio de sucesiones convergentes en §21. También hemos estudiado uno de los axiomas de separación —el axioma de Hausdorff—, y hemos mencionado otro —el axioma T_1. En este capítulo introduciremos otros, y más fuertes, axiomas de este tipo, y estudiaremos algunas de sus consecuencias. Nuestro objetivo básico es probar el *teorema de metrización de Urysohn*. Éste afirma que si un espacio topológico X satisface un cierto axioma de numerabilidad (el segundo) y un cierto axioma de separación (el axioma de regularidad), entonces X se puede embeber en un espacio métrico, y así es metrizable.

Otro teorema de embebimiento, importante para los geómetras, se presenta en la última sección del capítulo. Dado un espacio que es una variedad compacta (el análogo a una superficie en dimensiones más altas), probaremos que se puede embeber en algún espacio euclídeo de dimensión finita.

§30 Los axiomas de numerabilidad

Recordemos la definición que dimos en §21.

Definición. Un espacio X se dice que tiene una ***base numerable en x*** si existe una colección numerable $\mathcal{B}$ de entornos de x tales que cada entorno de x contiene al menos a uno de los elementos de $\mathcal{B}$. Un espacio que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el ***primer axioma de numerabilidad***, que es ***1AN***, o que es ***uno-numerable***.

Ya hemos visto que todo espacio metrizable satisface este axioma, véase §21. El hecho más útil sobre espacios que satisfacen este axioma es el hecho de que en un espacio tal, las sucesiones convergentes son adecuadas para detectar puntos límite de conjuntos y para comprobar la continuidad de funciones. Esto ya lo hemos observado con anterioridad y ahora lo estableceremos formalmente como un teorema:

Teorema 30.1. *Sea X un espacio topológico.*

(a) Sea A un subconjunto de X. Si existe una sucesión de puntos de A convergente a x, entonces $x \in \bar{A}$ y el recíproco se cumple si X es $1AN$.

(b) Sea $f : X \to Y$. Si f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es $1AN$.

La prueba es una generalización directa de la demostración dada en §21 bajo la hipótesis de metrizabilidad, por lo que no la repetiremos aquí.

De mucha más importancia que el primer axioma de numerabilidad es el siguiente:

Definición. Si un espacio X tiene una base numerable para su topología, entonces se dice que X satisface el ***segundo axioma de numerabilidad***, que es ***2AN***, o que es ***dos-numerable***.

Obviamente, el segundo axioma implica el primero: si $\mathcal{B}$ es una base numerable para la topología de X, entonces el subconjunto de $\mathcal{B}$ formado por aquellos elementos de la base que contienen al punto x es una base numerable en x. El segundo axioma es, de hecho, mucho más fuerte que el primero; es tan fuerte que incluso no todo espacio métrico lo satisface.

Entonces, ¿por qué es interesante este segundo axioma? Bien, por un lado, muchos espacios que nos son familiares lo satisfacen. Por otro, es una hipótesis crucial usada para probar teoremas tales como el teorema de metrización de Urysohn, como veremos en su momento.

EJEMPLO 1. La recta real $\mathbb{R}$ tiene una base numerable —la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) con extremos racionales—. Del mismo modo, $\mathbb{R}^n$ tiene una base numerable —la colección de todos los productos de intervalos con extremos racionales—. Incluso $\mathbb{R}^\omega$ tiene una base numerable —la colección de todos los productos $\prod_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n$, donde U_n es un intervalo abierto con extremos racionales para un número finito de valores de n, y $U_n = \mathbb{R}$ para el resto de valores de n.

EJEMPLO 2. En la topología uniforme, $\mathbb{R}^\omega$ satisface el primer axioma de numerabilidad (siendo metrizable). Sin embargo, no satisface el segundo. Para comprobar este hecho, primero mostramos que si X es un espacio que tiene una base numerable $\mathcal{B}$, entonces cualquier subespacio discreto A de X debe ser numerable. Elijamos, para cada $a \in A$, un elemento B_a de la base que interseque a A únicamente en el punto a. Si a y b son puntos distintos de A, los conjuntos B_a y B_b son distintos, puesto que el primero contiene a a y el segundo no. Se sigue que la aplicación $a \to B_a$ es una inyección de A en $\mathcal{B}$, por lo que A debe ser numerable.

Ahora bien, el subespacio A de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones de ceros y unos no es numerable y tiene la topología discreta porque $\bar{\rho}(a, b) = 1$ para cualesquiera dos puntos a y b de A distintos. Por tanto, en la topología uniforme, $\mathbb{R}^\omega$ no tiene una base numerable.

Ambos axiomas de numerabilidad se comportan bien con respecto a las operaciones de tomar subespacios o productos numerables:

Teorema 30.2. *Un subespacio de un espacio* $1AN$ *es* $1AN$*, y un producto numerable de espacios* $1AN$ *es* $1AN$*. Un subespacio de un espacio* $2AN$ *es* $2AN$*, y un producto numerable de espacios* $2AN$ *es* $2AN$*.*

Demostración. Consideremos el segundo axioma de numerabilidad. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable para X, entonces $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base numerable para el subespacio A de X. Si $\mathcal{B}_i$ es una base numerable para el espacio X_i, entonces la colección de todos los productos $\prod U_i$, donde $U_i \in \mathcal{B}_i$ para un número finito de valores de i y $U_i = X_i$ para el resto de valores de i, es una base numerable para $\prod X_i$.

La prueba para el primer axioma de numerabilidad es similar. ■

En el siguiente teorema se dan dos consecuencias del segundo axioma de numerabilidad que nos serán útiles más tarde. Antes, daremos una definición:

Definición. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es ***denso*** en X si $\bar{A} = X$.

Teorema 30.3. *Supongamos que* X *tiene una base numerable. Entonces:*

(a) *Todo cubrimiento abierto de* X *contiene una subcolección numerable que recubre a* X*.*

(b) Existe un subconjunto numerable de X que es denso en X.

Demostración. Sea $\{B_n\}$ una base numerable para X.

(a) Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Para cada entero positivo n para el que sea posible, elegimos un elemento A_n de $\mathcal{A}$ que contiene al elemento B_n de la base. La colección $\mathcal{A}'$ de los conjuntos A_n es numerable, puesto que está indexada con un subconjunto J de enteros positivos. Es más, recubre a X: dado un punto $x \in X$, podemos elegir un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a x. Puesto que A es abierto, existe un elemento B_n de la base tal que $x \in B_n \subset A$. Al pertenecer B_n a un elemento de $\mathcal{A}$, el índice n está en el conjunto J, por lo que A_n está definido; como A_n contiene a B_n, contiene a x. Así, $\mathcal{A}'$ es una subcolección numerable de $\mathcal{A}$ que recubre a X.

(b) De cada elemento B_n no vacío de la base, elijamos un punto x_n. Sea D el conjunto formado por los puntos x_n. Entonces D es denso en X: dado cualquier punto x de X, cada elemento de la base que contenga a x interseca a D, por lo que x pertenece a $\bar{D}$. ■

Las dos propiedades enunciadas en el Teorema 30.3 algunas veces se toman como axiomas de numerabilidad alternativos. Un espacio para el que cada cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento numerable, se denomina ***espacio de Lindelöf***. Un espacio que tiene un subconjunto numerable denso, a menudo se dice que es ***separable*** (una elección de terminología desafortunada).[†] Aunque son más débiles, en general, qué el segundo axioma de numerabilidad, cada una de estas propiedades es equivalente, cuando el espacio es metrizable, al segundo axioma de numerabilidad (véase el Ejercicio 5). Son menos importantes que el segundo axioma de numerabilidad, pero debería conocerlos, porque algunas veces son útiles. A menudo es más fácil, por ejemplo, probar que un espacio X tiene un subconjunto numerable denso que probar que X tiene una base numerable. Si el espacio es metrizable (como habitualmente ocurre en análisis), se sigue que X es $2AN$.

No utilizaremos estas propiedades para probar teorema alguno, pero una de ellas —la condición de Lindelöf— será muy útil para tratar algunos ejemplos. No se comportan tan bien como uno podría esperar bajo las operaciones de tomar subespacios y productos cartesianos, como veremos en los ejemplos y ejercicios que siguen.

EJEMPLO 3. *El espacio $\mathbb{R}_\ell$ satisface todos los axiomas de numerabilidad excepto el segundo.*

Dado $x \in \mathbb{R}_\ell$, el conjunto de todos los elementos de la base de la forma $[x, x + 1/n)$ es una base numerable en x. Y es fácil ver que los números racionales son densos en $\mathbb{R}_\ell$.

[†]Éste es un buen ejemplo de cómo se puede abusar de una palabra. Ya hemos definido lo que entendemos por una *separación* de un espacio y analizaremos los axiomas de *separación* brevemente.

Para ver que $\mathbb{R}_\ell$ no tiene una base numerable, sea $\mathcal{B}$ una base para $\mathbb{R}_\ell$. Para cada x, elijamos un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x+1)$. Si $x \neq y$, entonces $B_x \neq B_y$, ya que $x = \text{ínf}\, B_x$ e $y = \text{ínf}\, B_y$. Por tanto, $\mathcal{B}$ debe ser no numerable.

Para ver que $\mathbb{R}_\ell$ es de Lindelöf, es necesario más trabajo. Será suficiente probar que cada cubrimiento abierto de $\mathbb{R}_\ell$ por elementos de la base contiene una subcolección numerable recubriendo a $\mathbb{R}_\ell$ (puede comprobarlo). Así, sea

$$\mathcal{A} = \{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha \in J}$$

un cubrimiento de $\mathbb{R}$ por elementos de la base para la topología del límite inferior. Deseamos encontrar una subcolección numerable que recubra a $\mathbb{R}$. Sea C el conjunto

$$C = \bigcup_{\alpha \in J} (a_\alpha, b_\alpha),$$

que es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Vamos a probar que el conjunto $\mathbb{R} - C$ es numerable.

Sea x un punto de $\mathbb{R} - C$. Sabemos que x no pertenece a intervalo abierto alguno del tipo (a_α, b_α), por tanto, $x = a_\beta$ para algún índice β. Elijamos un β de este tipo y un número racional q_x que pertenezca al intervalo (a_β, b_β). Puesto que (a_β, b_β) está contenido en C, también lo está el intervalo $(a_\beta, q_x) = (x, q_x)$. Se sigue que si x e y son dos puntos de $\mathbb{R} - C$ con $x < y$, entonces $q_x < q_y$ (ya que, si no, tendríamos $x < y < q_y \leq q_x$, por lo que y estaría en el intervalo (x, q_x) y, de aquí, en C). Por tanto, la aplicación $x \to q_x$ de $\mathbb{R} - C$ a $\mathbb{Q}$ es inyectiva, por lo que $\mathbb{R} - C$ es numerable.

A continuación probaremos que alguna subcolección numerable de $\mathcal{A}$ recubre a $\mathbb{R}$. Para empezar, elijamos, para cada elemento de $\mathbb{R} - C$, un elemento de $\mathcal{A}$ que lo contenga; se obtiene así una subcolección numerable $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ que recubre a $\mathbb{R} - C$. Tomemos ahora el conjunto C y dotémoslo de la topología como subespacio de $\mathbb{R}$; en esta topología, C satisface el segundo axioma de numerabilidad. Ahora bien, C está recubierto por los conjuntos (a_α, b_α), que son abiertos en $\mathbb{R}$ y, de aquí, abiertos en C. Luego alguna subcolección numerable recubre a C. Supongamos que esta subcolección está formada por los elementos (a_α, b_α) para $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Entonces la colección

$$\mathcal{A}'' = \{[a_\alpha, b_\alpha) | \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$$

es una subcolección numerable de $\mathcal{A}$ que recubre al conjunto C, y $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ es una subcolección numerable de $\mathcal{A}$ que recubre a $\mathbb{R}_\ell$.

EJEMPLO 4. *El producto de dos espacios de Lindelöf no es necesariamente de Lindelöf.*

Aunque el espacio $\mathbb{R}_\ell$ es de Lindelöf, probaremos que el espacio producto $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell = \mathbb{R}_\ell^2$ no lo es. El espacio $\mathbb{R}_\ell^2$ es un ejemplo muy útil en topología llamado ***plano de Sorgenfrey***.

El espacio $\mathbb{R}_\ell^2$ tiene como base todos los conjuntos de la forma $[a, b) \times [c, d)$. Para probar que no es de Lindelöf, consideremos el subespacio

$$L = \{x \times (-x) \mid x \in \mathbb{R}_\ell\}.$$

Es fácil comprobar que L es cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$. Recubramos $\mathbb{R}_\ell^2$ con el conjunto abierto $\mathbb{R}_\ell^2 - L$ y por todos los elementos de la base de la forma

$$[a, b) \times [-a, d).$$

Cada uno de estos conjuntos abiertos interseca a L en, al menos, un punto. Puesto que L no es numerable, ninguna subcolección numerable recubre a $\mathbb{R}_\ell^2$. Véase la Figura 30.1.

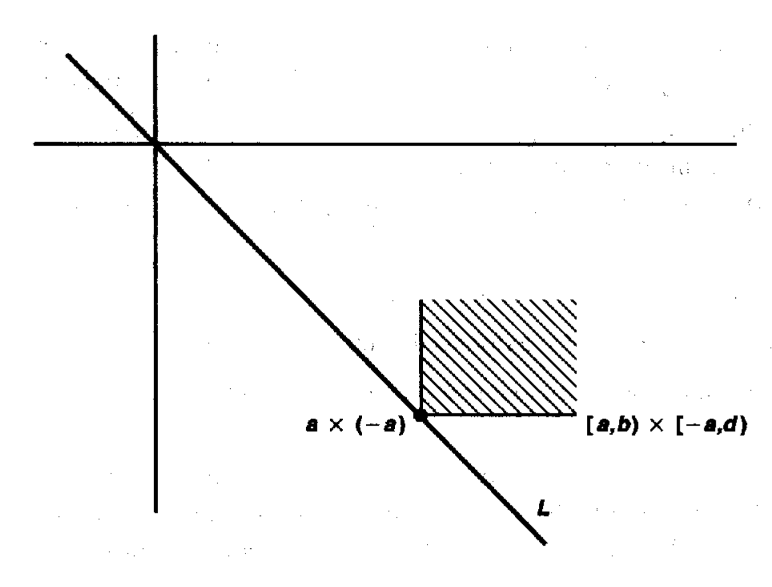


Figura 30.1

EJEMPLO 5. *Un subespacio de un espacio de Lindelöf no es necesariamente de Lindelöf.*

El cuadrado ordenado I_0^2 es compacto, por lo que es trivialmente de Lindelöf. Sin embargo, el subespacio $A = I \times (0, 1)$ no es de Lindelöf. A es la unión de los conjuntos disjuntos $U_x = \{x\} \times (0, 1)$, cada uno de los cuales es abierto en A. Esta colección de conjuntos no es numerable, y ninguna subcolección propia recubre a A.

Ejercicios

1. (a) Un *conjunto* G_δ en un espacio X es un conjunto A que es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X. Pruebe que en un espacio T_1 uno-numerable, cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ.

   (b) Existe un espacio familiar en el que cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ, y sin embargo, no satisface el primer axioma de numerabilidad. ¿Cuál es?

   La terminología proviene del alemán. La "G" viene de "Gebiet", que significa "conjunto abierto", y la "δ" de "Durchschnitt", que significa "intersección".

2. Pruebe que si X tiene una base numerable $\{B_n\}$, entonces cada base $\mathcal{C}$ de X contiene una base numerable para X. [*Indicación:* para cada par de índices n, m para los que sea posible, elija $C_{n,m} \in \mathcal{C}$ tal que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$.]

3. Sean X un espacio con una base numerable y A un subconjunto no numerable de X. Pruebe que una cantidad no numerable de puntos de A son puntos límite de A.

4. Pruebe que cada espacio compacto metrizable X tiene una base numerable. [*Indicación:* sea $\mathcal{A}_n$ un recubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$.]

5. (a) Pruebe que cada espacio metrizable con un subconjunto denso numerable tiene una base numerable.

   (b) Pruebe que cada espacio metrizable y de Lindelöf tiene una base numerable.

6. Pruebe que $\mathbb{R}_\ell$ y I_0^2 no son metrizables.

7. ¿Cuál de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface S_Ω? ¿Y $\bar{S}_\Omega$?

8. ¿Cuál de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme?

9. Sea A un subespacio cerrado de X. Pruebe que si X es de Lindelöf, entonces A es de Lindelöf. Pruebe, con un ejemplo, que si X tiene un subconjunto denso numerable, A no tiene por qué contener un subconjunto denso numerable.

10. Pruebe que si X es un producto numerable de espacios con subconjuntos densos numerables, entonces X tiene un subconjunto denso numerable.

11. Sea $f : X \to Y$ continua. Pruebe que si X es de Lindelöf, o si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces $f(X)$ satisface la misma condición.

12. Sea $f : X \to Y$ una aplicación abierta continua. Pruebe que si X satisface el primer o segundo axioma de numerabilidad, entonces $f(X)$ satisface el mismo axioma.

13. Pruebe que si X tiene un subconjunto denso numerable, cada colección de conjuntos abiertos y disjuntos en X es numerable.

14. Pruebe que si X es de Lindelöf e Y es compacto, entonces $X \times Y$ es de Lindelöf.

15. Sea $\mathbb{R}^I$ con la distancia uniforme, donde $I = [0, 1]$ y sea $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ el subespacio formado por las funciones continuas. Pruebe que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tiene un subconjunto denso numerable y, por tanto, una base numerable. [*Indicación:* consideremos las funciones continuas cuyas gráficas constan de un número finito de segmentos de recta con extremos racionales.]

16. (a) Pruebe que el espacio producto $\mathbb{R}^I$, donde $I = [0, 1]$, tiene un subconjunto denso numerable.

    (b) Pruebe que si J tiene cardinal mayor que $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$, entonces el espacio producto $\mathbb{R}^J$ no contiene un subconjunto denso numerable. [*Indicación:* si D es denso en $\mathbb{R}^J$, defina $f : J \to \mathcal{P}(D)$ por la ecuación $f(\alpha) = D \cap \pi_\alpha^{-1}((a, b))$, donde (a, b) es un intervalo fijo en $\mathbb{R}$.]

***17.** Dote a $\mathbb{R}^\omega$ de la topología por cajas. Denotemos por $\mathbb{Q}^\infty$ al subespacio formado por sucesiones de racionales que acaban en una cadena infinita de ceros. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface este espacio?

***18.** Sea G un grupo topológico $1AN$. Pruebe que si G tiene un subconjunto numerable denso, o si es de Lindelöf, entonces G tiene una base numerable. [*Indicación:* sea $\{B_n\}$ una base numerable en e. Si D es un subconjunto numerable denso de G, pruebe que los conjuntos dB_n, para $d \in D$, forman una base para G. Si G es de Lindelöf, elijamos para cada n un conjunto numerable C_n tal que los conjuntos cB_n, para $c \in C_n$, recubren a G. Pruebe que cuando n recorre $\mathbb{Z}_+$, estos conjuntos forman una base de G.]

§31 Los axiomas de separación

En esta sección introducimos tres axiomas de separación y estudiamos algunas de sus propiedades. Ya conoce uno de ellos —el axioma de Hausdorff—. Los otros son similares pero más fuertes. Como hacemos siempre que introducimos nuevos conceptos, examinaremos la relación entre estos axiomas y los conceptos introducidos anteriormente en el libro.

Recordemos que un espacio X se dice que es de *Hausdorff* si para cada par x, y de puntos distintos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x e y, respectivamente.

Definición. Supongamos que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Entonces se dice que X es ***regular*** si para cada par formado por un punto x y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y B, respectivamente. El espacio X se dice que es ***normal*** si para cada par A, B de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.

Está claro que un espacio regular es de Hausdorff, y que un espacio normal es regular. (Necesitamos incluir la condición de que los conjuntos unipuntuales sean cerrados como parte de la definición de regularidad y normalidad para que tengan sentido. Un espacio con dos puntos en la topología indiscreta satisface el resto de las definiciones de regularidad y normalidad, incluso sin ser de Hausdorff.) Remitimos al lector a los Ejemplos 1 y 3 para ver cómo el axioma de regularidad es más fuerte que el axioma de Hausdorff, y cómo la normalidad es más fuerte que la regularidad.

Estos axiomas se llaman los axiomas de separación por el hecho de implicar la "separación" de ciertas clases de conjuntos por conjuntos abiertos disjuntos. Ya hemos usado la palabra "separación" antes, cuando estudiamos espacios conexos. Pero en aquel caso, estábamos intentando encontrar conjuntos abiertos disjuntos *cuya unión era el espacio total.*

La situación de ahora es bastante diferente, porque los conjuntos abiertos no satisfacen necesariamente esta condición.

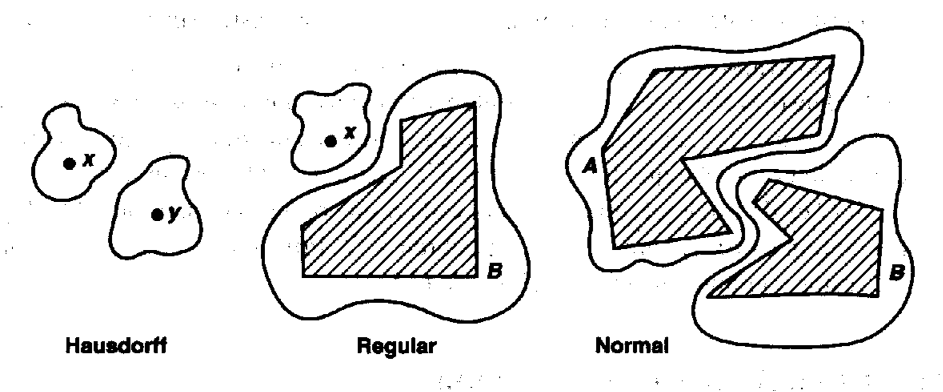


Figura 31.1

Los tres axiomas de separación se ilustran en la Figura 31.1.

Existen otros modos de enunciar los axiomas de separación. Un enunciado que es útil algunas veces se da en el siguiente lema:

Lema 31.1. *Sea X un espacio topológico donde los conjuntos unipuntuales son cerrados.*

(a) X es regular si, y sólo si, dado un punto x de X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\bar{V} \subset U$.

(b) X es normal si, y sólo si, dado un conjunto cerrado A y un conjunto abierto U que contiene a A, existe un conjunto abierto V que contiene a A tal que $\bar{V} \subset U$.

Demostración. (a) Supongamos que X es regular, y que el punto x y el entorno U de x están dados. Si $B = X - U$ entonces B es un conjunto cerrado. Por hipótesis, existen conjuntos abiertos disjuntos V y W que contienen a x y a B, respectivamente. El conjunto $\bar{V}$ es disjunto de B, ya que si $y \in B$, el conjunto W es un entorno de y distinto de V. Por tanto, $\bar{V} \subset U$, como se deseaba.

Para probar el recíproco, supongamos que nos dan el punto x y el conjunto cerrado B que no contiene a x. Sea $U = X - B$. Por hipótesis, existe un entorno V de x tal que $\bar{V} \subset U$. Los conjuntos abiertos V y $X - \bar{V}$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y a B, respectivamente. Así X es regular.

(b) Esta demostración usa exactamente el mismo argumento, simplemente se sustituye el punto x por el conjunto A. ■

A continuación relacionamos los axiomas de separación con los conceptos que introdujimos anteriormente.

Teorema 31.2. *(a) Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff y un producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.*

(b) Un subespacio de un espacio regular es regular y un producto de espacios regulares es regular.

Demostración. (a) Este resultado era un ejercicio en §17 y damos una prueba a continuación. Sea X un espacio de Hausdorff y sean x e y dos puntos del subespacio Y de X. Si U y V son entornos disjuntos en X de x e y, respectivamente, entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son entornos disjuntos de x e y en Y.

Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios de Hausdorff. Sean $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ puntos distintos del espacio producto $\prod X_\alpha$. Puesto que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existe algún índice β tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Elijamos conjuntos abiertos disjuntos U y V en X_β que contengan a x_β e y_β, respectivamente. Entonces los conjuntos $\pi_\beta^{-1}(U)$ y $\pi_\beta^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos en $\prod X_\alpha$ que contienen a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente.

(b) Sea Y un subespacio del espacio regular X. Entonces los conjuntos unipuntuales son cerrados en Y. Sea x un punto de Y y sea B un subconjunto cerrado de Y disjunto a x. Tenemos que $\bar{B} \cap Y = B$, donde $\bar{B}$ denota la adherencia de B en X. Por consiguiente, $x \notin \bar{B}$, por lo que, utilizando la regularidad de X, podemos elegir conjuntos abiertos disjuntos U y V de X que contengan a x y a $\bar{B}$, respectivamente. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos abiertos disjuntos en Y que contienen a x y a B, respectivamente.

Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios regulares y sea $X = \prod X_\alpha$. Por (a), X es de Hausdorff, por lo que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Usamos el lema anterior para probar la regularidad de X. Sea $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ un punto de X y sea U un entorno de $\mathbf{x}$ en X. Elijamos un elemento $\prod U_\alpha$ de la base alrededor de $\mathbf{x}$ contenido en U. Elijamos, para cada α, un entorno V_α de x_α en X_α tal que $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$; si ocurre que $U_\alpha = X_\alpha$, elegimos $V_\alpha = X_\alpha$. Entonces $V = \prod V_\alpha$ es un entorno de x en X. Puesto que $\bar{V} = \prod \bar{V}_\alpha$ por el Teorema 19.5, se sigue inmediatamente que $\bar{V} \subset \prod U_\alpha \subset U$, por lo que X es regular. ■

No existe teorema análogo para espacios normales, como veremos brevemente, en esta sección y en la próxima.

EJEMPLO 1. *El espacio $\mathbb{R}_K$ es de Hausdorff, pero no regular.*

Recordemos que $\mathbb{R}_K$ denota los números reales con la topología que tiene como base a todos los intervalos abiertos (a, b) y todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$, donde $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Este espacio es de Hausdorff, puesto que cualesquiera dos puntos distintos tienen intervalos abiertos disjuntos que los contienen.

Sin embargo, no es regular. El conjunto K es cerrado en $\mathbb{R}_K$, y no contiene al punto 0. Supongamos que existen conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen a 0 y K, respectivamente. Elijamos un elemento de la base que contenga a 0 y que esté en U. Debe ser un elemento del tipo $(a, b) - K$, puesto que cada elemento de la base de la forma

(a, b) que contenga al 0 interseca a K. Tomemos n lo suficientemente grande para que $1/n \in (a, b)$. Elijamos después un elemento de la base que contenga a $1/n$ y contenido, a su vez, en V; debe ser un elemento de la base de la forma (c, d). Finalmente, elijamos z de tal modo que $z < 1/n$ y $z > \max\{c, 1/(n+1)\}$. Entonces z pertenece tanto a U como a V, por lo que no son disjuntos (véase la Figura 31.2).

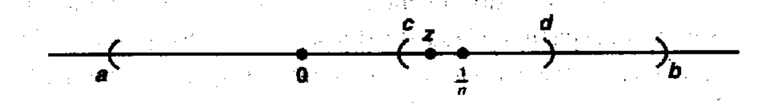


Figura 31.2

EJEMPLO 2. *El espacio $\mathbb{R}_\ell$ es normal.*

Es inmediato comprobar que los conjuntos unipuntuales son cerrados en $\mathbb{R}_\ell$, ya que la topología de $\mathbb{R}_\ell$ es más fina que la de $\mathbb{R}$. Para comprobar la normalidad, supongamos que A y B son conjuntos cerrados disjuntos en $\mathbb{R}_\ell$. Para cada punto a de A, elijamos un elemento $[a, x_a)$ de la base que no interseque a B y para cada punto b de B, escojamos un elemento $[b, x_b)$ de la base que no interseque a A. Los conjuntos abiertos

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a) \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

son conjuntos abiertos disjuntos en A y B, respectivamente.

EJEMPLO 3. *El plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell^2$ no es normal.*

El espacio $\mathbb{R}_\ell$ es regular (de hecho, es normal), de tal modo que el espacio producto $\mathbb{R}_\ell^2$ es también regular. Así, este ejemplo sirve para dos propósitos. Muestra que un espacio regular no es necesariamente normal, y muestra que el producto de dos espacios normales tampoco tiene por qué ser normal.

Supongamos que $\mathbb{R}_\ell^2$ es normal y lleguemos a una contradicción. Sea L el subespacio de $\mathbb{R}_\ell^2$ formado por todos los puntos de la forma $x \times (-x)$. Entonces L es cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$, y L tiene la topología discreta. De aquí, cada subconjunto A de L cerrado en L, es cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$. Como $L - A$ es también cerrado en $\mathbb{R}_\ell^2$, esto significa que para cada subconjunto propio no vacío A de L, se pueden encontrar conjuntos abiertos disjuntos U_A y V_A que contienen a A y $L - A$, respectivamente.

Denotemos por D al conjunto de los puntos de $\mathbb{R}_\ell^2$ que tienen coordenadas racionales; éste es denso en $\mathbb{R}_\ell^2$. Definimos una aplicación θ que asigna, para cada subconjunto de la recta L, un subconjunto del conjunto D, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \theta(A) &= D \cap U_A \qquad \text{si } \varnothing \subsetneq A \subsetneq L, \\ \theta(\varnothing) &= \varnothing, \\ \theta(L) &= D. \end{aligned}$$

Vamos a probar que $\theta : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(D)$ es inyectiva.

Sea A un subconjunto propio no vacío de L. Entonces $\theta(A) = D \cap U_A$ no es ni vacío (puesto que U_A es abierto y D es denso en $\mathbb{R}_\ell^2$), ni todo D (porque $D \cap V_A$ es no vacío). Queda probar que si B es otro subconjunto propio no vacío de L, entonces $\theta(A) \neq \theta(B)$.

Uno de los conjuntos A, B contiene un punto que no está en el otro; supongamos que $x \in A$ y $x \notin B$. Entonces $x \in L - B$, por lo que $x \in U_A \cap V_B$; puesto que el último conjunto es abierto y no vacío, debe contener puntos de D. Estos puntos pertenecen a U_A y no a U_B, por tanto, $D \cap U_A \neq D \cap U_B$, como se deseaba. Así θ es inyectiva.

Ahora probaremos que existe una aplicación inyectiva $\phi : \mathcal{P}(D) \to L$. Puesto que D es infinito-numerable y L tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$, es suficiente definir una aplicación inyectiva ψ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ en $\mathbb{R}$. Para ello, hacemos que ψ le asigne al subconjunto S de $\mathbb{Z}_+$ el decimal infinito $.a_1a_2\ldots$, donde $a_i = 0$ si $i \in S$ y $a_i = 1$ si $i \notin S$. Esto es,

$$\psi(S) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/10^i.$$

Ahora bien, la composición

$$\mathcal{P}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(D) \xrightarrow{\psi} L$$

es una aplicación inyectiva de $\mathcal{P}(L)$ en L. Pero el Teorema 7.8 nos dice que una aplicación semejante no existe, por lo que hemos encontrado una contradicción.

Esta demostración de que $\mathbb{R}_\ell^2$ no es normal es, sin embargo, muy poco rigurosa. Hemos probado sólo que debe existir algún subconjunto propio no vacío A de L tal que los conjuntos A y $B = L - A$ no están contenidos en conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}_\ell^2$. Pero no hemos encontrado tal conjunto A. De hecho, el conjunto A de los puntos de L con coordenadas racionales es un conjunto de ese tipo, pero la prueba no es fácil. Se deja para los ejercicios.

Ejercicios

1. Pruebe que si X es regular, cada par de puntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

2. Pruebe que si X es normal, cada par de conjuntos cerrados disjuntos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

3. Pruebe que cada topología del orden es regular.

4. Denotemos por X y X' a un mismo conjunto dotado con dos topologías distintas $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente y supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. Si uno de los espacios es de Hausdorff (o regular, o normal), ¿qué se puede decir del segundo?

5. Sean $f, g : X \to Y$ continuas y supongamos que Y es de Hausdorff. Pruebe que $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

6. Sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva continua. Pruebe que si X es normal, también lo es Y. [*Indicación:* si U es un conjunto abierto que contiene a $p^{-1}(\{y\})$, pruebe que existe un entorno W de y tal que $p^{-1}(W) \subset U$.]

7. Sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva continua y cerrada tal que $p^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada $y \in Y$ (una aplicación así se llama *aplicación perfecta*).

(a) Pruebe que si X es de Hausdorff, también lo es Y.

(b) Pruebe que si X es regular, entonces también lo es Y.

(c) Pruebe que si X es localmente compacto, también lo es Y.

(d) Pruebe que si X es $2AN$, también lo es Y. [*Indicación:* sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X. Para cada subconjunto finito J de $\mathcal{B}$, sea U_J la unión de todos los conjuntos de la forma $p^{-1}(W)$, siendo W un abierto en Y, que están contenidos en la unión de los elementos de J.]

8. Sean X un espacio y G un grupo topológico. Una ***acción*** de G sobre X es una aplicación continua $\alpha : G \times X \to X$ tal que, denotando a $\alpha(g \times x)$ por $g \cdot x$, se tiene:

(i) $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.

(ii) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ para todo $x \in X$ y $g_1, g_2 \in G$.

Definamos $x \sim g \cdot x$ para cualesquiera x y g; el espacio cociente resultante se denota por X/G y es llamado ***espacio de órbitas*** de la acción α.

Teorema. *Sea G un grupo topológico compacto, X un espacio topológico y α una acción de G sobre X. Si X es de Hausdorff, o regular, o normal, o localmente compacto, o 2AN, también lo es X/G.* [*Indicación:* véase el Ejercicio 13 de §26.]

***9.** Sea A el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}_\ell^2$ de la forma $x \times (-x)$, para x racional y sea B el conjunto de todos los puntos de esta forma para x irracional. Si V es un conjunto abierto de $\mathbb{R}_\ell^2$ que contiene a B, pruebe que no existe conjunto abierto alguno U que contenga a A y que sea disjunto de V, como sigue:

(a) Sea K_n el conjunto formado por todos los números irracionales x de $[0, 1]$ tales que $[x, x + 1/n) \times [-x, -x + 1/n)$ está contenido en V. Pruebe que $[0, 1]$ es la unión de los conjuntos K_n y una cantidad numerable de conjuntos unipuntuales.

(b) Use el Ejercicio 5 de §27 para probar que algún conjunto $\bar{K}_n$ contiene un intervalo abierto (a, b) de $\mathbb{R}$.

(c) Pruebe que V contiene al paralelogramo abierto formado por todos los puntos de la forma $x \times (-x + \epsilon)$ para los que $a < x < b$ y $0 < \epsilon < 1/n$.

(d) Concluya que si q es un número racional con $a < q < b$, entonces el punto $q \times (-q)$ de $\mathbb{R}_\ell^2$ es un punto límite de V.

§32 Espacios normales

Iniciamos ahora un estudio más profundo de los espacios que satisfacen el axioma de normalidad. En cierto sentido, el término "normal" es algo inapropiado, puesto que los espacios normales no se comportan tan bien como uno podría esperar. Por

otro lado, la mayoría de los espacios que nos son familiares satisfacen este axioma, como veremos. Su importancia viene del hecho de que los resultados que se pueden probar bajo la hipótesis de normalidad son centrales para una parte considerable de la topología. El teorema de metrización de Urysohn y el teorema de extensión de Tietze son dos de estos resultados; nos detendremos en ellos más tarde en este mismo capítulo.

Empezamos probando tres teoremas que dan tres conjuntos importantes de hipótesis bajo las cuales se garantiza la normalidad de un espacio.

Teorema 32.1. *Todo espacio regular con una base numerable es normal.*

Demostración. Sea X un espacio regular con una base numerable $\mathcal{B}$. Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Cada punto x de A tiene un entorno U que no interseca a B. Usando la regularidad, elijamos un entorno V de x cuya clausura esté en U; finalmente, elijamos un elemento de $\mathcal{B}$ que contenga a x y esté contenido en V. Al elegir un elemento de la base de este tipo para cada x de A, construimos un recubrimiento numerable de A por conjuntos abiertos cuyas clausuras no intersecan a B. Puesto que este recubrimiento de A es numerable, podemos indexarlo con los enteros positivos, denotándolo por $\{U_n\}$.

De modo similar, elijamos una colección numerable $\{V_n\}$ de conjuntos abiertos recubriendo a B, tal que cada conjunto $\bar{V}_n$ es disjunto con A. Los conjuntos $U = \bigcup U_n$ y $V = \bigcup V_n$ son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente, pero no son necesariamente disjuntos. Utilizaremos la siguiente estrategia para construir dos conjuntos abiertos que *sean* disjuntos. Dado n, definamos

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \qquad \text{y} \qquad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i.$$

Observe que cada conjunto U'_n es abierto, siendo la diferencia de un conjunto abierto U_n y un conjunto cerrado $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i$. De modo similar, cada conjunto V'_n es abierto. La colección $\{U'_n\}$ recubre a A, porque cada x de A pertenece a U_n para algún n, y x *no* pertenece a ninguno de los $\bar{V}_i$. De manera similar, la colección $\{V'_n\}$ recubre a B (véase la Figura 32.1).

Finalmente, los conjuntos abiertos

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U'_n \qquad \text{y} \qquad V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V'_n$$

son disjuntos. Si $x \in U' \cap V'$, entonces $x \in U'_j \cap V'_k$ para algún j y algún k. Supongamos que $j \leq k$. Se sigue de la definición de U'_j que $x \in U_j$ y puesto que $j \leq k$, se sigue de la definición de V'_k que $x \notin \bar{U}_j$. Una contradicción similar se obtiene si $j \geq k$. ∎

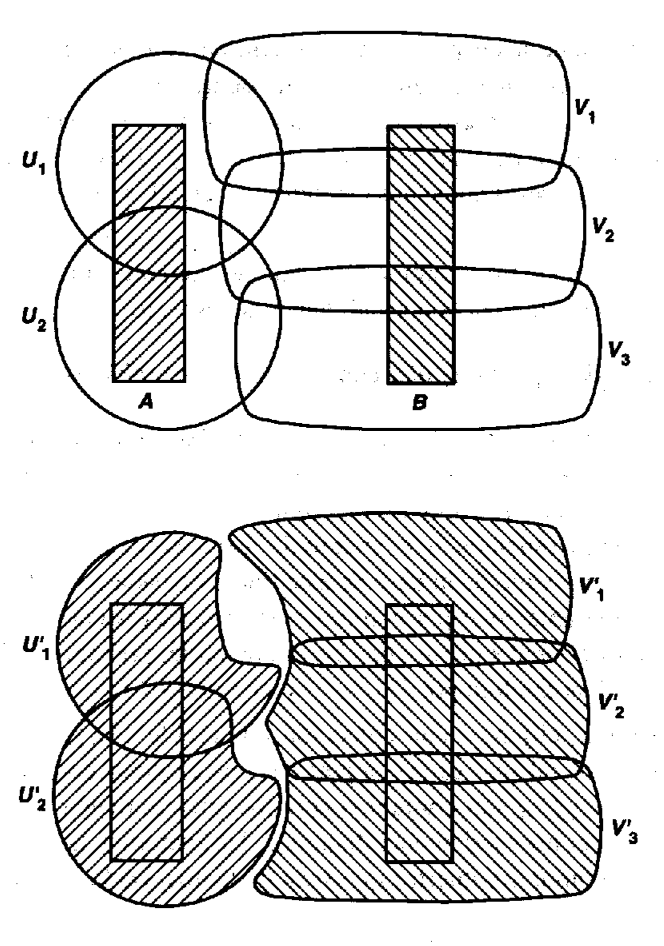


Figura 32.1

Teorema 32.2. *Todo espacio metrizable es normal.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable con distancia d. Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$, elijamos ϵ_a de tal modo que la bola $B(a, \epsilon_a)$ no interseque a B. De modo similar, para cada b de B, elijamos ϵ_b de tal modo que la bola $B(b, \epsilon_b)$ no interseque a A. Definamos

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon_a/2) \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \epsilon_b/2).$$

Entonces U y V son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente y afirmamos que son disjuntos. En efecto, si existiera $z \in U \cap V$, entonces

$$z \in B(a, \epsilon_a/2) \cap B(b, \epsilon_b/2)$$

para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Utilizando la desigualdad triangular se obtiene que $d(a, b) < (\epsilon_a + \epsilon_b)/2$. Si $\epsilon_a \leq \epsilon_b$, entonces $d(a, b) < \epsilon_b$, por lo que la bola $B(b, \epsilon_b)$

contendría al punto a. Si $\epsilon_b \leq \epsilon_a$, entonces $d(a, b) < \epsilon_a$, por lo que el punto b estaría contenido en la bola $B(a, \epsilon_a)$. Ninguna de estas situaciones es posible. ■

Teorema 32.3. *Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.*

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Ya hemos probado esencialmente que X es regular. Si x fuera un punto de X y B un conjunto cerrado en X que no contiene a x, entonces B sería compacto, y aplicando el Lema 26.4 se prueba que existen conjuntos abiertos disjuntos alrededor de x y B, respectivamente.

Esencialmente el mismo argumento que se dio en ese lema se puede usar para probar que X es normal: dados conjuntos cerrados disjuntos A y B en X, elijamos, para cada punto a de A, conjuntos abiertos disjuntos U_a y V_a que contengan a a y B, respectivamente (aquí usamos la regularidad de X). La colección $\{U_a\}$ recubre a A; como A es compacto, A se puede recubrir por un número finito de conjuntos $U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}$. Entonces

$$U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m} \qquad \text{y} \qquad V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$$

son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente. ■

A continuación enunciamos un resultado que llega más lejos sobre normalidad y que encontraremos útil para algunos ejemplos.

Teorema 32.4. *Todo conjunto bien ordenado X es normal en la topología del orden.*

De hecho, es cierto que *toda* topología del orden es normal (véase el Ejemplo 39 de [S-S]), pero no tendremos oportunidad de usar este resultado aún más fuerte.

Demostración. Sea X un conjunto bien ordenado. Afirmamos que cada intervalo de la forma $(x, y]$ es abierto en X: si X tiene un máximo e y es ese elemento, $(x, y]$ es un elemento de la base alrededor de y. Si y no es el máximo de X, entonces $(x, y]$ es igual al conjunto abierto (x, y'), donde y' es el inmediato sucesor de y.

Sean ahora A y B conjuntos cerrados disjuntos en X; afirmamos, de momento, que ni A ni B contienen al mínimo a_0 de X. Para cada $a \in A$, existe un elemento de la base que contiene a a disjunto con B; éste contiene algún intervalo de la forma $(x, a]$ (aquí es donde usamos el hecho de que a no es el mínimo de X). Elijamos, para cada $a \in A$, un intervalo $(x_a, a]$, disjunto con B. De modo similar, para cada $b \in B$, elijamos un intervalo $(y_b, b]$ disjunto con A. Los conjuntos

$$U = \bigcup_{a \in A} (x_a, a] \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in B} (y_b, b]$$

son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente y afirmamos que son disjuntos. Supongamos que $z \in U \cap V$. Entonces $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$ para algún

$a \in A$ y algún $b \in B$. Supongamos que $a < b$. Entonces si $a \leq y_b$, los dos intervalos son disjuntos, mientras que si $a > y_b$, tenemos que $a \in (y_b, b]$, contrario al hecho de que $(y_b, b]$ es disjunto con A. Una contradicción similar ocurre si $b < a$.

Finalmente, supongamos que A y B son conjuntos cerrados disjuntos en X y A contiene al mínimo a_0 de X. El conjunto $\{a_0\}$ es simultáneamente abierto y cerrado en X. Por el párrafo anterior, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V que contienen a los conjuntos cerrados $A - \{a_0\}$ y B, respectivamente. Entonces $U \cup \{a_0\}$ y V son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, de la misma forma. ∎

EJEMPLO 1. *Si J no es numerable, el espacio producto $\mathbb{R}^J$ no es normal.*

La prueba es realmente difícil; la dejamos como un ejercicio de destreza (véase el Ejercicio 9).

Este ejemplo sirve para tres propósitos. Muestra que un espacio regular $\mathbb{R}^J$ no necesita ser normal. Muestra que un subespacio de un espacio normal no necesita ser normal, puesto que $\mathbb{R}^J$ es homeomorfo al subespacio $(0, 1)^J$ de $[0, 1]^J$, el cual (usando el teorema de Tychonoff) es de Hausdorff compacto y, por tanto, normal. Y muestra que un producto no numerable de espacios normales no es necesariamente normal. Se deja en el aire la cuestión de si un producto finito o numerable de espacios normales debe ser normal.

EJEMPLO 2. *El espacio producto $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es normal.*[†]

Consideremos el conjunto bien ordenado $\bar{S}_\Omega$, en la topología del orden, y consideremos el subconjunto S_Ω, en la topología del subespacio (que es la misma que la topología del orden). Ambos espacios son normales, por el Teorema 32.4. Probaremos que el espacio producto $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es normal.

Este ejemplo sirve para tres propósitos. En primer lugar, muestra que un espacio regular no es necesariamente normal, ya que $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es un producto de espacios regulares y, por tanto, regular. En segundo lugar, muestra que un subespacio de un espacio normal no es necesariamente normal, ya que $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es un subespacio de $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, que es un espacio compacto de Hausdorff y, por tanto, normal. En tercer lugar, muestra que el producto de dos espacios normales no es necesariamente normal.

Primero, consideremos el espacio $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ y su "diagonal" $\Delta = \{x \times x \mid x \in \bar{S}_\Omega\}$. Puesto que $\bar{S}_\Omega$ es de Hausdorff, Δ es cerrado en $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$: si U y V son entornos disjuntos de x e y, respectivamente, entonces $U \times V$ es un entorno de $x \times y$ que no interseca Δ.

Por tanto, en el subespacio $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, el conjunto

$$A = \Delta \cap (S_\Omega \times \bar{S}_\Omega) = \Delta - \{\Omega \times \Omega\}$$

es cerrado. Del mismo modo, el conjunto

$$B = S_\Omega \times \{\Omega\}$$

es cerrado en $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$, siendo una "rebanada" de este espacio producto. Los conjuntos A y B son disjuntos. Supondremos que existen conjuntos abiertos disjuntos U y V de $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ que contienen a A y B, respectivamente, y llegaremos a una contradicción (véase la Figura 32.2).

[†]Kelley [K] atribuye este ejemplo a J. Dieudonné y A. P. Morse independientemente.

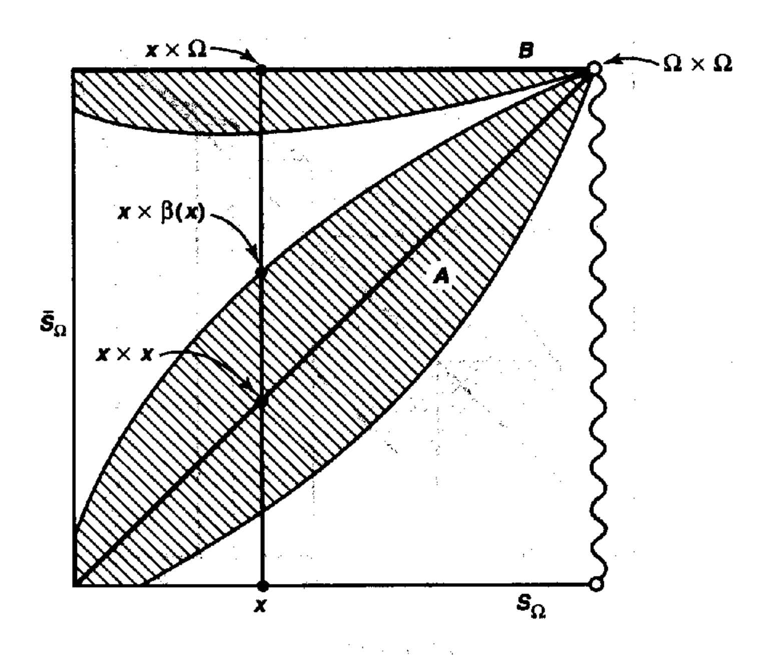


Figura 32.2

Dado $x \in S_\Omega$, consideremos la rebanada vertical $x \times \bar{S}_\Omega$. Aseguramos que existe algún punto β con $x < \beta < \Omega$ tal que $x \times \beta$ está fuera de U. Si U contuviese a todos los puntos $x \times \beta$ para $x < \beta < \Omega$, entonces el punto máximo $x \times \Omega$ de la rebanada sería un punto límite de U, que no lo es porque V es un conjunto abierto disjunto con U conteniendo a este punto máximo.

Elijamos $\beta(x)$ como un punto de ese tipo; para estar definido, sea $\beta(x)$ el *mínimo* de S_Ω tal que $x < \beta(x) < \Omega$ y $x \times \beta(x)$ está fuera de U. Definamos una sucesión de puntos de S_Ω como sigue: sea x_1 cualquier punto de S_Ω, sea $x_2 = \beta(x_1)$ y, en general, $x_{n+1} = \beta(x_n)$. Tenemos

$$x_1 < x_2 < \cdots$$

porque $\beta(x) > x$ para todo x. El conjunto $\{x_n\}$ es numerable y, por tanto, tiene una cota superior en S_Ω; sea $b \in S_\Omega$ su supremo, así $x_n \to b$. Pero $\beta(x_n) = x_{n+1}$, por lo que $\beta(x_n) \to b$ también. Entonces

$$x_n \times \beta(x_n) \to b \times b$$

en el espacio producto. Véase la Figura 32.3. Pero esto es una contradicción, porque el punto $b \times b$ está en el conjunto A, que está contenido en el conjunto abierto U, y U *no* contiene ningún punto del tipo $x_n \times \beta(x_n)$.

Ejercicios

1. Pruebe que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

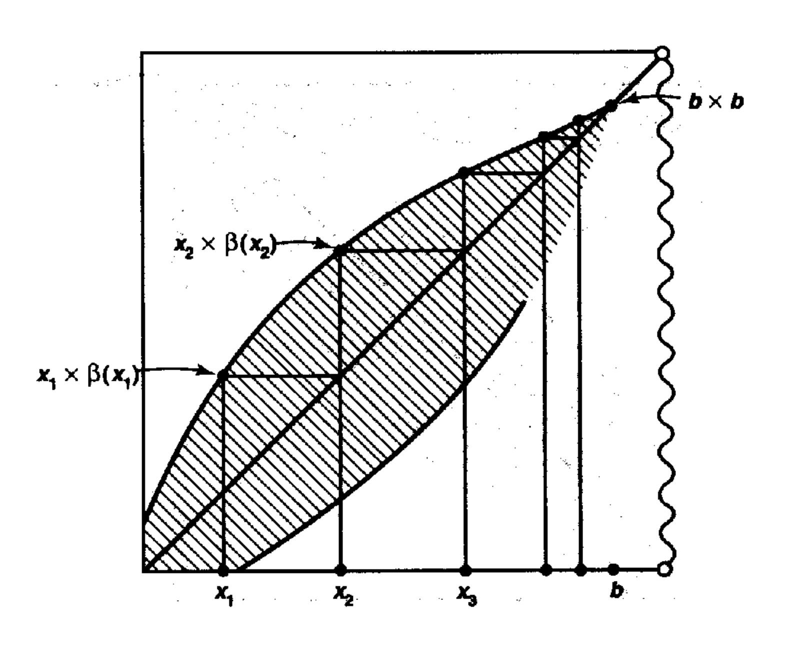


Figura 32.3

2. Pruebe que si $\prod X_\alpha$ es de Hausdorff, regular o normal, entonces también lo es X_α (suponga que cada X_α es no vacío).

3. Pruebe que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es regular.

4. Pruebe que todo espacio de Lindelöf regular es normal.

5. ¿Es $\mathbb{R}^\omega$ normal en la topología producto? ¿Y en la topología uniforme?

No se sabe si $\mathbb{R}^\omega$ es normal en la topología por cajas. Mary-Ellen Rudin ha probado que la respuesta es afirmativa si se admite la hipótesis del continuo, [RM]. De hecho, prueba que se satisface una condición más fuerte llamada *paracompacidad*.

6. Un espacio X se dice que es ***completamente normal*** si cada subespacio de X es normal. Pruebe que X es completamente normal si, y sólo si, para cada par A, B de conjuntos separados en X (esto es, conjuntos tales que $\bar{A} \cap B = \varnothing$ y $A \cap \bar{B} = \varnothing$), existen conjuntos abiertos disjuntos que los contienen. [*Indicación:* si X es completamente normal, considere $X - (\bar{A} \cap \bar{B})$.]

7. ¿Cuáles de los siguientes espacios son completamente normales? Justifique sus respuestas.

(a) Un subespacio de un espacio completamente normal.

(b) El producto de dos espacios completamente normales.

(c) Un conjunto bien ordenado en la topología del orden.

(d) Un espacio metrizable.

(e) Un espacio de Hausdorff compacto.

(f) Un espacio regular con una base numerable.

(g) El espacio $\mathbb{R}_\ell$.

***8.** Pruebe lo siguiente:
Teorema. Todo espacio X continuo lineal es normal.

(a) Sea C un subconjunto cerrado no vacío de X. Si U es una componente de $X - C$, pruebe que U es un conjunto de la forma (c, c') o $(-\infty, c)$, donde $c, c' \in C$.

(b) Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada componente W de $X - A \cup B$ que sea un intervalo abierto con un extremo en A y el otro en B, elija un punto c_W de W. Pruebe que el conjunto C de los puntos c_W es cerrado.

(c) Pruebe que si V es una componente de $X - C$, entonces V no interseca a A ni a B.

***9.** Pruebe el siguiente:
Teorema. Si J no es numerable, entonces $\mathbb{R}^J$ no es normal.
Demostración. (Esta prueba se debe a A. H. Stone, según la adaptación de [S-S].) Si $X = (\mathbb{Z}_+)^J$, será suficiente probar que X no es normal, puesto que X es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^J$. Usaremos notación funcional para los elementos de X, por lo que el elemento característico de X es una función $\mathbf{x} : J \to \mathbb{Z}_+$.

(a) Si $\mathbf{x} \in X$ y B es un subconjunto finito de J, denotemos por $U(\mathbf{x}, B)$ al conjunto formado por todos aquellos elementos $\mathbf{y}$ de X tales que $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{x}(\alpha)$ para $\alpha \in B$. Pruebe que los conjuntos $U(\mathbf{x}, B)$ son una base para X.

(b) Definamos P_n como el subconjunto de X formado por aquellos $\mathbf{x}$ tales que sobre el conjunto $J - \mathbf{x}^{-1}(n)$, la aplicación $\mathbf{x}$ es inyectiva. Pruebe que P_1 y P_2 son cerrados y disjuntos.

(c) Supongamos que U y V son conjuntos abiertos que contienen a P_1 y P_2, respectivamente. Dada una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de elementos distintos de J, y una sucesión

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

de enteros, para cada $i \geq 1$ escribamos

$$B_i = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}\}$$

y definamos $\mathbf{x}_i \in X$ por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(\alpha_j) &= j \qquad \text{para } 1 \leq j \leq n_{i-1}, \\ \mathbf{x}_i(\alpha) &= 1 \qquad \text{para los demás valores de } \alpha. \end{aligned}$$

Pruebe que se pueden elegir las sucesiones α_j y n_j de tal modo que para cada i, se tiene la inclusión

$$U(\mathbf{x}_i, B_i) \subset U.$$

[*Indicación:* para empezar, observe que $\mathbf{x}_1(\alpha) = 1$ para todo α; después elija B_1 de tal modo que $U(\mathbf{x}_1, B_1) \subset U$.]

(d) Sea A el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ construido en (c). Definamos $\mathbf{y} : J \to \mathbb{Z}_+$ por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\alpha_j) &= j \qquad \text{para } \alpha_j \in A, \\ \mathbf{y}(\alpha) &= 2 \qquad \text{para los demás valores de } \alpha. \end{aligned}$$

Elijamos B de tal modo que $U(\mathbf{y}, B) \subset V$. Después elijamos i de manera que $B \cap A$ esté contenido en el conjunto B_i. Pruebe que

$$U(\mathbf{x}_{i+1}, B_{i+1}) \cap U(\mathbf{y}, B)$$

no es vacío.

10. ¿Es normal todo grupo topológico?

§33 El lema de Urysohn

A continuación entramos en el primer teorema profundo del libro, un teorema que habitualmente se llama el "lema de Urysohn". Nos asegura la existencia de ciertas funciones continuas con valores reales sobre un espacio normal X. Es la herramienta básica usada al probar un gran número de teoremas importantes. Probaremos tres de ellos —el teorema de metrización de Urysohn, el teorema de extensión de Tietze y un teorema de embebimiento para variedades— en las próximas secciones de este capítulo.

¿Por qué decimos que el lema de Urysohn es un teorema "profundo"? Porque su demostración implica una idea realmente original, que las pruebas anteriores no hacían. Quizá podamos explicar lo que significa esto: se podría esperar que si alguien modificara este libro y borrara todas las demostraciones que hemos dado hasta ahora y después le ofreciera el libro a un estudiante brillante que no hubiera estudiado topología, ese estudiante debería ser capaz de leer el libro y obtener las demostraciones independientemente (sería una gran dedicación de tiempo y esfuerzo, por supuesto, y no se esperaría que el estudiante demostrara los ejemplos más difíciles). Pero el lema de Urysohn está en un nivel distinto. Necesitaría considerablemente más originalidad de la que la mayoría de nosotros poseemos para probar este lema, a menos que nos dieran bastantes indicaciones.

Teorema 33.1 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal y sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en la recta real. Entonces existe una aplicación continua*

$$f : X \to [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ para todo x de A y $f(x) = b$ para todo x de B.

Demostración. Necesitamos considerar sólo el caso donde el intervalo en cuestión es el intervalo $[0, 1]$; el caso general se sigue de éste. El primer paso de la prueba es construir, usando la normalidad, una cierta familia U_p de conjuntos abiertos de X, indexada por los números racionales. Después se usan estos conjuntos para definir la función continua f.

Paso 1. Sea P el conjunto de todos los números racionales en el intervalo $[0, 1]$.† Definiremos, para cada p de P, un conjunto abierto U_p de X, de tal modo que siempre que $p < q$, tengamos

$$\bar{U}_p \subset U_q.$$

Así, los conjuntos U_p estarán simplemente ordenados por la inclusión, del mismo modo que sus subíndices están ordenados por el orden usual en la recta real.

Puesto que P es numerable, podemos usar la inducción para definir los conjuntos U_p (o mejor aún, el principio de definición recursiva). Coloquemos los elementos de P en una sucesión infinita de cualquier manera; por comodidad, supongamos que los números 1 y 0 son los dos primeros elementos de la sucesión.

Definamos ahora los conjuntos U_p como sigue: en primer lugar, definamos $U_1 = X - B$. En segundo lugar, puesto que A es un conjunto cerrado contenido en el conjunto abierto U_1, podemos elegir, por la normalidad de X, un conjunto abierto U_0 tal que

$$A \subset U_0 \qquad \text{y} \qquad \bar{U}_0 \subset U_1.$$

En general, denotemos por P_n al conjunto formado por los primeros n números racionales en la sucesión. Supongamos que U_p está definido para todos los números racionales p que pertenecen al conjunto P_n, satisfaciendo la condición

$$(*) \qquad p < q \Longrightarrow \bar{U}_p \subset U_q.$$

Denotemos por r al siguiente número racional de la sucesión; deseamos definir U_r.

Consideremos el conjunto $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Es un subconjunto finito del intervalo $[0, 1]$ y, como tal, tiene una ordenación simple derivada de la relación de

†En realidad, cualquier subconjunto numerable denso de $[0, 1]$ funcionará, siempre que contenga a los puntos 0 y 1.

orden usual $<$ sobre la recta real. En un conjunto finito simplemente ordenado, cada elemento (distinto del mínimo y del máximo) tiene un inmediato predecesor y un inmediato sucesor (véase el Teorema 10.1). El número 0 es el mínimo y 1 es el máximo del conjunto simplemente ordenado P_{n+1}, y r no es ni 0 ni 1. Así, r tiene un inmediato anterior p en P_{n+1}, y un inmediato sucesor q en P_{n+1}. Los conjuntos U_p y U_q ya están definidos, y $\bar{U}_p \subset U_q$ por la hipótesis de inducción. Usando la normalidad de X, podemos encontrar un conjunto abierto U_r de X tal que

$$\bar{U}_p \subset U_r \quad \text{y} \quad \bar{U}_r \subset U_q.$$

Afirmamos que $(*)$ se cumple ahora para cada par de elementos de P_{n+1}. Si ambos elementos pertenecen a P_n, $(*)$ se cumple por la hipótesis de inducción. Si uno de ellos es r y el otro es un punto s de P_n, entonces $s \leq p$, en cuyo caso

$$\bar{U}_s \subset \bar{U}_p \subset U_r,$$

o $s \geq q$, en cuyo caso

$$\bar{U}_r \subset U_q \subset U_s.$$

Así, para cada par de elementos de P_{n+1}, la relación $(*)$ se cumple.

Por inducción, tenemos U_p definido para todo $p \in P$.

Para ilustrarlo, supongamos que empezamos con el método usual de colocar los elementos de P en una sucesión infinita:

$$P = \{1, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \dots\}$$

Después de definir U_0 y U_1, definiríamos $U_{1/2}$ de tal modo que $\bar{U}_0 \subset U_{1/2}$ y $\bar{U}_{1/2} \subset U_1$. Entonces pondríamos $U_{1/3}$ entre U_0 y $U_{1/2}$, y $U_{2/3}$ entre $U_{1/2}$ y U_1, y así sucesivamente. En el octavo paso de la prueba tendríamos la situación dibujada en la Figura 33.1. Y el noveno paso consistiría en elegir un conjunto abierto $U_{2/5}$ para introducirlo entre $U_{1/3}$ y $U_{1/2}$, y así sucesivamente.

Paso 2. Ya hemos definido U_p para todos los números racionales p del intervalo $[0,1]$. Extendemos esta definición a todos los números racionales p de $\mathbb{R}$ definiendo

$$U_p = \varnothing \qquad \text{si } p < 0,$$
$$U_p = X \qquad \text{si } p > 1.$$

Sigue siendo cierto (como puede comprobarse) que para cualquier par de números racionales p y q,

$$p < q \Longrightarrow \bar{U}_p \subset U_q.$$

Paso 3. Dado un punto x de X, definamos $\mathbb{Q}(x)$ como el conjunto de aquellos números racionales p tales que los conjuntos abiertos correspondientes U_p contienen a x:

$$\mathbb{Q}(x) = \{p \mid x \in U_p\}.$$

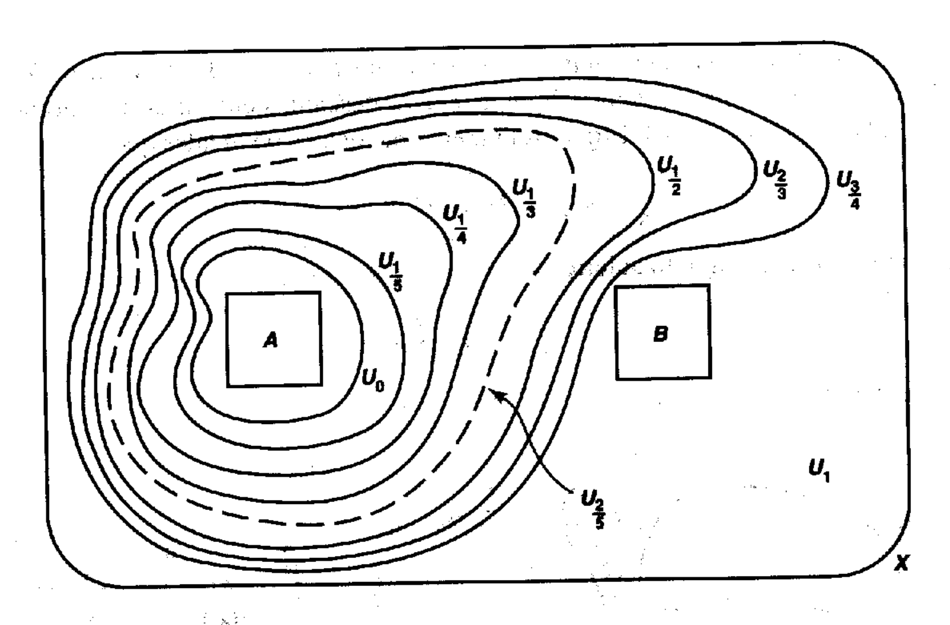


Figura 33.1

Este conjunto no contiene ningún número menor que 0, puesto que no hay x alguno que pertenezca a U_p para $p < 0$. Y contiene a cada número mayor que 1, puesto que cada x está en U_p para $p > 1$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ está acotado inferiormente, y su ínfimo es un punto del intervalo $[0, 1]$. Definamos

$$f(x) = \text{ínf}\,\mathbb{Q}(x) = \text{ínf}\{p \mid x \in U_p\}.$$

Paso 4. Probaremos que f es la función deseada. Si $x \in A$, entonces $x \in U_p$ para cada $p \geq 0$, por lo que $\mathbb{Q}(x)$ es igual al conjunto de todos los racionales no negativos, y $f(x) = \text{ínf}\,\mathbb{Q}(x) = 0$. De manera similar, si $x \in B$, entonces $x \in U_p$ siempre que no sea $p \leq 1$, por lo que $\mathbb{Q}(x)$ está formado por todos los números racionales mayores que 1, y $f(x) = 1$.

Todo lo anterior es fácil. La única parte difícil es probar que f es continua. Para este propósito, primero demostramos los siguientes hechos elementales:

(1) $x \in \bar{U}_r \Rightarrow f(x) \leq r$.

(2) $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r$.

Para probar (1), observe que si $x \in \bar{U}_r$, entonces $x \in U_s$ para cada $s > r$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los números racionales mayores que r, por lo que, por definición, tenemos

$$f(x) = \text{ínf}\,\mathbb{Q}(x) \leq r.$$

Para probar (2), observe que si $x \notin U_r$ entonces x no está en U_s para todo $s < r$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ no contiene número racional alguno menor que r, por lo que

$$f(x) = \text{ínf}\,\mathbb{Q}(x) \geq r.$$

Ahora probamos la continuidad de f. Dado un punto x_0 de X y un intervalo abierto (c, d) en $\mathbb{R}$ que contenga al punto $f(x_0)$, deseamos encontrar un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset (c, d)$. Elijamos números racionales p y q tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

Afirmamos que el conjunto abierto

$$U = U_q - \bar{U}_p$$

es el entorno deseado de x_0 (véase la Figura 33.2).

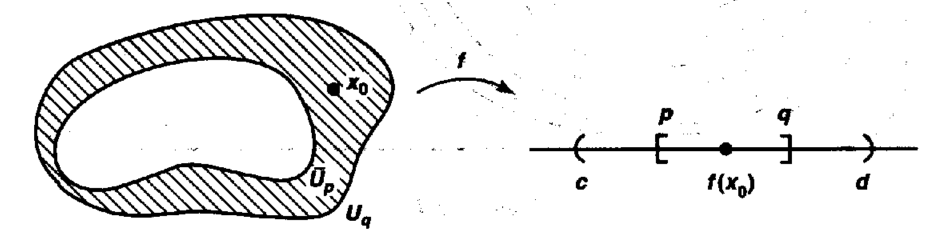


Figura 33.2

En primer lugar, observemos que $x_0 \in U$. Esto se verifica por el hecho de que $f(x_0) < q$ implica, por la condición (2), que $x_0 \in U_q$, mientras que el hecho de que $f(x_0) > p$ implica, por (1), que $x_0 \notin \bar{U}_p$.

En segundo lugar, probaremos que $f(U) \subset (c, d)$. Sea $x \in U$, entonces $x \in U_q \subset \bar{U}_q$, por lo que $f(x) \leq q$, por (1). Y $x \notin \bar{U}_p$, por lo que $x \notin U_p$ y $f(x) \geq p$, por (2). Así, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$, como deseábamos. ■

Definición. Si A y B son dos subconjuntos del espacio topológico X, y existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$, decimos que A y B ***pueden separarse por una función continua***.

El lema de Urysohn dice que si cada par de conjuntos cerrados disjuntos de X se pueden separar por conjuntos abiertos disjuntos, entonces cada par de ese tipo también se puede separar por una función continua. El recíproco es trivial, ya que si $f : X \to [0, 1]$ es la función, entonces $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.

Este hecho nos lleva a una cuestión que ya se le puede haber ocurrido: ¿por qué no puede generalizarse la demostración del lema de Urysohn para probar que en un espacio regular, donde pueden separarse puntos de conjuntos cerrados por conjuntos abiertos disjuntos, también pueden separarse puntos de conjuntos cerrados por funciones continuas?

A primera vista, parece que la prueba del lema de Urysohn valdría. Se toma un punto a y un conjunto cerrado B que no contenga a a, y comienza la demostración igual que antes definiendo $U_1 = X - B$ y eligiendo U_0 para que sea un conjunto abierto alrededor de a cuya clausura está contenida en U_1 (usando la regularidad de X). Pero en el próximo paso de la demostración nos encontramos con dificultades. Si suponemos que p es el siguiente número racional en la sucesión después de 0 y 1, se quiere encontrar un conjunto abierto U_p tal que $\bar{U}_0 \subset U_p$ y $\bar{U}_p \subset U_1$. Para esto, la regularidad no es suficiente.

Pedir que se pueda separar un punto de un conjunto cerrado por una función continua es, de hecho, una condición más fuerte que pedir que se puedan separar por conjuntos abiertos disjuntos. Convertimos esta condición en un nuevo axioma de separación:

Definición. Un espacio X es ***completamente regular*** si los conjuntos unipuntuales son cerrados en X y si para cada punto x_0 y cada conjunto cerrado A que no contenga a x_0, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.

Un espacio normal es completamente regular, por el lema de Urysohn, y un espacio completamente regular es regular, puesto que dada f, los conjuntos $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son conjuntos abiertos y disjuntos que contienen a A y x_0, respectivamente. Como consecuencia, este nuevo axioma se introduce entre la regularidad y la normalidad en la lista de los axiomas de separación. Observe que en la definición se podría pedir perfectamente que la función asociara x_0 con 0, y A con $\{1\}$, ya que $g(x) = 1 - f(x)$ satisface esta condición. Pero nuestra definición es, en ocasiones, más conveniente.

En los primeros años de la topología, los axiomas de separación, listados en orden de fuerza creciente, eran llamados T_1, T_2 (Hausdorff), T_3 (regular), T_4 (normal) y T_5 (completamente normal), respectivamente. La letra "T" proviene del alemán "Trennungsaxiom", que significa "axioma de separación". Más tarde, cuando se introdujo la noción de regularidad completa, alguien sugirió en broma que debería llamarse el "axioma $T_{3\frac{1}{2}}$", puesto que está entre la regularidad y la normalidad. Esta terminología, de hecho, se usa algunas veces en la literatura matemática.

A diferencia de la normalidad, este nuevo axioma de separación se comporta bien con respecto a subespacios y productos:

Teorema 33.2. *Un subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular. Un producto de espacios completamente regulares es completamente regular.*

Demostración. Sea X un espacio completamente regular e Y un subespacio de X. Sea x_0 un punto de Y y A un conjunto cerrado de Y disjunto de x_0. Tenemos que $A = \bar{A} \cap Y$, donde $\bar{A}$ denota la clausura de A en X. Por tanto, $x_0 \notin \bar{A}$. Puesto que X

es completamente regular, podemos elegir una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(\bar{A}) = \{0\}$. La restricción de f a Y es la función continua deseada sobre Y.

Sea $X = \prod X_\alpha$ un producto de espacios completamente regulares. Sea $\mathbf{b} = (b_\alpha)$ un punto de X y sea A un conjunto cerrado de X disjunto con $\mathbf{b}$. Elijamos un elemento $\prod U_\alpha$ de la base que contenga a $\mathbf{b}$ y que no interseque a A; entonces $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito de valores de α, digamos $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Dado $i = 1, \ldots, n$, elijamos una función continua

$$f_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$$

tal que $f_i(b_{\alpha_i}) = 1$ y $f_i(X - U_{\alpha_i}) = \{0\}$. Hagamos $\phi_i(\mathbf{x}) = f_i(\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}))$; entonces ϕ_i aplica X continuamente sobre $\mathbb{R}$ y es nula fuera de $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. El producto

$$f(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) \cdot \phi_2(\mathbf{x}) \cdot \cdots \cdot \phi_n(\mathbf{x})$$

es la función continua deseada sobre X, ya que es igual a 1 en $\mathbf{b}$ y es nula fuera de $\prod U_\alpha$. ■

EJEMPLO 1. Los espacios $\mathbb{R}_\ell^2$ y $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ son completamente regulares, pero no son normales. La razón es que son productos de espacios que son completamente regulares (de hecho, normales).

Un espacio que sea regular pero no completamente regular es mucho más difícil de encontrar. La mayoría de los ejemplos que se han construido para este propósito son difíciles, y requieren estar considerablemente familiarizado con los números cardinales. Sin embargo, hace poco tiempo, John Thomas [T] construyó un ejemplo mucho más elemental, que presentamos en el Ejercicio 11.

Ejercicios

1. Examine la demostración del lema de Urysohn y pruebe que, para un r dado,

$$f^{-1}(r) = \bigcap_{p>r} U_p - \bigcup_{q<r} U_q$$

donde p, q son racionales.

2. (a) Pruebe que un espacio conexo normal con más de un punto no es numerable.

(b) Pruebe que un espacio conexo regular con más de un punto no es numerable.† [*Indicación:* cualquier espacio numerable es de Lindelöf.]

† Sorprendentemente, existe un espacio de *Hausdorff* conexo que es numerablemente infinito. Véase el Ejemplo 75 de [S-S].

3. Proporcione una prueba directa del lema de Urysohn para un espacio métrico (X, d) haciendo
$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

4. Recordemos que A es un "conjunto G_δ" en X si A es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos de X.
Teorema. Sea X normal. Existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) > 0$ para $x \notin A$ si, y sólo si, A es un conjunto G_δ cerrado en X.

Una función que satisface las condiciones de este teorema se dice que ***es nula exactamente sobre A***.

5. Pruebe:
Teorema (versión fuerte del lema de Urysohn). Sea X un espacio normal. Existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$, $f(x) = 1$ para $x \in B$ y $0 < f(x) < 1$ en el resto si, y sólo si, A y B son conjuntos G_δ cerrados y disjuntos en X.

6. Un espacio X se dice que es ***perfectamente normal*** si X es normal y cada conjunto cerrado en X es un conjunto G_δ en X.

(a) Pruebe que todo espacio metrizable es perfectamente normal.

(b) Pruebe que un espacio perfectamente normal es completamente normal. Por este motivo la condición de normalidad perfecta se llama algunas veces "axioma T_6". [*Indicación:* sean A y B conjuntos separados en X. Elija funciones continuas $f, g : X \to [0, 1]$ que sean nulas exactamente sobre $\bar{A}$ y $\bar{B}$, respectivamente. Considere la función $f - g$.]

(c) Existe un espacio familiar que es completamente normal pero no perfectamente normal. ¿Cuál es?

7. Pruebe que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es completamente regular.

8. Sea X completamente regular y sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Pruebe que si A es compacto, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

9. Pruebe que $\mathbb{R}^J$ en la topología por cajas es completamente regular. [*Indicación:* pruebe que es suficiente considerar el caso donde el entorno caja $(-1, 1)^J$ es disjunto de A y el punto es el origen. Después use el hecho de que una función continua en la topología uniforme es también continua en la topología por cajas.]

***10.** Pruebe lo siguiente:
Teorema. Todo grupo topológico es completamente regular.
Demostración. Sea V_0 un entorno del elemento identidad e en el grupo topológico G. En general, elijamos V_n como un entorno de e tal que $V_n \Delta V_n \subset V_{n-1}$.

Consideremos el conjunto de todos los racionales emparejados p, esto es, todos los números racionales de la forma $k/2^n$, con k y n enteros. Para cada racional emparejado p en $(0, 1]$, definimos un conjunto abierto $U(p)$ inductivamente como sigue: $U(1) = V_0$ y $U(\frac{1}{2}) = V_1$. Dado n, si $U(k/2^n)$ está definido para $0 < k/2^n \leq 1$, definimos

$$U(1/2^{n+1}) = V_{n+1},$$
$$U((2k+1)/2^{n+1}) = V_{n+1}\Delta U(k/2^n)$$

para $0 < k < 2^n$. Para $p \leq 0$, sea $U(p) = \varnothing$ y para $p > 1$, sea $U(p) = G$. Pruebe que

$$V_n \Delta U(k/2^n) \subset U((k+1)/2^n)$$

para todos k y n. Proceda como en el lema de Urysohn. Este ejercicio está adaptado de [M-Z], al que se remite al lector para más resultados sobre grupos topológicos.

***11.** Defina un conjunto X como sigue: para cada entero par m, denotemos por L_m al segmento de recta $m \times [-1, 0]$ en el plano. Para cada entero impar n y cada entero $k \geq 2$, denotemos por $C_{n,k}$ a la unión de los segmentos de recta $(n + 1 - 1/k) \times [-1, 0]$ y $(n - 1 + 1/k) \times [-1, 0]$ y el semicírculo

$$\{x \times y \mid (x - n)^2 + y^2 = (1 - 1/k)^2 \quad \text{e} \quad y \geq 0\}$$

en el plano. Denotemos por $p_{n,k}$ al punto máximo $n \times (1 - 1/k)$ de este semicírculo. Sea X la unión de todos los conjuntos L_m y $C_{n,k}$, además de dos puntos a y b. Dotemos a X de una topología tomando conjuntos de los siguientes cuatro tipos como elementos de la base:

(i) La intersección de X con un segmento horizontal abierto de recta que no contiene a ninguno de los puntos $p_{n,k}$.

(ii) Un conjunto formado por uno de los conjuntos $C_{n,k}$ al borrar un número finito de puntos.

(iii) Para cada entero par m, la unión de $\{a\}$ y el conjunto de puntos $x \times y$ de X para los que $x < m$.

(iv) Para cada entero impar m, la unión de $\{b\}$ y el conjunto de puntos $x \times y$ de X para los que $x > m$.

(a) Haga un dibujo aproximado de X y pruebe que estos conjuntos forman una base para una topología sobre X.

(b) Sea f un función continua con valores reales sobre X. Pruebe que para cualquier c, el conjunto $f^{-1}(c)$ es un conjunto G_δ en X (esto es cierto para cualquier espacio X). Concluya que el conjunto $S_{n,k}$ formado por aquellos puntos p de $C_{n,k}$ para los que $f(p) \neq f(p_{n,k})$, es numerable.

Elija $d \in [-1, 0]$ de tal modo que la recta $y = d$ no interseque a ninguno de los conjuntos del tipo $S_{n,k}$. Pruebe que, para n impar,

$$f((n-1) \times d) = \lim_{k \to \infty} f(p_{n,k}) = f((n+1) \times d).$$

Concluya que $f(a) = f(b)$.

(c) Pruebe que X es regular pero no completamente regular.

§34 El teorema de metrización de Urysohn

Abordamos ahora el objetivo principal de este capítulo, un teorema que nos da condiciones bajo las cuales un espacio topológico es metrizable. La prueba relaciona entre sí varios conceptos que ya hemos visto en otras partes del libro; usa resultados sobre topologías métricas del Capítulo 2, así como hechos sobre los axiomas de separación y numerabilidad probados en el presente capítulo. La construcción básica usada en la prueba es simple, pero muy útil. Se verá con posterioridad en este libro, de distintas formas.

Existen dos versiones de la prueba, y puesto que cada una tiene generalizaciones útiles que aparecerán posteriormente, presentaremos aquí las dos. La primera versión se generaliza para dar un teorema de embebimiento para espacios completamente regulares. La segunda versión se generalizará en el Capítulo 6 cuando probemos el teorema de metrización de Nagata-Smirnov.

Teorema 34.1 (Teorema de metrización de Urysohn). *Todo espacio regular X con una base numerable es metrizable.*

Demostración. Probaremos que X es metrizable construyendo un embebimiento de X en un espacio metrizable Y, esto es, mostrando que X es homeomorfo a un subespacio de Y. Las dos versiones de la prueba difieren en la elección del espacio metrizable Y. En la primera versión, Y es el espacio $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto, un espacio que hemos probado previamente que es metrizable (Teorema 20.5). En la segunda versión, el espacio Y es también $\mathbb{R}^\omega$, pero esta vez con la topología dada por la distancia uniforme $\bar{\rho}$ (véase §20). En cada caso, se consigue un embebimiento de X en el subespacio $[0, 1]^\omega$ de $\mathbb{R}^\omega$.

Paso 1. Probaremos lo siguiente: *Existe una colección numerable de funciones continuas $f_n : X \to [0, 1]$ con la propiedad de que dado cualquier punto x_0 de X y cualquier entorno U de x_0, existe un índice n tal que f_n es positiva en x_0 y es nula fuera de U.*

Como consecuencia del lema de Urysohn, dados x_0 y U, existe una función de ese tipo. Sin embargo, si elegimos dicha función para cada par (x_0, U), la colección

resultante no será numerable, en general. Nuestra tarea es disminuir el tamaño de la colección. Aquí mostramos un manera de proceder:

Sea $\{B_n\}$ una base numerable para X. Para cada par n, m de índices para los que $\bar{B}_n \subset B_m$, aplicamos el lema de Urysohn para elegir una función continua $g_{n,m} : X \to [0,1]$ tal que $g_{n,m}(\bar{B}_n) = \{1\}$ y $g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}$. Entonces la colección $\{g_{n,m}\}$ satisface nuestra condición: dado x_0 y dado un entorno U de x_0, se puede elegir un elemento B_m de la base que contenga a x_0 y que esté contenido en U. Utilizando la regularidad, se puede elegir entonces B_n de tal modo que $x_0 \in B_n$ y $\bar{B}_n \subset B_m$. Entonces n, m es un par de índices para los que la función $g_{n,m}$ está definida, es positiva en x_0 y nula fuera de U. Puesto que la colección $\{g_{n,m}\}$ está indexada con un subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, es numerable; por tanto, se puede reordenar con los enteros positivos, dándonos la colección deseada $\{f_n\}$.

Paso 2 (Primera versión de la demostración). Dadas las funciones f_n del Paso 1, consideramos $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto y definimos una aplicación $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la regla

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Afirmamos que F es un embebimiento.

En primer lugar, F es continua, porque $\mathbb{R}^\omega$ tiene la topología producto y cada f_n es continua. En segundo lugar, F es inyectiva, puesto que dados $x \neq y$, sabemos que existe un índice n tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(y) = 0$; por consiguiente, $F(x) \neq F(y)$.

Finalmente, debemos probar que F es un homeomorfismo de X sobre su imagen, el subespacio $Z = F(X)$ de $\mathbb{R}^\omega$. Sabemos que F define una biyección continua de X con Z, por lo que sólo necesitamos probar que para cada conjunto abierto U en X, el conjunto $F(U)$ es abierto en Z. Sea z_0 un punto de $F(U)$. Encontraremos un conjunto abierto W de Z tal que

$$z_0 \in W \subset F(U).$$

Sea x_0 el punto de U tal que $F(x_0) = z_0$. Elijamos un índice N para el que $f_N(x_0) > 0$ y $f_N(X - U) = \{0\}$. Tomemos el rayo abierto $(0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$, y sea V el conjunto abierto

$$V = \pi_N^{-1}((0, +\infty))$$

de $\mathbb{R}^\omega$. Sea $W = V \cap Z$, entonces W es abierto en Z, por definición de la topología de subespacio (véase la Figura 34.1). Afirmamos que $z_0 \in W \subset F(U)$. En primer lugar, $z_0 \in W$ puesto que

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0.$$

En segundo lugar, $W \subset F(U)$. Si fuera $z \in W$, entonces $z = F(x)$ para algún $x \in X$, y $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$. Puesto que $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$, y f_N es nula fuera de U, el punto x debe estar en U. Entonces $z = F(x)$ está en $F(U)$, como se deseaba. Así F es un embebimiento de X en $\mathbb{R}^\omega$.

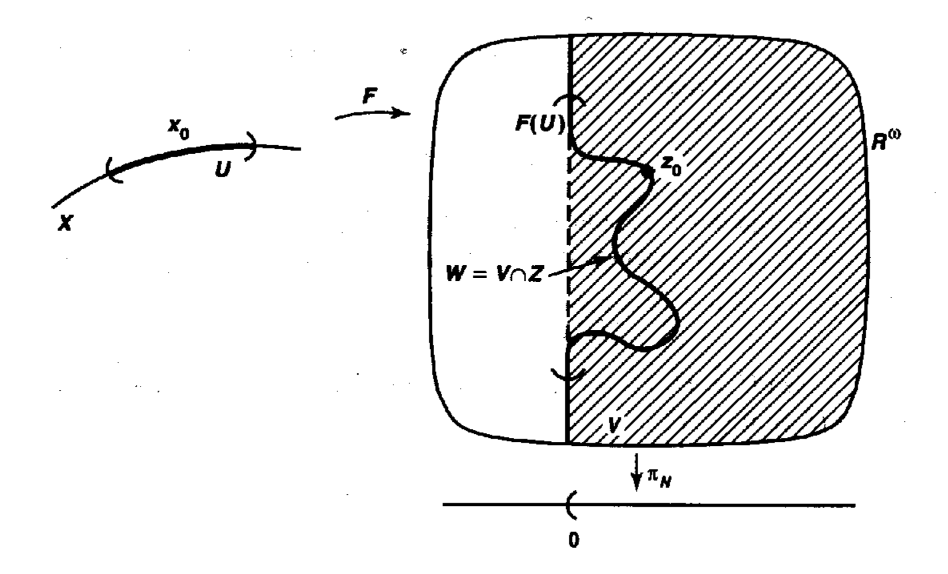


Figura 34.1

Paso 3 (Segunda versión de la demostración). En esta versión, embebemos X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$. En realidad, embebemos X en el subespacio $[0,1]^\omega$, en el que $\bar{\rho}$ es igual a la distancia

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|x_i - y_i|\}.$$

Utilizaremos la colección numerable de funciones $f_n : X \to [0,1]$ construida en el Paso 1. Pero ahora impondremos la condición adicional de que $f_n(x) \leq 1/n$ para todo x (esta condición es fácil de satisfacer, simplemente dividiendo cada función f_n por n).

Definimos la función $F : X \to [0,1]^\omega$ como antes:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Afirmamos que F es ahora un embebimiento relativo a la distancia ρ sobre $[0,1]^\omega$. Sabemos, por el Paso 2, que F es inyectiva. Es más, sabemos que si usamos la topología *producto* sobre $[0,1]^\omega$, la aplicación F lleva conjuntos abiertos de X sobre conjuntos abiertos del subespacio $Z = F(X)$. Esta afirmación sigue siendo cierta si se utiliza la topología más fina (más grande) sobre $[0,1]^\omega$ inducida por la distancia ρ.

Lo único que nos queda por hacer es probar que F es continua. Esto no se deduce del hecho de que cada función componente sea continua, puesto que no estamos utilizando la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$ ahora. Aquí es donde entra en juego la suposición de que $f_n(x) \leq 1/n$.

Sean x_0 un punto de X y $\epsilon > 0$. Para probar la continuidad, necesitamos encontrar un entorno U de x_0 tal que

$$x \in U \Longrightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon.$$

En primer lugar elijamos N lo suficientemente grande para que $1/N \leq \epsilon/2$. Después, para cada $n = 1, \dots, N$, usemos la continuidad de f_n para elegir un entorno U_n de x_0 tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \epsilon/2$$

para $x \in U_n$. Sea $U = U_1 \cap \cdots \cap U_N$; probaremos que U es el entorno deseado de x_0. Sea $x \in U$. Si $n \leq N$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \epsilon/2$$

por la elección de U. Y si $n > N$, entonces

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < 1/N \leq \epsilon/2$$

puesto que f_n aplica X en $[0, 1/n]$. Por tanto, para todo $x \in U$,

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon,$$

como deseábamos. ■

En el Paso 2 de la demostración que acabamos de hacer, realmente hemos probado algo más fuerte que el resultado establecido allí. Para un uso posterior, lo enunciaremos aquí:

Teorema 34.2 (Teorema del embebimiento). *Sea X un espacio en el que los conjuntos unipuntuales son cerrados. Supongamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia indexada de funciones continuas $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo la condición de que para cada punto x_0 de X y cada entorno U de x_0, existe un índice α tal que f_α es positiva en x_0 y nula fuera de U. Entonces la función $F : X \to \mathbb{R}^J$ definida por*

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

es un embebimiento de X en $\mathbb{R}^J$. Si f_α aplica X en $[0, 1]$ para cada α, entonces F embebe X en $[0, 1]^J$.

La prueba es casi una copia del Paso 2 de la demostración anterior; simplemente se sustituye n por α, y $\mathbb{R}^\omega$ por $\mathbb{R}^J$. Se necesita que los conjuntos unipuntuales en X sean cerrados para asegurar que, dado $x \neq y$, existe un índice α tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Una familia de funciones continuas que satisface las hipótesis de este teorema se dice que *separa puntos de conjuntos cerrados* en X. Es evidente que la existencia de una familia de ese tipo es equivalente, para un espacio X en el que los conjuntos unipuntuales son cerrados, a la condición de que X sea completamente regular. Por consiguiente se tiene la siguiente consecuencia:

Teorema 34.3. *Un espacio X es completamente regular si, y sólo si, es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^J$ para algún J.*

Ejercicios

1. Encuentre un ejemplo donde se muestre que un espacio de Hausdorff con una base numerable no es necesariamente metrizable.

2. Proporcione un ejemplo donde se muestre que un espacio puede ser completamente normal, satisfacer el primer axioma de numerabilidad y la condición de Lindelöf, y tener un subconjunto numerable denso y, sin embargo, no ser metrizable.

3. Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Pruebe que X es metrizable si, y sólo si, X tiene una base numerable.

4. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. ¿Es cierto que si X tiene una base numerable, entonces X es metrizable? ¿Es cierto que si X es metrizable, entonces X tiene una base numerable?

5. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea Y la compactificación por un punto de X. ¿Es cierto que si X tiene una base numerable, entonces Y es metrizable? ¿Es cierto que si Y es metrizable, entonces X tiene una base numerable?

6. Compruebe los detalles de la demostración del Teorema 34.2.

7. Un espacio X es ***localmente metrizable*** si cada punto x de X tiene un entorno que es metrizable en la topología de subespacio. Pruebe que un espacio de Hausdorff compacto X es metrizable si es localmente metrizable. [*Indicación:* pruebe que X es una unión finita de subespacios abiertos, cada uno de los cuales tiene una base numerable.]

8. Pruebe que un espacio regular de Lindelöf es metrizable si es localmente metrizable. [*Indicación:* un subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.] La regularidad es esencial; ¿en qué lugar de la prueba se usará?

9. Sea X un espacio compacto de Hausdorff que es la unión de los subespacios cerrados X_1 y X_2. Si X_1 y X_2 son metrizables, pruebe que X es metrizable. [*Indicación:* construya una colección numerable $\mathcal{A}$ de conjuntos abiertos de X

cuyas intersecciones con X_i formen una base para X_i, para $i = 1, 2$. Suponga que $X_1 - X_2$ y $X_2 - X_1$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto formado por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$.]

*§35 El teorema de extensión de Tietze†

Una consecuencia inmediata del lema de Urysohn es el útil teorema llamado el teorema de extensión de Tietze. Se ocupa del problema de extender una función continua con valores reales, que está definida sobre un subespacio de un espacio X, a una función continua definida sobre todo X. Este teorema es importante en muchas de las aplicaciones de topología.

Teorema 35.1 (Teorema de extensión de Tietze). *Sea X un espacio normal y A un subespacio cerrado de X.*

(a) *Cualquier aplicación continua de A en el intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $[a, b]$.*

(b) *Cualquier aplicación continua de A en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de todo X en $\mathbb{R}$.*

Demostración. La idea de la prueba es construir una sucesión de funciones continuas s_n definida sobre todo el espacio X, tal que la sucesión s_n converge uniformemente, y tal que la restricción de s_n a A se aproxima cada vez más a f a medida que n aumenta. Entonces la función límite será continua y su restricción a A será igual a f.

Paso 1. El primer paso es construir una función particular g definida sobre todo X tal que g no sea demasiado grande, y tal que g aproxime a f sobre el conjunto A con una exactitud aceptable. Para ser más precisos, tomemos el caso $f : A \to [-r, r]$. Afirmamos que existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$|g(x)| \leq \tfrac{1}{3}r \qquad \text{para todo } x \in X,$$
$$|g(a) - f(a)| \leq \tfrac{2}{3}r \qquad \text{para todo } a \in A.$$

La función g se construye como sigue.

Dividimos el intervalo $[-r, r]$ en tres intervalos de igual longitud a $\frac{2}{3}r$:

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right], \qquad I_2 = \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right], \qquad I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right].$$

†Esta sección se utilizará en §62, así como en varios ejercicios.

Sean B y C los subconjuntos

$$B = f^{-1}(I_1) \qquad \text{y} \qquad C = f^{-1}(I_3)$$

de A. Puesto que f es continua, B y C son subconjuntos cerrados y disjuntos de A. Por tanto, son cerrados en X. Por el lema de Urysohn, existe una función continua

$$g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$$

con la propiedad de que $g(x) = -\frac{1}{3}r$ para cada x de B, y $g(x) = \frac{1}{3}r$ para cada x en C.

Entonces $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$ para todo x. Afirmamos que para cada a en A,

$$|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r.$$

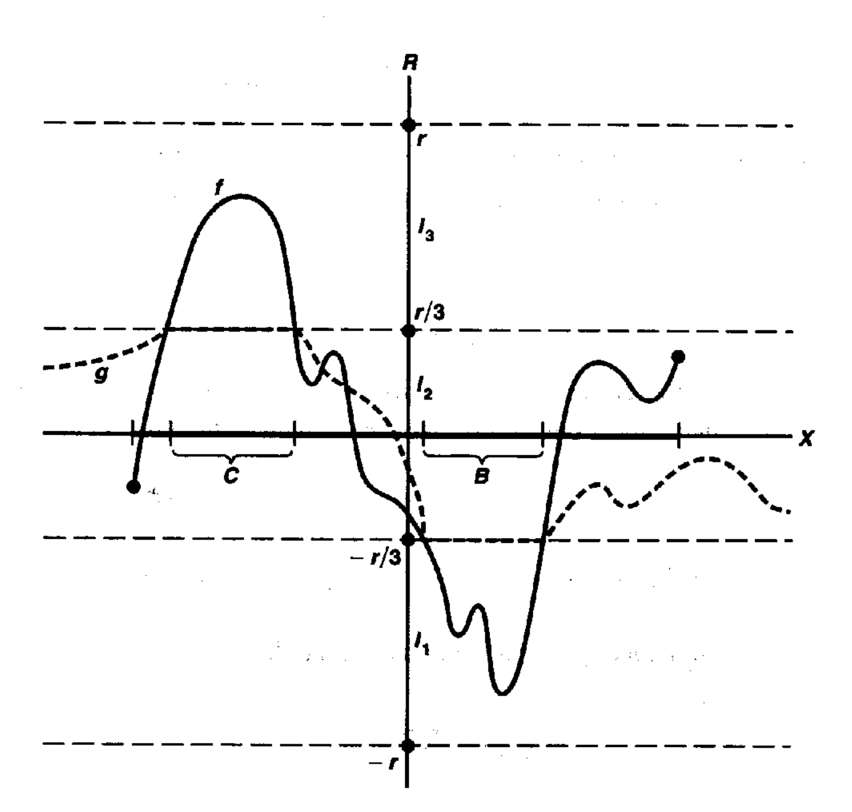


Figura 35.1

Hay tres casos. Si $a \in B$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ pertenecen a I_1. Si $a \in C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_3. Y si $a \notin B \cup C$, entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_2. En cada caso, $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$ (véase la Figura 35.1).

Paso 2. A continuación probaremos la parte (a) del teorema de Tietze. Sin pérdida de generalidad, podemos sustituir el intervalo cerrado arbitrario $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ por el intervalo $[-1, 1]$.

Sea $f : X \to [-1, 1]$ una aplicación continua. Entonces f satisface las hipótesis del Paso 1, con $r = 1$. Por tanto, existe una función g_1 continua con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_1(x)| \leq 1/3 \qquad \text{para } x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a)| \leq 2/3 \qquad \text{para } a \in A.$$

Consideremos a continuación la función $f - g_1$. Esta función aplica A en el intervalo $[-2/3, 2/3]$, por lo que podemos utilizar el Paso 1 otra vez, haciendo $r = 2/3$. Obtenemos una función g_2 con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \text{para } x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \text{para } a \in A.$$

Después aplicamos el Paso 1 a la función $f - g_1 - g_2$. Y así sucesivamente.

En el paso general, tenemos las funciones con valores reales $g_1, \ldots, g_n$, definidas sobre todo X, tales que

$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para $a \in A$. Aplicando el Paso 1 a la función $f - g_1 - \cdots - g_n$, con $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, obtenemos una función g_{n+1} con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{para } x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_{n+1}(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \qquad \text{para } a \in A.$$

Por inducción, las funciones g_n están definidas para todo n.

Ahora definimos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

para todo x en X. Por supuesto, tenemos que saber que esta serie infinita converge. Pero eso se deduce del teorema de comparación del cálculo; converge por comparación con la serie geométrica

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Para probar que g es continua, debemos probar que la sucesión s_n converge a g uniformemente. Este hecho se sigue del "test-M de Weierstrass" de análisis. Sin suponer este resultado, se puede observar simplemente que si $k > n$, entonces

$$\begin{aligned} |s_k(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^{k} g_i(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Manteniendo n fijo y haciendo $k \to \infty$, vemos que

$$|g(x) - s_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

para todo $x \in X$. Por tanto, s_n converge a g uniformemente.

Probaremos que $g(a) = f(a)$ para $a \in A$. Sea $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$, la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces $g(x)$ es, por definición, el límite de la sucesión infinita $s_n(x)$ de sumas parciales. Puesto que

$$|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)| = |f(a) - s_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

para todo a en A, se sigue que $s_n(a) \to f(a)$ para todo $a \in A$. Por tanto, tenemos $f(a) = g(a)$, para $a \in A$.

Finalmente, vamos a probar que g aplica X en el intervalo $[-1, 1]$. Esta condición se satisface, de hecho, automáticamente, puesto que la serie $(1/3)\sum(2/3)^n$ converge a 1. Sin embargo, ésta es sólo una casualidad, más que una parte esencial de la prueba. Si todo lo que supiéramos fuera que g aplica X en $\mathbb{R}$, entonces la aplicación $r \circ g$, donde $r : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ es la aplicación

$$\begin{aligned} r(y) &= y \qquad &\text{si } |y| \leq 1, \\ r(y) &= y/|y| \qquad &\text{si } |y| \geq 1, \end{aligned}$$

sería una extensión de f que aplicaría X en $[-1, 1]$.

Paso 3. A continuación probaremos la parte (b) del teorema, en la que f aplica A en $\mathbb{R}$. Podemos sustituir $\mathbb{R}$ por el intervalo abierto $(-1, 1)$, ya que este intervalo es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Para ello, sea f una aplicación continua de A en $(-1, 1)$. La mitad del teorema de Tietze ya probado muestra que podemos extender f a una aplicación continua

$g : X \to [-1, 1]$ que lleva X al intervalo *cerrado*. ¿Cómo podemos encontrar una aplicación h que lleve X al intervalo *abierto*?

Dada g, definamos un subconjunto D de X por la ecuación

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$

Puesto que g es continua, D es un subconjunto cerrado de X. Como $g(A) = f(A)$, que está contenido en $(-1, 1)$, el conjunto A es disjunto de D. Por el lema de Urysohn, existe una función continua $\phi : X \to [0, 1]$ tal que $\phi(D) = \{0\}$ y $\phi(A) = \{1\}$. Definamos

$$h(x) = \phi(x)g(x).$$

Entonces h es continua, por ser el producto de dos funciones continuas. Además, h es una extensión de f, ya que, para a en A,

$$h(a) = \phi(a)g(a) = 1\Delta g(a) = f(a).$$

Finalmente, h aplica todo X en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Esto es así porque si $x \in D$, entonces $h(x) = 0\Delta g(x) = 0$, y si $x \notin D$, entonces $|g(x)| < 1$. Se sigue que $|h(x)| \leq 1\Delta|g(x)| < 1$. ■

Ejercicios

1. Pruebe que el teorema de extensión de Tietze implica el lema de Urysohn.

2. En la prueba del teorema de Tietze, ¿es esencial la ingeniosa decisión en el Paso 1 de dividir el intervalo $[-r, r]$ en tres partes iguales? Suponga que se divide este intervalo en los tres intervalos

$$I_1 = [-r, -ar], \qquad I_2 = [-ar, ar], \qquad I_3 = [ar, r],$$

para algún a con $0 < a < 1$. ¿Para qué valores de a distintos de $a = 1/3$ (si los hay) funciona la prueba?

3. Sea X metrizable. Pruebe que son equivalentes:

   (i) X está acotado bajo toda distancia que da la topología de X.

   (ii) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ está acotada.

   (iii) X es compacto por punto límite.

   [*Indicación:* si $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $F(x) = x \times \phi(x)$ es un embebimiento de X en $X \times \mathbb{R}$. Si A es un subconjunto infinito de X sin puntos límites, sea ϕ una aplicación sobreyectiva de A en $\mathbb{Z}_+$.]

4. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, diremos que Y es un ***retracto*** de Z si existe una aplicación continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para cada $y \in Y$.

(a) Pruebe que si Z es de Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.

(b) Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^2$ con dos puntos. Pruebe que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.

(c) Sea S^1 el círculo unidad en $\mathbb{R}^2$. Pruebe que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el origen. ¿Podría decir si S^1 también es, o no, un retracto de $\mathbb{R}^2$?

5. Un espacio Y se dice que tiene la ***propiedad universal de extensión*** si para cada terna formada por un espacio normal X, un subconjunto cerrado A de X y una función continua $f : A \to Y$, existe una extensión de f a una aplicación continua de X en Y.

(a) Pruebe que $\mathbb{R}^J$ tiene la propiedad universal de extensión.

(b) Pruebe que si Y es homeomorfo a un retracto de $\mathbb{R}^J$, entonces Y tiene la propiedad universal de extensión.

6. Sea Y un espacio normal. Entonces se dice que Y es un ***retracto absoluto*** si para cada par de espacios (Y_0, Z) tal que Z es normal e Y_0 es un subespacio cerrado de Z homeomorfo a Y, el espacio Y_0 es un retracto de Z.

(a) Pruebe que si Y tiene la propiedad universal de extensión, entonces Y es un retracto absoluto.

(b) Pruebe que si Y es un retracto absoluto e Y es compacto, entonces Y tiene la propiedad universal de extensión. [*Indicación:* utilizando el teorema de Tychonoff se obtiene que $[0,1]^J$ es normal. Construya un embebimiento de Y en $[0,1]^J$.]

7. (a) Pruebe que la espiral logarítmica

$$C = \{0 \times 0\} \cup \{e^t \cos t \times e^t \operatorname{sen} t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es un retracto de $\mathbb{R}^2$. ¿Puede definir una retracción específica $r : \mathbb{R}^2 \to C$?

(b) Pruebe que el "eje x anudado" K de la Figura 35.2 es un retracto de $\mathbb{R}^3$.

***8.** Pruebe el siguiente teorema:

Teorema. Sea Y un espacio normal. Entonces Y es un retracto absoluto si, y sólo si, Y tiene la propiedad universal de extensión.

[*Indicación:* si X e Y son espacios normales disjuntos, A es cerrado en X y $f : A \to Y$ es una aplicación continua, definimos el ***espacio adjunto*** Z_f como el espacio cociente obtenido de $X \cup Y$ al identificar cada punto a de A con el punto $f(a)$ y con todos los puntos de $f^{-1}(\{f(a)\})$. Utilizando el teorema de

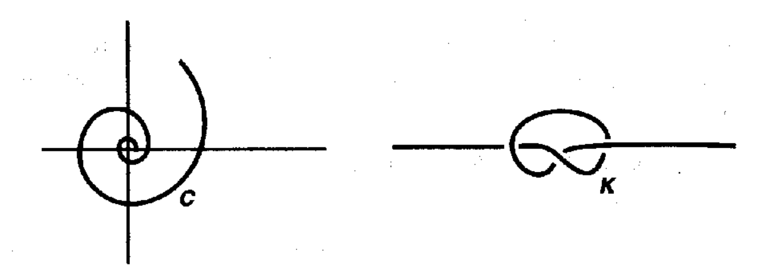


Figura 35.2

Tietze, pruebe que Z_f es normal. Si $p : X \cup Y \to Z_f$ es la aplicación cociente, pruebe que $p|Y$ es un homeomorfismo de Y con un subespacio cerrado de Z_f.]

9. Sea $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ una sucesión de espacios, donde X_i es un subespacio cerrado de X_{i+1} para cada i. Sea X la unión de los X_i y dotemos a X de una topología afirmando que un conjunto U es abierto en X si $U \cap X_i$ es abierto en X para cada i.

(a) Pruebe que ésta es una topología sobre X y que cada espacio X_i es un subespacio (de hecho, un subespacio cerrado) de X en esta topología. Dicha topología se llama topología ***coherente*** con los espacios X_i.

(b) Pruebe que $f : X \to Y$ es continua si $f|X_i$ es continua para cada i.

(c) Pruebe que si cada espacio X_i es normal, entonces X es normal. [*Indicación:* dados conjuntos cerrados disjuntos A y B en X, defina f igual a 0 sobre A y 1 sobre B, y extienda f sucesivamente a $A \cup B \cup X_i$ para $i = 1, 2, \ldots$.]

*§36 Embebimientos de variedades†

Hemos probado que todo espacio regular con una base numerable se puede embeber en el espacio euclídeo "infinito-dimensional" $\mathbb{R}^\omega$. Es natural preguntarse bajo qué condiciones un espacio X se puede embeber en algún espacio euclídeo finito-dimensional $\mathbb{R}^N$. Una respuesta a esta cuestión se da en esta sección; una más general se obtendrá en el Capítulo 8, cuando estudiemos la teoría de la dimensión.

Definición. Una ***m-variedad*** es un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto x de X tiene un entorno que es homeomorfo con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

†Esta sección se utilizará cuando estudiemos la paracompacidad en §41 y cuando estudiemos la teoría de la dimensión en §50.

Una 1-variedad se denomina ***curva*** y una 2-variedad se denomina ***superficie***. Las variedades forman una clase muy importante de espacios; se estudian mucho en geometría diferencial y topología algebraica.

Probaremos que si X es una variedad compacta, entonces X se puede embeber en un espacio euclídeo finito-dimensional. El teorema se cumple sin la suposición de la compacidad, pero la prueba se hace bastante más complicada.

Para empezar, necesitamos algunas definiciones.

Si $\phi : X \to \mathbb{R}$, entonces el ***soporte*** de ϕ se define como la clausura del conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Así, si x está fuera del soporte de ϕ, existe algún entorno de x sobre el que ϕ es nula.

Definición. Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimiento abierto finito e indexado del espacio X. Una familia indexada de funciones continuas

$$\phi_i : X \to [0,1] \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

se dice que es una ***partición de la unidad*** dominada por $\{U_i\}$ si:

(1) $(\text{soporte}\, \phi_i) \subset U_i$ para cada i.

(2) $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para cada x.

Teorema 36.1 (Existencia de particiones finitas de la unidad). *Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimiento abierto finito del espacio normal X. Entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$.*

Demostración. *Paso 1*. En primer lugar, vamos a probar que se puede "reducir" el recubrimiento $\{U_i\}$ a un recubrimiento abierto $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de X tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada i.

Procederemos por inducción. Antes de empezar, observe que el conjunto

$$A = X - (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$$

es un subconjunto cerrado de X. Puesto que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubre a X, el conjunto A está contenido en el conjunto abierto U_1. Usando la normalidad, elegimos un conjunto abierto V_1 que contenga a A y tal que $\bar{V}_1 \subset U_1$. Entonces la colección $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ recubre a X.

En general, dados conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_{k-1}$ tales que la colección

$$\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$$

recubre a X, pongamos

$$A = X - (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}) - (U_{k+1} \cup \cdots \cup U_n).$$

Entonces A es un subconjunto cerrado de X que está contenido en el conjunto abierto U_k. Elegimos V_k como un conjunto abierto que contiene a A tal que $\bar{V}_k \subset U_k$. Entonces $\{V_1, \ldots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ recubre a X. En el paso n-ésimo de la inducción, se prueba nuestro resultado.

Paso 2. Ahora probaremos el teorema. Dado un cubrimiento abierto $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de X, elijamos un recubrimiento abierto $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de X tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada i. Después elijamos un recubrimiento abierto $\{W_1, \ldots, W_n\}$ de X tal que $\overline{W}_i \subset V_i$ para cada i. Utilizando el lema de Urysohn, elijamos para cada i una función continua

$$\psi_i : X \to [0, 1]$$

tal que $\psi_i(\overline{W}_i) = \{1\}$ y $\psi(X - V_i) = \{0\}$. Puesto que $\psi_i^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ está contenido en V_i, tenemos

$$(\text{soporte}\, \psi_i) \subset \bar{V}_i \subset U_i.$$

Como la colección $\{W_i\}$ recubre a X, la suma $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ es positiva para cada x. Por tanto, podemos definir, para cada j,

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

Es fácil comprobar que las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n$ forman la deseada partición de la unidad. ■

Hay una noción comparable de *partición de la unidad* cuando el recubrimiento abierto y la colección de funciones no es finita, ni siquiera numerable. Consideraremos este tema en el Capítulo 6, cuando estudiemos la paracompacidad.

Teorema 36.2. *Si X es una m-variedad compacta, entonces X se puede embeber en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.*

Demostración. Recubramos X por un número finito de conjuntos abiertos $\{U_1, \ldots, U_n\}$, cada uno de los cuales puede embeberse en $\mathbb{R}^m$. Elijamos embebimientos $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ para cada i. Como X es de Hausdorff y compacto, también es normal. Sea $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$ y sea $A_i = \text{soporte}\, \phi_i$; para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos una función $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ por la regla

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x)\Delta g_i(x) & \text{para } x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \ldots, 0) & \text{para } x \in X - A_i. \end{cases}$$

[Aquí $\phi_i(x)$ es un número real c y $g_i(x)$ es un punto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ de $\mathbb{R}^m$; el producto $c\Delta\mathbf{y}$ denota, naturalmente, el punto $(cy_1, \ldots, cy_m)$ de $\mathbb{R}^m$.] La función h_i está bien definida porque las dos definiciones de h_i coinciden en la intersección de

sus dominios, y h_i es continua porque sus restricciones a los conjuntos abiertos U_i y $X - A_i$ son continuas.

Ahora definamos

$$F : X \to (\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ veces}})$$

mediante la regla

$$F(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), h_1(x), \ldots, h_n(x)).$$

Claramente, F es continua. Para probar que F es un embebimiento, sólo necesitamos mostrar que F es inyectiva (porque X es compacto). Supongamos que $F(x) = F(y)$. Entonces $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ y $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Tenemos que $\phi_i(x) > 0$ para algún i (puesto que $\sum \phi_i(x) = 1$). Por tanto, $\phi_i(y) > 0$ también, por lo que $x, y \in U_i$. Entonces

$$\phi_i(x)\Delta g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y)\Delta g_i(y).$$

Como $\phi_i(x) = \phi_i(y) > 0$, concluimos que $g_i(x) = g_i(y)$. Pero $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva, por lo que $x = y$, como deseábamos. ■

En muchas aplicaciones de las particiones de la unidad, como la que acabamos de presentar, todo lo que necesitamos saber es que la suma $\sum \phi_i(x)$ es positiva para cada x. En otras, sin embargo, se necesita la condición más fuerte de que $\sum \phi_i(x) = 1$. Véase §50.

Ejercicios

1. Pruebe que toda variedad es regular y, por tanto, metrizable. ¿Dónde se usa la condición de Hausdorff?
2. Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Supongamos que para cada $x \in X$, existe un entorno U de x y un entero positivo k tal que U se puede embeber en $\mathbb{R}^k$. Pruebe que X se puede embeber en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.
3. Sea X un espacio de Hausdorff tal que cada punto de X tiene un entorno que es homeomorfo con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Pruebe que si X es compacto, entonces X es una m-variedad.
4. Una familia indexada $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de X se dice que es ***indexada finita para puntos*** si cada $x \in X$ pertenece a A_α sólo para un número finito de valores de α.

   Lema (El lema de la reducción). Sea X un espacio normal y $\{U_1, U_2, \ldots\}$

un recubrimiento abierto indexado finito para puntos de X. Entonces existe un recubrimiento abierto indexado $\{V_1, V_2, \dots\}$ de X tal que $\bar{V}_n \subset U_n$ para cada n.

5. La condición de Hausdorff es una parte esencial de la definición de una variedad; no se deduce del resto de la definición. Considere el siguiente espacio: sea X la unión del conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ y el conjunto de dos puntos $\{p, q\}$. Dotemos a X de una topología tomando como base la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que no contienen a 0, junto con todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$ y todos los del tipo $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$, para $a > 0$. El espacio X se denomina ***recta con dos orígenes***.

(a) Compruebe que ésta es una base para una topología.

(b) Demuestre que cada uno de los espacios $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

(c) Pruebe que X satisface el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.

(d) Pruebe que X satisface todas las condiciones para una 1-variedad excepto la condición de ser de Hausdorff.

*Ejercicios complementarios: revisión de lo básico

Consideremos las siguientes propiedades que puede satisfacer un espacio:

(1) conexo,

(2) conexo por caminos,

(3) localmente conexo,

(4) localmente conexo por caminos,

(5) compacto,

(6) compacto por punto límite,

(7) Hausdorff localmente compacto,

(8) Hausdorff,

(9) regular,

(10) completamente regular,

(11) normal,

(12) 1AN,

(13) 2AN,

(14) Lindelöf,

(15) tener un subconjunto denso numerable,

(16) localmente metrizable,

(17) metrizable.

1. Para cada uno de los siguientes espacios, determine (si puede) cuáles de estas propiedades satisface (utilice el teorema de Tychonoff si lo necesita).

(a) S_Ω.

(b) $\bar{S}_\Omega$.

(c) $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$.

(d) El cuadrado ordenado.

(e) $\mathbb{R}_\ell$.

(f) $\mathbb{R}_\ell^2$.

(g) $\mathbb{R}^\omega$ en la topología producto.

(h) $\mathbb{R}^\omega$ en la topología uniforme.

(i) $\mathbb{R}^\omega$ en la topología por cajas.

(j) $\mathbb{R}^I$ en la topología producto, donde $I = [0, 1]$.

(k) $\mathbb{R}_K$.

2. ¿Cuáles de esas propiedades debe tener necesariamente un espacio métrico?

3. ¿Cuáles de esas propiedades debe tener necesariamente un espacio de Hausdorff compacto?

4. ¿Cuáles de esas propiedades se conservan al pasar a subespacios? ¿Y al pasar a un subespacio cerrado? ¿Y a un subespacio abierto?

5. ¿Cuáles de esas propiedades se conservan en productos finitos? ¿Y en productos numerables? ¿Y en productos arbitrarios?

6. ¿Cuáles de esas propiedades se conservan por aplicaciones continuas?

7. Después de estudiar los Capítulos 6 y 7, repita los Ejercicios 1–6 para las siguientes propiedades:

(18) paracompacidad,

(19) topológicamente completo.

Ya debería ser capaz de responder todas las preguntas (340) de los Ejercicios 1–6, excepto una, y todas (40) las del Ejercicio 7, excepto una. Estas dos están sin resolver; véase la nota en el Ejercicio 5 de §32.

Capítulo 5

El teorema de Tychonoff

Regresamos a un problema que dejamos abierto en el Capítulo 3. Demostraremos el teorema de Tychonoff, el cual afirma que los productos arbitrarios de espacios compactos son compactos. La prueba hace uso del Lema de Zorn (véase §11). Una demostración alternativa basada en el teorema de la buena ordenación se puede encontrar en los ejercicios.

El teorema de Tychonoff es de gran utilidad para los analistas (bastante menos para los geómetras). Lo aplicamos en §38 para construir la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular y en §47 para probar la versión general del teorema de Ascoli.

§37 El teorema de Tychonoff

Como el lema de Urysohn, el teorema de Tychonoff es lo que denominamos un teorema "profundo". Su demostración involucra no sólo una, sino varias ideas originales; ésta podría ser cualquier cosa excepto algo directo y evidente. Discutiremos las ideas cruciales de la prueba con cierto detalle antes de desarrollar la prueba en sí misma.

En el Capítulo 3 probamos que el producto $X \times Y$ de dos espacios compactos es compacto. Para esa prueba la formulación de la compacidad en términos de cubrimientos era completamente satisfactoria. Dado un cubrimiento por abiertos de $X \times Y$ por elementos básicos, cubríamos cada rebanada $x \times Y$ por un número finito de ellos. A continuación, obteníamos un cubrimiento finito de $X \times Y$.

Resulta complicado trasladar este argumento para un producto arbitrario de espacios compactos; se puede establecer un buen orden en el conjunto de índices y utilizar la inducción transfinita (véase el Ejercicio 5). Una demostración alternativa

que no utilice los cubrimientos por abiertos consiste en considerar la formulación de la compacidad en términos de conjuntos cerrados y utilizar el lema de Zorn.

Para ver cómo esta idea puede funcionar, consideremos primero el caso más sencillo posible: el producto de dos espacios compactos $X_1 \times X_2$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos cerrados de $X_1 \times X_2$ con la propiedad de la intersección finita. Consideremos la aplicación proyección $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$. La colección

$$\{\pi_1(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

de subconjuntos de X_1 también tiene la propiedad de la intersección finita, y también así la colección de sus clausuras $\overline{\pi_1(A)}$. La compacidad de X_1 nos garantiza que la intersección de todos los conjuntos $\overline{\pi_1(A)}$ es no vacía. Elijamos un punto x_1 perteneciente a esta intersección. Análogamente, podemos elegir un punto x_2 perteneciente a todos los conjuntos $\overline{\pi_2(A)}$. La conclusión obvia a la que podríamos llegar es que el punto $x_1 \times x_2$ está en $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, y por tanto nuestro teorema estaría probado.

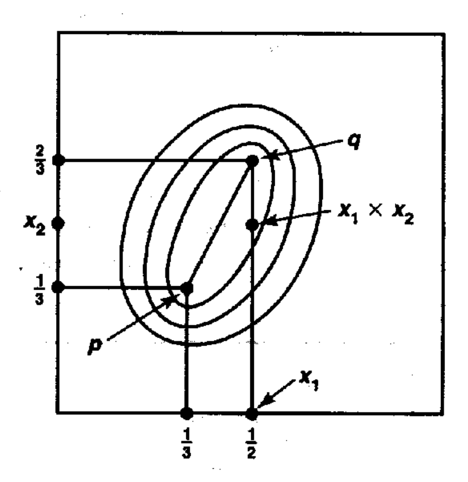


Figura 37.1

Desafortunadamente, esto no es cierto. Consideremos el siguiente ejemplo, en el cual $X_1 = X_2 = [0, 1]$, y la colección $\mathcal{A}$ está formada por todas las regiones elípticas cerradas acotadas por elipses que tienen como focos los puntos $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $q = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ (véase la Figura 37.1). Ciertamente, la colección $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Elijamos ahora un punto x_1 en la intersección de los conjuntos $\{\overline{\pi_1(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Cualquier punto del intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ nos sirve; supongamos que elegimos el punto $x_1 = \frac{1}{2}$. Análogamente, elijamos un punto x_2 en la intersección de los conjuntos $\{\overline{\pi_2(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Cualquier punto del intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ nos vale; supongamos que tomamos $x_2 = \frac{1}{2}$. Esta elección no es la acertada, ya que el punto

$$x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

no está en la intersección de todos los conjuntos A.

Pensará usted: "el problema es que hemos hecho una mala elección. Si después de haber escogido $x_1 = \frac{1}{2}$ elegimos $x_2 = \frac{2}{3}$, *entonces* habremos encontrado un punto en $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$". La dificultad de la demostración anterior es que nos deja demasiada libertad a la hora de escoger x_1 y x_2 y nos permite hacer una "mala" elección en lugar de una "buena" elección.

¿Cómo podemos modificar la prueba para evitar esta dificultad?

Esta cuestión nos lleva a la segunda idea de la prueba: quizá, si *ampliamos* la colección $\mathcal{A}$ (conservando la propiedad de la intersección finita, por supuesto), esta ampliación implicará una restricción en las posibles elecciones de x_1 y x_2 que será suficiente para asegurar la elección correcta. Para ilustrar esta situación, supongamos que en el ejemplo previo ampliamos la colección $\mathcal{A}$ a la colección $\mathcal{D}$ que consiste en todas las regiones elípticas cerradas acotadas por elipses que tienen como focos a $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y a cualquier otro punto del segmento pq. Esta colección está ilustrada en la Figura 37.2. La nueva colección $\mathcal{D}$ también tiene la propiedad de la intersección finita. Pero si intentamos elegir un punto x_1 en

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_1(D)}$$

la única elección posible para x_1 es $\frac{1}{3}$. Análogamente, la única elección posible para x_2 es $\frac{1}{3}$. Y $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ pertenece a cada conjunto de la colección $\mathcal{D}$ y, por tanto, a cada conjunto de $\mathcal{A}$. En otras palabras, el ampliar la colección $\mathcal{A}$ a la colección $\mathcal{D}$ nos obliga a efectuar la elección correcta.

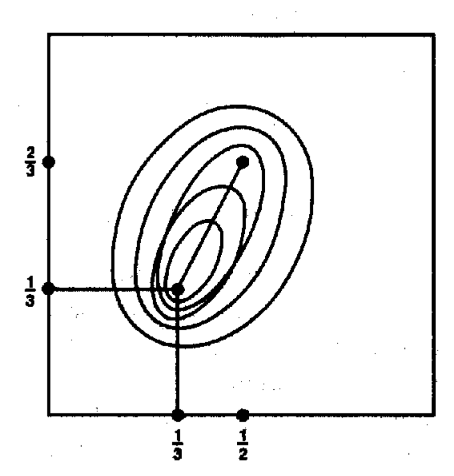


Figura 37.2

Por supuesto, en este ejemplo hemos escogido $\mathcal{D}$ cuidadosamente para que la demostración funcionara. ¿Qué esperanzas tenemos de escoger correctamente la colección $\mathcal{D}$ en general? Aquí está la tercera idea para la prueba: ¿por qué no elegimos

$\mathcal{D}$ como la colección "más grande posible", de modo que no exista una colección mayor con la propiedad de la intersección finita, y luego comprobamos si esta colección funciona? No parece obvio que tal colección $\mathcal{D}$ deba existir; para probarlo, debemos apelar al lema de Zorn. Pero, una vez que hayamos probado que $\mathcal{D}$ existe, seremos capaces de demostrar que $\mathcal{D}$ es lo suficientemente grande como para forzar una elección correcta.

Una observación final. La suposición de que los elementos de la colección $\mathcal{A}$ eran conjuntos cerrados era irrelevante en esta discusión. El motivo es que, incluso siendo cerrado el conjunto $A \in \mathcal{A}$, el conjunto imagen $\pi_1(A)$ no tiene por qué serlo, así que debemos tomar su clausura para poder aplicar la formulación de compacidad en términos de conjuntos cerrados. De esta forma, podemos también comenzar con una colección arbitraria de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección finita, y probar que la intersección de sus *clausuras* es no vacía. Este enfoque resulta ser mucho más conveniente.

Lema 37.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección finita. Entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita tal que $\mathcal{D}$ contiene a $\mathcal{A}$. Además, ninguna colección de subconjuntos de X verificando dicha propiedad contiene a $\mathcal{D}$ propiamente.*

Con frecuencia, diremos que una colección $\mathcal{D}$ que satisface la conclusión de este teorema es *maximal* con respecto a la propiedad de la intersección finita.

Demostración. Vamos a construir $\mathcal{D}$ utilizando el lema de Zorn. Este resultado establece que dado un conjunto A que esté estrictamente parcialmente ordenado y en el cual cada subconjunto simplemente ordenado tenga una cota superior, entonces A posee un elemento maximal.

El conjunto A al cual le vamos a aplicar el lema de Zorn no es un subconjunto de X, ni siquiera una colección de subconjuntos de X, sino un conjunto cuyos *elementos* son colecciones de subconjuntos de X. Para los propósitos de esta prueba, llamaremos a un conjunto cuyos elementos son colecciones de subconjuntos de X un "superconjunto" y lo denotaremos con una letra contorneada. En definitiva, utilizaremos la siguiente notación:

c es un elemento de X.

C es un subconjunto de X.

$\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de X.

$\mathbb{C}$ es un superconjunto cuyos elementos son colecciones de subconjuntos de X.

Ahora, por hipótesis, tenemos una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que tiene la propiedad de la intersección finita. Denotemos por $\mathbb{A}$ el superconjunto formado por *todas* las colecciones $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tiene la

propiedad de la intersección finita. Consideraremos como orden parcial estricto en $\mathbb{A}$ la inclusión propia $\subsetneq$. Para probar nuestro lema, necesitamos demostrar que $\mathbb{A}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{D}$.

Para aplicar el lema de Zorn, debemos demostrar que si $\mathbb{B}$ es un "subsuperconjunto" de $\mathbb{A}$ que está simplemente ordenado por la inclusión propia, entonces $\mathbb{B}$ tiene una cota superior en $\mathbb{A}$. De hecho, demostraremos que la colección

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$$

que es la unión de las colecciones pertenecientes a $\mathbb{B}$, es un elemento de $\mathbb{A}$; entonces esta unión es la cota superior requerida en $\mathbb{B}$.

Para demostrar que $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathbb{A}$, debemos probar que $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ y que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ciertamente $\mathcal{C}$ contiene a $\mathcal{A}$, ya que cada elemento de $\mathbb{B}$ contiene a $\mathcal{A}$. Para demostrar que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita, sean $C_1, \ldots, C_n$ elementos de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es la unión de los elementos de $\mathbb{B}$, existe, para cada i, un elemento $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{B}$ tal que $C_i \in \mathcal{B}_i$. El superconjunto $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n\}$ está contenido en $\mathbb{B}$, así que está simplemente ordenado por la relación de la inclusión propia. Siendo finito, tiene un elemento máximo; esto es, existe un índice k tal que $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_k$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces todos los conjuntos $C_1, \ldots, C_n$ son elementos de $\mathcal{B}_k$. Como $\mathcal{B}_k$ tiene la propiedad de la intersección finita, la intersección de los conjuntos $C_1, \ldots, C_n$ es no vacía, tal y como se quería demostrar. ■

Lema 37.2. *Sea X un conjunto y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita. Entonces:*

(a) *Cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ es un elemento de $\mathcal{D}$.*

(b) *Si A es un subconjunto de X que interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$*

Demostración. (a) Sea B la intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{D}$. Definamos una colección $\mathcal{E}$ uniendo B a $\mathcal{D}$, de modo que $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de la intersección finita; entonces, la maximalidad de $\mathcal{D}$ implica que $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, luego $B \in \mathcal{D}$, tal y como se quería demostrar.

Escojamos un número finito de elementos de $\mathcal{E}$. Si ninguno de ellos es el conjunto B, entonces su intersección es no vacía ya que $\mathcal{D}$ verifica dicha propiedad. Si alguno de ellos es el conjunto B, entonces su intersección es de la forma

$$D_1 \cap \cdots \cap D_m \cap B.$$

Como B es una intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{D}$, este conjunto es no vacío.

(b) Dado A, definamos $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Veamos que $\mathcal{E}$ verifica la propiedad de la intersección finita y concluiremos así que A pertenece a $\mathcal{D}$. Escojamos un número finito de elementos de $\mathcal{E}$. Si ninguno de ellos es el conjunto A, su intersección es automáticamente no vacía. De otra manera, esta intersección es de la forma

$$D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap A.$$

Ahora, $D_1 \cap \cdots \cap D_n$ pertenece a $\mathcal{D}$, por (a); de esta forma, esta intersección es no vacía, por hipótesis. ■

Teorema 37.3 (Teorema de Tychonoff). *El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Demostración. Sea

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha,$$

donde cada espacio X_α es compacto. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita. Vamos a probar que la intersección

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

es no vacía. Se sigue entonces la compacidad de X.

Aplicando el Lema 37.1, elegimos una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita. Será suficiente demostrar que la intersección $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$ es no vacía.

Dado $\alpha \in J$, sea $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la aplicación proyección. Consideremos la colección

$$\{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$$

de subconjuntos de X_α. Esta colección tiene la propiedad de la intersección finita ya que $\mathcal{D}$ la tiene. Por compacidad de X_α, podemos elegir para cada α un punto x_α de X_α tal que

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}.$$

Sea $\mathbf{x}$ el punto $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de X. Veamos que $\mathbf{x} \in \bar{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$; entonces nuestra prueba habrá acabado.

Primero, veamos que si $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un elemento cualquiera de la subbase (para la topología producto en X) conteniendo a $\mathbf{x}$, entonces $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$. El conjunto U_β es un entorno de x_β en X_β. Como $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ por definición, U_β interseca $\pi_\beta(D)$ en algún punto $\pi_\beta(\mathbf{y})$, donde $\mathbf{y} \in D$. Se sigue entonces que $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$.

Se deduce de la parte (b) del Lema 37.2 que cada elemento de la subbase que contiene a $\mathbf{x}$ *pertenece* a $\mathcal{D}$. Y se tiene entonces de la parte (a) del mismo lema que cada elemento *básico* que contiene a $\mathbf{x}$ pertenece a $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de la intersección finita, esto significa que cada elemento básico que contiene a $\mathbf{x}$ interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$; por tanto, $\mathbf{x} \in \bar{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$ tal y como se quería probar. ■

Ejercicios

1. Sea X un espacio y sea $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita.

(a) Demuestre que $x \in \bar{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$ si, y sólo si, cada entorno de x pertenece a $\mathcal{D}$. ¿En qué implicación se utiliza la maximalidad de $\mathcal{D}$?

(b) Sea $D \in \mathcal{D}$. Demuestre que si $A \supset D$, entonces $A \in \mathcal{D}$.

(c) Demuestre que si X satisface el axioma T_1, existe al menos un punto perteneciente a $\bigcap_{D\in\mathcal{D}} \bar{D}$.

2. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la ***propiedad de la intersección numerable*** si cada intersección numerable de elementos de $\mathcal{A}$ es no vacía. Demuestre que X es un espacio de Lindelöf si, y sólo si, para cada colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección numerable, se tiene que

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \bar{A}$$

es no vacía.

3. Considere las tres afirmaciones siguientes:

(i) Si X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección numerable, entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección numerable.

(ii) Supongamos que $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección numerable. Entonces las intersecciones numerables de elementos de $\mathcal{D}$ están en $\mathcal{D}$. Además, si A es un subconjunto de X que interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$.

(iii) Los productos de espacios de Lindelöf son de Lindelöf.

(a) Demuestre que (i) y (ii) implican (iii).

(b) Demuestre que (ii) es cierto.

(c) Los productos de espacios de Lindelöf no son, necesariamente, de Lindelöf (véase §30). Así, la propiedad (i) no es cierta. Si se intenta generalizar la prueba del Lema 37.1 con la propiedad de la intersección numerable, ¿en qué lugar de la demostración se encuentra el fallo?

4. He aquí otro teorema cuya demostración utiliza el lema de Zorn. Recuérdese que si A es un espacio y si $x, y \in A$, decimos que x e y pertenecen a la misma *cuasicomponente* de A si no existe una separación $A = C \cup D$ de A en dos conjuntos disjuntos abiertos en A tales que $x \in C$ e $y \in D$.
Teorema. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Entonces x e y pertenecen a la misma cuasicomponente de X si, y sólo si, pertenecen a la misma componente conexa de X.*

(a) Sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subespacios cerrados A de X tales que x e y están en la misma cuasicomponente de A. Sea $\mathcal{B}$ una subcolección de $\mathcal{A}$ con el orden simple de la inclusión. Demuestre que la intersección de los elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{A}$. [*Indicación:* compare con el Ejercicio 11 de §26.]

(b) Demuestre que $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal D.

(c) Demuestre que D es conexo.

***5.** He aquí una prueba del teorema de Tychonoff que se apoya en el teorema de buena ordenación, en lugar del lema de Zorn. En primer lugar, pruebe la siguiente versión del lema del tubo y a continuación, pruebe el teorema.
Lema. *Sea $\mathcal{A}$ una colección de elementos básicos para la topología del espacio producto $X \times Y$, tales que ninguna subcolección finita cubre $X \times Y$. Si X es compacto, entonces existe un punto $x \in X$ tal que ninguna subcolección finita de $\mathcal{A}$ cubre la rebanada $\{x\} \times Y$.*
Teorema. *Un producto arbitrario de espacios compactos es compacto con la topología producto.*
Demostración. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios compactos y sea

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la aplicación proyección. Consideramos que J está bien ordenado, de modo que tenga un elemento maximal.

(a) Sea $\beta \in J$. Supongamos que están dados los puntos $p_i \in X_i$ para todo $i < \beta$. Para cada $\alpha < \beta$, denotemos por Y_α el subespacio de X definido por la ecuación

$$Y_\alpha = \{\mathbf{x} \mid \pi_i(\mathbf{x}) = p_i \text{ para } i \leq \alpha\}.$$

Observemos que si $\alpha < \alpha'$, entonces $Y_\alpha \supset Y_{\alpha'}$. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una colección finita de elementos básicos de X que cubren el espacio

$$Z_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} Y_\alpha = \{\mathbf{x} \mid \pi_i(\mathbf{x}) = p_i \text{ para } i < \beta\}$$

entonces $\mathcal{A}$ cubre Y_α para algún $\alpha < \beta$. [*Indicación:* si β tiene un inmediato predecesor en J, sea α dicho elemento. En otro caso, para cada $A \in \mathcal{A}$, denotemos por J_A el conjunto de aquellos índices $i < \beta$ para los cuales $\pi_i(A) \neq X_i$; la unión de los conjuntos J_A, para $A \in \mathcal{A}$, es finita; sea α el elemento máximo de esta unión J.]

(b) Supongamos que $\mathcal{A}$ es una colección de elementos básicos de X tales que ninguna subcolección finita de $\mathcal{A}$ cubre X. Demuestre que podemos elegir puntos $p_i \in X_i$ para todo i, tales que para cada α, el espacio Y_α definido en (a) no puede estar finitamente cubierto por $\mathcal{A}$. Cuando α es el máximo de J, se llega a una contradicción. [*Indicación:* si α es el mínimo de J, utilice el lema anterior para elegir p_α. Si p_i está definido para todo $i < \beta$, observe que (a) implica que el espacio Z_β no puede estar finitamente cubierto por $\mathcal{A}$ y utilice el lema para encontrar p_β.]

§38 La compactificación de Stone-Čech

Ya hemos estudiado una forma de compactificar un espacio topológico X, la compactificación por un punto (§29); ésta es, en algún sentido, la compactificación minimal de X. La compactificación de Stone-Čech de X, que es la que vamos a estudiar ahora, es en ese mismo sentido la compactificación maximal de X. Fue construida en 1937 por M. Stone y E. Čech de forma independiente. Tiene una gran cantidad de aplicaciones en análisis que se escapan de los objetivos de este libro.

Recordemos la siguiente definición:

Definición. Una ***compactificación*** de un espacio X es un espacio de Hausdorff compacto Y que contiene a X como subespacio y además $\bar{X} = Y$. Dos compactificaciones Y_1 e Y_2 de X se dice que son ***equivalentes*** si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ tal que $h(x) = x$ para cada $x \in X$.

Si X tiene una compactificación Y, entonces X debe ser completamente regular, ya que es un subespacio de un espacio completamente regular Y. Recíprocamente, si X es completamente regular, entonces X tiene una compactificación, pues X puede ser embebido en el espacio de Hausdorff compacto $[0,1]^J$ para algún J, y cualesquiera de tales embebimientos da lugar a una compactificación de X, tal y como el siguiente lema prueba:

Lema 38.1. *Sea X un espacio y supongamos que $h : X \to Z$ es un embebimiento de X en el espacio de Hausdorff compacto Z. Entonces existe una compactificación Y de X; ésta tiene la propiedad de que existe un embebimiento $H : Y \to Z$ que coincide con h en X. La compactificación Y está unívocamente determinada salvo equivalencias.*

Llamaremos a Y la compactificación ***inducida*** por el embebimiento h.

Demostración. Dada h, denotamos por X_0 el subespacio $h(X)$ de Z, y sea Y_0 su clausura en Z. Entonces Y_0 es un espacio de Hausdorff compacto con $\bar{X}_0 = Y_0$; de esta forma Y_0 es una compactificación de X_0.

Ahora construimos un espacio Y conteniendo a X tal que el par (X, Y) es homeomorfo al par (X_0, Y_0). Elijamos un conjunto A disjunto de X que esté en correspondencia biyectiva con el conjunto $Y_0 - X_0$ bajo alguna aplicación $k : A \to Y_0 - X_0$. Definimos $Y = X \cup A$ y una correspondencia biyectiva $H : Y \to Y_0$ por la regla

$$H(x) = h(x) \qquad \text{para } x \in X,$$
$$H(a) = k(a) \qquad \text{para } a \in A.$$

A continuación definimos la siguiente topología en Y: un conjunto U es abierto en Y si, y sólo si, $H(U)$ es abierto en Y_0. La aplicación H es de manera automática un homeomorfismo, y el espacio X es un subespacio de Y porque H coincide con el homeomorfismo h cuando lo restringimos al subespacio X de Y. Expandiendo el rango de H, obtenemos el embebimiento requerido de Y en Z.

Ahora supongamos que Y_i es una compactificación de X y que $H_i : Y_i \to Z$ es un embebimiento, siendo además una extensión de h para $i = 1, 2$. Entonces H_i aplica X sobre $h(X) = X_0$. Como H_i es continua, debe aplicar Y_i en $\bar{X}_0$; como $H_i(Y_i)$ contiene a X_0 y es cerrado (ya que es compacto), contiene a $\bar{X}_0$. Por tanto, $H_i(Y_i) = \bar{X}_0$, y $H_2^{-1} \circ H_1$ define un homeomorfismo de Y_1 con Y_2 que coincide con la identidad en X. ∎

En general, existen distintas maneras de compactificar un espacio dado X. Consideremos, por ejemplo, las siguientes compactificaciones del intervalo abierto $X = (0, 1)$:

EJEMPLO 1. Considere el círculo unidad S^1 en $\mathbb{R}^2$ y sea $h : (0,1) \to S^1$ la aplicación

$$h(t) = (\cos 2\pi t) \times (\operatorname{sen} 2\pi t).$$

La compactificación inducida por el embebimiento h es equivalente a la compactificación por un punto de X.

EJEMPLO 2. Sea Y el espacio $[0, 1]$. Entonces Y es una compactificación de X; se obtiene "añadiendo un punto en cada extremo del intervalo $(0, 1)$".

podríamos usarlas como funciones coordenadas de un embebimiento de $(0,1)$ en $\mathbb{R}^J$ para algún J, y de esta forma obtener una compactificación por la cual cada función de la colección sea extensible.

Esta idea es básica a la hora de construir la compactificación de Stone-Čech. Ésta se define del siguiente modo:

Teorema 38.2. *Sea X un espacio completamente regular. Existe una compactificación Y de X con la propiedad de que cada función acotada y continua $f : X \to \mathbb{R}$ se extiende de forma única a una función continua de Y en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ la colección de todas las funciones reales acotadas y continuas en X, indexadas por algún conjunto J. Para cada $\alpha \in J$, elegimos un intervalo cerrado I_α en $\mathbb{R}$ que contenga a $f_\alpha(X)$, como por ejemplo,

$$I_\alpha = [\text{ínf}\, f_\alpha(X), \sup f_\alpha(X)].$$

A continuación, definimos $h : X \to \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$ por la regla

$$h(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}.$$

Por el teorema de Tychonoff, el producto $\prod I_\alpha$ es compacto. Como X es completamente regular, la colección $\{f_\alpha\}$ separa puntos de conjuntos cerrados en X. De esta forma, por el Teorema 34.2 la aplicación h es un embebimiento.

Sea Y la compactificación de X inducida por el embebimiento h. Entonces existe un embebimiento $H : Y \to \prod I_\alpha$ que coincide con h en el subespacio X de Y. Dada una función real continua y acotada f en X, vamos a mostrar cómo se extiende a Y. La función f pertenece a la colección $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$, por tanto coincide con f_β para algún índice β. Sea $\pi_\beta : \prod I_\alpha \to I_\beta$ la aplicación proyección. Entonces la aplicación continua $\pi_\beta \circ H : Y \to I_\beta$ es la extensión buscada de f, ya que si $x \in X$, tenemos

$$\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha\in J}) = f_\beta(x).$$

La unicidad de esta extensión es una consecuencia del lema siguiente: ■

Lema 38.3. *Sea $A \subset X$ y $f : A \to Z$ una aplicación continua de A en el espacio de Hausdorff Z. Entonces existe a lo más una extensión de f a una función continua $g : \bar{A} \to Z$.*

Demostración. Este lema fue propuesto como ejercicio en §18 donde dimos una demostración. Supongamos que $g, g' : \bar{A} \to X$ son dos extensiones distintas de f; elijamos x tal que $g(x) \neq g'(x)$. Sean U y U' dos entornos disjuntos de $g(x)$ y $g'(x)$, respectivamente. Elegimos un entorno V de x tal que $g(V) \subset U$ y $g'(V) \subset U'$. Ahora, V interseca a A en algún punto y; entonces $g(y) \in U$ y $g'(y) \in U'$. Pero

como $y \in A$, tenemos $g(y) = f(y)$ y $g'(y) = f(y)$. Esto contradice el hecho de que U y U' son disjuntos. ■

Teorema 38.4. *Sea X un espacio completamente regular y sea Y una compactificación de X que satisface la propiedad de extensión del Teorema 38.2. Dada cualquier aplicación continua $f : X \to C$ de X en un espacio de Hausdorff compacto C, la aplicación f se extiende de forma única a una aplicación continua $g : Y \to C$.*

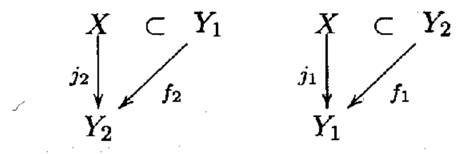
Demostración. Observemos que C es completamente regular, de modo que puede ser embebido en $[0,1]^J$ para algún J. Así, podemos también asumir que $C \subset [0,1]^J$. Entonces cada función componente f_α de la aplicación f es una función real continua y acotada en X; por hipótesis, f_α puede ser extendida a una función continua g_α de Y en $\mathbb{R}$. Definimos $g : Y \to \mathbb{R}^J$ como $g(y) = (g_\alpha(y))_{\alpha\in J}$; entonces g es continua ya que $\mathbb{R}^J$ tiene la topología producto. Además, g aplica Y en el subespacio C de $\mathbb{R}^J$ ya que la continuidad de g implica que

$$g(Y) = g(\bar{X}) \subset \overline{g(X)} = \overline{f(X)} \subset \bar{C} = C.$$

Así, g es la extensión buscada de f. ■

Teorema 38.5. *Sea X un espacio completamente regular. Si Y_1 e Y_2 son dos compactificaciones de X que satisfacen la propiedad de extensión del Teorema 38.2, entonces Y_1 e Y_2 son equivalentes.*

Demostración. Consideremos la aplicación inclusión $j_2 : X \to Y_2$. Ésta es una aplicación continua de X en el espacio compacto de Hausdorff Y_2. Como Y_1 tiene la propiedad de extensión, podemos, por el teorema anterior, extender j_2 a una función continua $f_2 : Y_1 \to Y_2$. De forma análoga, podemos extender la aplicación inclusión $j_1 : X \to Y_1$ a una aplicación continua $f_1 : Y_2 \to Y_1$ (ya que Y_2 tiene la propiedad de extensión e Y_1 es un espacio compacto de Hausdorff).



La composición $f_1 \circ f_2 : Y_1 \to Y_1$ tiene la propiedad de que para cada $x \in X$, se tiene $f_1(f_2(x)) = x$. Por lo tanto, $f_1 \circ f_2$ es una extensión continua de la aplicación identidad $i_X : X \to X$. Pero la aplicación identidad de Y_1 es también una extensión continua de i_X. Por la unicidad de las extensiones (Lema 38.3), $f_1 \circ f_2$ debe ser igual a la aplicación identidad de Y_2. Así f_1 y f_2 son homeomorfismos. ■

Definición. Para cada espacio completamente regular X elegimos, de aquí en adelante, una compactificación de X verificando la condición de extensión del Teorema 38.2. Representaremos esta compactificación de X por $\beta(X)$ y la llamaremos ***compactificación de Stone-Čech*** de X. Se caracteriza por el hecho de que cualquier aplicación continua $f : X \to C$ de X en un espacio de Hausdorff compacto C se extiende de forma única a una aplicación continua $g : \beta(X) \to C$.

Ejercicios

1. Compruebe las afirmaciones hechas en el Ejemplo 4.
2. Demuestre que la función continua acotada $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos(1/x)$ no puede extenderse a la compactificación del Ejemplo 3. Defina un embebimiento $h : (0, 1) \to [0, 1]^3$ tal que las funciones x, $\operatorname{sen}(1/x)$ y $\cos(1/x)$ sean extendibles a la compactificación inducida por h.
3. ¿Bajo qué condiciones un espacio metrizable tiene una compactificación metrizable?
4. Sea Y una compactificación arbitraria de X y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Demuestre que existe una aplicación sobreyectiva continua y cerrada $g : \beta(X) \to Y$ que es igual a la identidad sobre X.

   [Este ejercicio muestra de forma precisa lo que se quiere decir al escribir que $\beta(X)$ es la "compactificación" maximal de X. Demuestre que toda compactificación de X es equivalente a un espacio cociente de $\beta(X)$.]
5. (a) Demuestre que toda función real continua definida sobre S_Ω es "finalmente constante". [*Indicación*: demuestre en primer lugar que, para cada ϵ, existe un elemento α de S_Ω tal que $|f(\beta) - f(\alpha)| < \epsilon$ para todo $\beta > \alpha$. Sea entonces $\epsilon = 1/n$ para $n \in \mathbb{Z}_+$ y considere los correspondientes puntos α_n.]

   (b) Demuestre que la compactificación por un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.

   (c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación por un punto.
6. Sea X un espacio completamente regular. Demuestre que X es conexo si, y sólo si, $\beta(X)$ es conexo. [*Indicación*: si $X = A \cup B$ es una separación de X, sea $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) = 1$ para $x \in B$.]
7. Sea X un espacio discreto y considere el espacio $\beta(X)$.

   (a) Demuestre que si $A \subset X$, entonces $\bar{A}$ y $\overline{X - A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.

(b) Demuestre que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\bar{U}$ también es abierto en $\beta(X)$.

(c) Demuestre que $\beta(X)$ es totalmente disconexo.

8. Demuestre que $\beta(\mathbb{Z}_+)$ tiene cardinal, al menos, tan grande como I^I, donde $I = [0, 1]$. [*Indicación*: el espacio I^I tiene un subconjunto numerable denso.]

9. (a) Si X es normal e y es un punto de $\beta(X) - X$, demuestre que y no puede ser el límite de una sucesión de puntos de X.

(b) Demuestre que si X es completamente regular y no compacto, entonces $\beta(X)$ no es metrizable.

10. Hemos construido una correspondencia $X \to \beta(X)$ que asigna a cada espacio completamente regular su compactificación de Stone-Čech. Ahora asignemos, a cada aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios completamente regulares, la única aplicación continua $\beta(f) : \beta(X) \to \beta(Y)$ que extiende la aplicación $i \circ f$, donde $i : Y \to \beta(Y)$ es la inclusión. Verifique lo siguiente:

(i) Si $1_X : X \to X$ es la aplicación identidad de X, entonces $\beta(1_X)$ es la aplicación identidad de $\beta(X)$.

(ii) Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces $\beta(g \circ f) = \beta(g) \circ \beta(f)$.

Estas propiedades nos aseguran que la correspondencia que hemos construido es lo que se conoce como ***funtor***; es un funtor de la "categoría" de los espacios completamente regulares y las aplicaciones continuas de tales espacios, a la "categoría" de los espacios de Hausdorff compactos y las aplicaciones continuas entre éstos. Verá de nuevo estas propiedades en la Parte II del libro puesto que son fundamentales en álgebra y en topología algebraica.

Capítulo 6

Paracompacidad y teoremas de metrización

El teorema de metrización de Urysohn, estudiado en el Capítulo 4, fue el primer paso hacia la consecución de una respuesta a la pregunta: ¿cuándo es metrizable un espacio topológico? Este teorema nos proporciona condiciones bajo las cuales un espacio X es metrizable: que sea regular y tenga una base numerable. Sin embargo, los matemáticos nunca están satisfechos con un teorema si existe alguna esperanza de demostrar un resultado más fuerte. En este caso, se puede mejorar el teorema encontrando condiciones necesarias y suficientes sobre X para que sea metrizable, es decir, condiciones *equivalentes* a la metrizabilidad de X.

Sabemos que la hipótesis de regularidad en el teorema de metrización de Urysohn es necesaria, en cambio la condición de existencia de una base numerable no lo es. De manera que el camino obvio que debemos seguir es intentar reemplazar la condición de existencia de una base numerable por otra más débil. Encontrar dicha condición es una tarea delicada. Ésta tiene que ser lo suficientemente fuerte para implicar metrizabilidad y lo suficientemente débil para que todos los espacios metrizables la satisfagan. En una situación como ésta, descubrir la hipótesis adecuada es más de la mitad del trabajo.

La condición que fue formulada por casualidad de forma independiente por J. Nagata e Y. Smirnov, involucra la noción nueva de finitud local. Decimos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio X es *localmente finita* si todo punto de X tiene un entorno que interseca sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

Por otro lado, una forma de expresar la condición de que la base $\mathcal{B}$ es numerable es decir que $\mathcal{B}$ se puede escribir como

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{B}_n,$$

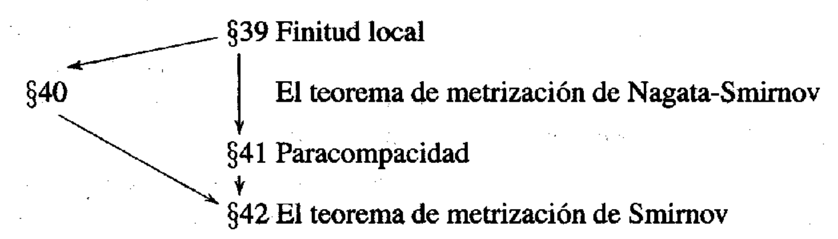
donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es finita. Ésta es una manera poco ortodoxa de decir que $\mathcal{B}$ es numerable, pero sugiere cómo formular una versión más débil de la misma. La condición de Nagata-Smirnov no es más que requerir que la base $\mathcal{B}$ pueda expresarse de la forma

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{B}_n,$$

donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es *localmente* finita. Decimos entonces que la colección $\mathcal{B}$ es *numerablemente localmente finita*. Sorprendentemente esta condición, junto con la de regularidad, es necesaria y suficiente para la metrizabilidad de X, lo cual será demostrado en este capítulo.

Hay otro concepto en topología que involucra la noción de finitud local. Éste es una generalización del concepto de compacidad denominado "paracompacidad". A pesar del origen medianamente reciente, este concepto ha demostrado ser muy útil en numerosas partes de las matemáticas. En este capítulo introducimos dicho concepto, el cual nos va a permitir dar otro conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que un espacio X sea metrizable. Concretamente, X es metrizable si, y sólo, si X es paracompacto y localmente metrizable, como demostraremos en §42.

Algunas de las secciones de este capítulo son independientes entre sí. La dependencia entre ellas se expresa en el siguiente diagrama:



§39 Finitud local

En esta sección probaremos algunas propiedades elementales de las colecciones localmente finitas y un lema de gran importancia sobre espacios metrizables.

Definición. Sea X un espacio topológico. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que es ***localmente finita*** en X si todo punto de X tiene un entorno que interseca sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

EJEMPLO 1. La colección de intervalos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

es localmente finita en el espacio topológico $\mathbb{R}$, como fácilmente se puede comprobar. Por otro lado, la colección

$$\mathcal{B} = \{(0, 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

es localmente finita en $(0,1)$ pero no en $\mathbb{R}$. Esto mismo ocurre con la colección

$$\mathcal{C} = \{(1/(n+1), 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Lema 39.1. *Sea $\mathcal{A}$ una colección localmente finita de subconjuntos de X. Entonces:*

(a) *Cualquier subcolección de $\mathcal{A}$ es localmente finita.*

(b) *La colección $\mathcal{B} = \{\bar{A}\}_{A\in\mathcal{A}}$ formada por las clausuras de los elementos de $\mathcal{A}$ es localmente finita.*

(c) $\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \bar{A}$.

Demostración. La afirmación (a) es trivial. Para probar (b), observemos que cualquier abierto U que interseca al conjunto $\bar{A}$ necesariamente interseca a A. Por lo tanto, si U es un entorno de x que interseca sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$ entonces U puede intersecar, a lo sumo, el mismo número de conjuntos de la colección $\mathcal{B}$ (podría intersecar menos conjuntos de $\mathcal{B}$ dado que $\bar{A}_1$ y $\bar{A}_2$ pueden ser iguales aunque A_1 y A_2 no lo sean).

Para demostrar la afirmación (c), denotemos por Y la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ dada por

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = Y.$$

En general, siempre se tiene $\bigcup \bar{A} \subset \bar{Y}$. Probemos la inclusión inversa utilizando la hipótesis de finitud local. Sea $x \in \bar{Y}$ y U un entorno de x que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$, pongamos que son $A_1, \ldots, A_k$. Veamos que x pertenece a uno de los conjuntos $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_k$ y, por tanto, pertenece a $\bigcup \bar{A}$. En caso contrario, el conjunto $U - \bar{A}_1 - \cdots - \bar{A}_k$ sería un entorno de x que no interseca a ningún elemento de $\mathcal{A}$ y, por consiguiente, no interseca a Y, lo cual es una contradicción con el hecho de que $x \in \bar{Y}$. ■

Existe un concepto análogo al de finitud local para una familia indexada de subconjuntos de X. La familia indexada $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ se dice que es una ***familia indexada localmente finita*** en X si todo punto $x \in X$ tiene un entorno que interseca a los A_α sólo para un cantidad finita de valores de α. ¿Cuál es la relación entre las dos formulaciones de finitud local? Es fácil ver que $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia indexada localmente finita si, y sólo si, es localmente finita como una *colección* de conjuntos y cada subconjunto no vacío A de X es igual a A_α a lo sumo para una cantidad finita de valores de α.

Nos interesaremos por las familias indexadas localmente finitas en §41, donde trabajaremos con particiones de la unidad.

Definición. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se dice que es ***numerablemente localmente finita*** si $\mathcal{B}$ puede escribirse como una unión numerable de colecciones localmente finitas $\mathcal{B}_n$.

La mayoría de los autores usan el término "σ-localmente finita" para este concepto. La letra σ se toma de la teoría de la medida y se utiliza con el significado "unión numerable de". Obsérvese que las colecciones numerables y las colecciones localmente finitas son numerablemente localmente finitas.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos del espacio X. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se dice que es un ***refinamiento*** de $\mathcal{A}$ (o que ***refina*** $\mathcal{A}$) si para cada elemento B de $\mathcal{B}$ existe un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a B. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos abiertos, llamamos a $\mathcal{B}$ un ***refinamiento abierto*** de $\mathcal{A}$; si son conjuntos cerrados, llamamos a $\mathcal{B}$ un ***refinamiento cerrado***.

Lema 39.2. *Sea X un espacio metrizable. Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X, entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{E}$ de X que refina $\mathcal{A}$ y es numerablemente localmente finito.*

Demostración. Para probarlo, vamos a utilizar el teorema de la buena ordenación. Elijamos un buen orden $<$ para la colección $\mathcal{A}$ y denotemos genéricamente los elementos de $\mathcal{A}$ por las letras $U, V, W, \ldots$

Escojamos una distancia para X. Sea n un entero positivo, fijo por el momento. Dado un elemento U de $\mathcal{A}$, definamos $S_n(U)$ como el subconjunto de U obtenido "recortando" U una distancia de $1/n$. De una forma más precisa, sea

$$S_n(U) = \{x \mid B(x, 1/n) \subset U\}.$$

(Observemos que $S_n(U)$ es un conjunto cerrado, aunque esto no es importante para nuestros propósitos.) Ahora utilizamos el buen orden $<$ de $\mathcal{A}$ para conseguir un conjunto aún más pequeño. Para cada U de $\mathcal{A}$, definamos

$$T_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V<U} V.$$

La situación donde $\mathcal{A}$ está formado por tres conjuntos $U < V < W$ se muestra en la Figura 39.1. Precisamente, como sugiere la figura, los conjuntos que hemos construido son disjuntos.

De hecho, están separados por una distancia de al menos $1/n$. Esto significa que si V y W son elementos distintos de $\mathcal{A}$, entonces $d(x, y) \geq 1/n$ para todo $x \in T_n(V)$ e $y \in T_n(W)$.

Para probarlo, podemos suponer que $V < W$. Dado que x está en $T_n(V)$, también x está en $S_n(V)$ y, por tanto, $B(x, 1/n)$ está contenido en V. Por otro lado, como $V < W$ e y pertenece a $T_n(W)$, por la definición de este último conjunto, y no está en el conjunto V. Se deduce entonces que y no pertenece al entorno $B(x, 1/n)$ de x.

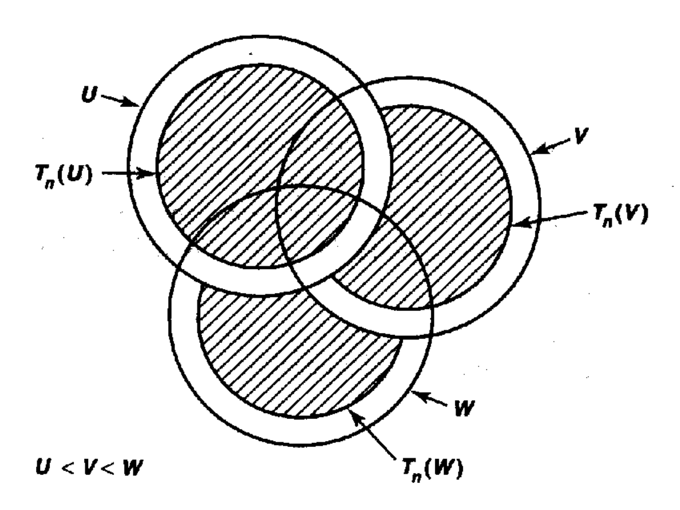


Figura 39.1

Los conjuntos $T_n(U)$ no son todavía los que estamos buscando, ya que no sabemos si son conjuntos abiertos (de hecho, son cerrados). Así, vamos a dilatar ligeramente cada uno de estos conjuntos para obtener conjuntos abiertos $E_n(U)$. Concretamente, sea $E_n(U)$ el entorno de $T_n(U)$ de radio $1/3n$, es decir, sea $E_n(U)$ la unión de todas la bolas abiertas $B(x, 1/3n)$ con $x \in T_n(U)$.

En el caso $U < V < W$, tenemos la situación representada en la Figura 39.2. Como la figura sugiere, los conjuntos que hemos construido son disjuntos. Efectivamente, si V y W son elementos distintos de $\mathcal{A}$, podemos asegurar que $d(x, y) \geq 1/3n$ para todo $x \in E_n(V)$ e $y \in E_n(W)$. Este hecho se sigue directamente de la desigualdad triangular. Observemos que, para cada $V \in \mathcal{A}$, el conjunto $E_n(V)$ está contenido en V.

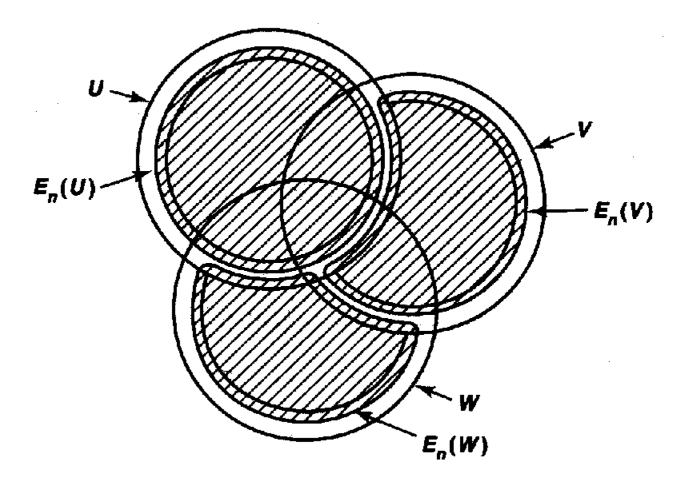


Figura 39.2

Definamos ahora

$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) \mid U \in \mathcal{A}\}.$$

Vamos a probar que $\mathcal{E}_n$ es una colección localmente finita de conjuntos abiertos que refina $\mathcal{A}$. El hecho de que $\mathcal{E}_n$ refine $\mathcal{A}$ se deduce de que $E_n(V) \subset V$, para cada $V \in \mathcal{A}$. Por otro lado, que la colección $\mathcal{E}_n$ sea localmente finita se debe a que, para cualquier punto x de X, la bola abierta de centro x y radio $1/6n$ interseca como máximo a *un* elemento de $\mathcal{E}_n$.

Desde luego, la colección $\mathcal{E}_n$ no recubrirá todo X (la Figura 39.2 ilustra este hecho). Sin embargo, aseguramos que la colección

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_n$$

sí cubre todo X.

Sea x un punto de X. Dado que la colección $\mathcal{A}$ con la cual comenzamos cubre X y debido al buen orden de $<$, existe un primer elemento U de $\mathcal{A}$ que contiene al punto x. Como U es abierto, podemos escoger n tal que $B(x, 1/n) \subset U$. Entonces, por definición, $x \in S_n(U)$. Como U es el primer elemento de $\mathcal{A}$ que contiene a x, el punto x pertenece a $T_n(U)$ y, por tanto, x también está en el elemento $E_n(U)$ de $\mathcal{E}_n$, como deseábamos probar. ■

Ejercicios

1. Compruebe las afirmaciones del Ejemplo 1.
2. Encuentre un cubrimiento abierto puntualmente finito $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ que no sea localmente finito (la colección $\mathcal{A}$ es *puntualmente finita* si cada punto de $\mathbb{R}$ pertenece sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$).
3. Dé un ejemplo de una colección de conjuntos $\mathcal{A}$ que no sea localmente finita y, sin embargo, la colección $\mathcal{B} = \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ sí lo sea.
4. Sea $\mathcal{A}$ la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

De las siguientes colecciones, ¿cuáles refinan $\mathcal{A}$?

$$\mathcal{B} = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{(n, n+\tfrac{3}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{D} = \{(x, x+\tfrac{3}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

5. Demuestre que si X tiene una base numerable, una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es numerablemente localmente finita si, y sólo si, es numerable.
6. Considere $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme. Dado n, sea $\mathcal{B}_n$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^\omega$ de la forma $\prod A_i$, donde $A_i = \mathbb{R}$ para $i \leq n$ y A_i es igual a $\{0\}$ o $\{1\}$ en otro caso. Demuestre que la colección $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ es numerablemente localmente finita, pero no es numerable ni localmente finita.

§40 El teorema de metrización de Nagata-Smirnov

En esta sección vamos a probar que la regularidad de X y la existencia de una base numerablemente localmente finita para X son equivalentes a la metrizabilidad de X.

La demostración de que estas dos condiciones implican metrizabilidad sigue muy de cerca la segunda prueba que dimos del teorema de metrización de Urysohn. En aquella demostración construimos una aplicación del espacio X en $\mathbb{R}^\omega$ que resultaba ser un embebimiento relativo a la distancia uniforme $\bar{\rho}$ en $\mathbb{R}^\omega$. A continuación, pasamos a revisar los principales elementos de la prueba. El primer paso fue demostrar que todo espacio regular X con una base numerable es normal. El segundo paso fue construir una colección numerable $\{f_n\}$ de funciones reales definidas sobre X las cuales separaban puntos de conjuntos cerrados. El tercer paso consistió en utilizar las funciones f_n para definir un embebimiento de X en el espacio producto $\mathbb{R}^\omega$. Finalmente, el cuarto paso fue mostrar que si $f_n(x) \leq 1/n$ para todo x, entonces esta aplicación realmente es un embebimiento de X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$.

Con el fin de probar el teorema de metrización generalizado, es necesario extender cada uno de estos pasos. En primer lugar, demostraremos que un espacio regular X con una base que es numerablemente localmente finita es normal. En segundo lugar, construiremos una colección de funciones reales $\{f_\alpha\}$ sobre X que separa puntos de conjuntos cerrados. En tercer lugar, utilizaremos estas funciones para embeber X en el espacio producto $\mathbb{R}^J$, para algún conjunto J. Y finalmente, probaremos que si las funciones f_α son lo suficientemente pequeñas, esta aplicación realmente embebe X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$.

Antes de comenzar, necesitamos recordar la noción de conjunto G_δ, la cual ya fue introducida en los ejercicios.

Definición. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es un ***conjunto*** G_δ en X si es igual a la intersección de una colección numerable de subconjuntos abiertos de X.

EJEMPLO 1. Cada subconjunto abierto de X es un conjunto G_δ trivialmente. En un espacio de Hausdorff y 1AN, cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ. El subconjunto unipuntual $\{\Omega\}$ de $\bar{S}_\Omega$ no es un conjunto G_δ, como puede comprobar.

EJEMPLO 2. En un espacio métrico X, cada conjunto cerrado es un G_δ. Dado $A \subset X$, denotemos por $U(A,\epsilon)$ el ϵ-entorno de A. Si A es cerrado, puede comprobar que

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} U(A, 1/n).$$

Lema 40.1. *Sea X un espacio regular con una base $\mathcal{B}$ que es numerablemente localmente finita. Entonces X es normal y todo subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ en X.*

Demostración. *Paso 1.* Sea W un abierto en X. Vamos a probar que existe una colección numerable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos de X tal que

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n.$$

Dado que la base $\mathcal{B}$ para X es numerablemente localmente finita, podemos escribir $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Sea $\mathcal{C}_n$ la colección formada por los elementos básicos B tales que $B \in \mathcal{B}_n$ y $\bar{B} \subset W$. Entonces $\mathcal{C}_n$ es localmente finita por ser una subcolección de $\mathcal{B}_n$. Definamos

$$U_n = \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} B.$$

Entonces U_n es un conjunto abierto y, por el Lema 39.1,

$$\bar{U}_n = \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} \bar{B}.$$

Por lo tanto $\bar{U}_n \subset W$, de manera que

$$\bigcup U_n \subset \bigcup \bar{U}_n \subset W.$$

Podemos asegurar que se da la igualdad. Fijado $x \in W$, por la regularidad, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $\bar{B} \subset W$. Ahora bien, existe un n tal que $B \in \mathcal{B}_n$. Entonces $B \in \mathcal{C}_n$ por definición, y así $x \in U_n$. Por lo tanto $W \subset \bigcup U_n$, como deseábamos probar.

Paso 2. Vamos a demostrar que todo conjunto cerrado C en X es un conjunto G_δ en X. Dado C, sea $W = X - C$. Por el Paso 1, existen conjuntos U_n en X tales que $W = \bigcup \bar{U}_n$. Entonces

$$C = \bigcap (X - \bar{U}_n)$$

de forma que C es igual a la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos de X.

Paso 3. Vamos a probar que X es normal. Sean C y D conjuntos cerrados y disjuntos en X. Aplicando el Paso 1 al conjunto abierto $X - D$, construimos una

colección numerable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos tal que $\bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n = X - D$. Entonces $\{U_n\}$ recubre C y cada conjunto $\bar{U}_n$ es disjunto con D. De manera similar, existe un cubrimiento numerable $\{V_n\}$ de D por conjuntos abiertos cuyas clausuras son disjuntas con C.

Volvemos ahora a la misma situación en la que nos encontrábamos al demostrar que un espacio regular con una base numerable es normal (Teorema 32.1). Podemos repetir la prueba *palabra por palabra*. Definamos

$$U_n' = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \qquad \text{y} \qquad V_n' = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i.$$

Entonces los conjuntos

$$U' = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n' \qquad \text{y} \qquad V' = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} V_n'$$

son abiertos disjuntos que contienen a C y D, respectivamente. ∎

Lema 40.2. *Sea X un espacio normal y sea A un conjunto cerrado G_δ en X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) > 0$ para todo $x \notin A$.*

Demostración. Esta propiedad la planteamos como un ejercicio en §33; la prueba la realizaremos ahora. Escribamos A como la intersección de los conjuntos abiertos U_n, $n \in \mathbb{Z}_+$. Para cada n, elijamos una función continua $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in X - U_n$. Definamos $f(x) = \sum f_n(x)/2^n$. La serie converge uniformemente, como se comprueba comparándola con $\sum 1/2^n$. Por lo tanto, f es continua, se anula en A y es positiva en $X - A$. ∎

Teorema 40.3 (Teorema de metrización de Nagata-Smirnov). *Un espacio X es metrizable si, y sólo si, X es regular y tiene una base numerablemente localmente finita.*

Demostración. *Paso 1.* Supongamos que X es regular y tiene una base numerablemente localmente finita $\mathcal{B}$. Entonces X es normal y todo conjunto cerrado en X es un conjunto G_δ en X. Vamos a probar que X es metrizable embebiendo X en el espacio métrico $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$, para algún conjunto J.

Sea $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Para cada entero positivo n y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$, elijamos una función continua

$$f_{n,B} : X \longrightarrow [0, 1/n]$$

tal que $f_{n,B}(x) > 0$ para todo $x \in B$ y $f_{n,B}(x) = 0$ para todo $x \notin B$. La colección $\{f_{n,B}\}$ separa puntos de conjuntos cerrados en X. En efecto, dado un punto x_0 y

un entorno U de x_0, existe un elemento básico B tal que $x_0 \in B \subset U$. Entonces $B \in \mathcal{B}_n$ para algún n, de manera que $f_{n,B}(x_0) > 0$ y $f_{n,B}$ se anula fuera de U.

Sea J el subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{B}$ formado por todos los pares (n, B) tales que B es un elemento de $\mathcal{B}_n$. Definamos

$$F : X \longrightarrow [0,1]^J$$

por la ecuación

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J}.$$

Considerando la topología producto en $[0,1]^J$, la aplicación F es un embebimiento por el Teorema 34.2.

Dotemos ahora a $[0,1]^J$ con la topología inducida por la distancia uniforme y mostremos que F es un embebimiento relativo a esta topología. Aquí es donde se utiliza la condición $f_{n,B}(x) < 1/n$. La topología uniforme es más fina que la topología producto. Por lo tanto, relativo a la distancia uniforme, la aplicación F es inyectiva y lleva conjuntos abiertos de X sobre conjuntos abiertos del espacio imagen $Z = F(X)$. Debemos dar una demostración por separado de que F es continua.

Observemos que en el subespacio $[0,1]^J$ de $\mathbb{R}^J$, la distancia uniforme es igual a la distancia

$$\rho((x_\alpha), (y_\alpha)) = \sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}.$$

Para probar la continuidad, tomemos un punto x_0 de X y un número $\epsilon > 0$ con el fin de encontrar un entorno W de x_0 tal que

$$x \in W \Longrightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon.$$

Fijemos n por el momento. Elijamos un entorno U_n de x_0 que interseque sólo a un número finito de elementos de la colección $\mathcal{B}_n$. Esto significa que, como B recorre todo $\mathcal{B}_n$, todas salvo un número finito de las funciones $f_{n,B}$ son idénticamente nulas en U_n. Dado que cada función $f_{n,B}$ es continua, podemos ahora elegir un entorno V_n de x_0 contenido en U_n en el cual cada una de las funciones restantes $f_{n,B}$, para $B \in \mathcal{B}_n$, varía a lo más $\epsilon/2$.

Elijamos dicho entorno V_n de x_0 para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Entonces escogemos N de forma que $1/N \leq \epsilon/2$ y definimos $W = V_1 \cap \cdots \cap V_N$. Aseguramos que W es el entorno deseado de x_0. Sea $x \in W$; si $n \leq N$, entonces

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \epsilon/2$$

ya que si la función $f_{n,B}$ no se anula idénticamente entonces varía a lo más $\epsilon/2$ sobre W. Si $n > N$, entonces

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq 1/n < \epsilon/2$$

ya que $f_{n,B}$ aplica X en $[0, 1/n]$. Por lo tanto,

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

como deseábamos probar.

Paso 2. A continuación, vamos a demostrar el recíproco. Si suponemos que X es metrizable, entonces sabemos que X es regular. Vamos a probar que X tiene una base numerablemente localmente finita.

Elijamos una distancia para X. Dado m, sea $\mathcal{A}_m$ el cubrimiento de X formado por todas las bolas abiertas de radio $1/m$. Por el Lema 39.2, existe un recubrimiento abierto $\mathcal{B}_m$ de X que refina $\mathcal{A}_m$ y tal que $\mathcal{B}_m$ es numerablemente localmente finito. Observemos que cada elemento de $\mathcal{B}_m$ tiene diámetro a lo sumo igual a $2/m$. Sea $\mathcal{B}$ la unión de las colecciones $\mathcal{B}_m$, para $m \in \mathbb{Z}_+$. Dado que cada colección $\mathcal{B}_m$ es numerablemente localmente finita, también lo es $\mathcal{B}$. Vamos a probar que $\mathcal{B}$ es una base para X.

Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, veamos que existe un elemento B de $\mathcal{B}$ que contiene a x y que está contenido en $B(x, \epsilon)$. Elijamos primero m de forma que $1/m < \epsilon/2$. Entonces, como $\mathcal{B}_m$ recubre X, podemos encontrar un elemento B de $\mathcal{B}_m$ que contiene al punto x. Dado que B contiene a x y tiene diámetro a lo sumo $2/m < \epsilon$, deducimos que B está contenido en $B(x, \epsilon)$, como deseábamos probar. ■

Ejercicios

1. Compruebe los detalles de los Ejemplos 1 y 2.

2. Un subconjunto W de X se dice que es un "conjunto F_σ" en X si W es una unión numerable de conjuntos cerrados de X. Pruebe que W es un conjunto F_σ en X si, y sólo si, $X - W$ es un conjunto G_δ en X.

   [La terminología viene del francés. La letra "F" viene de "fermé" que significa "cerrado" y la letra "σ" de "somme" que significa "unión".]

3. Muchos espacios tienen bases *numerables*, pero ningún espacio T_1 tiene una base *localmente finita* a menos que sea discreto. Pruebe este hecho.

4. Encuentre un espacio que no sea discreto y que tenga una base numerablemente localmente finita pero que no tenga una base numerable.

5. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que es ***localmente discreta*** si cada punto de X tiene un entorno que interseca a lo sumo un elemento de $\mathcal{A}$. Una colección $\mathcal{B}$ es ***numerablemente localmente discreta*** (o "σ-localmente discreta") si es igual a una unión numerable de colecciones localmente discretas. Pruebe la siguiente afirmación:

Teorema (Teorema de metrización de Bing). Un espacio X es metrizable si, y sólo si, X es regular y tiene una base numerablemente localmente discreta.

§41 Paracompacidad

El concepto de paracompacidad es una de las generalizaciones más útiles del concepto de compacidad que ha sido descubierta en los últimos años. Es particularmente útil para aplicaciones en topología y geometría diferencial. Vamos a dar precisamente una aplicación, un teorema de metrización que probaremos en la siguiente sección.

Muchos de los espacios que nos son familiares son paracompactos. Por ejemplo, todo espacio compacto es paracompacto; esto será una consecuencia inmediata de la definición. También es cierto que todo espacio metrizable es paracompacto; esto es un teorema debido A. H. Stone, el cual probaremos. De modo que la clase de los espacios paracompactos incluye las dos clases más importantes de espacios que hemos estudiado. También incluye varios espacios más.

Para ver cómo la paracompacidad generaliza la compacidad, recordamos la definición de compacidad: un espacio X se dice que es *compacto* si todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X contiene una subcolección finita que recubre X. Una forma equivalente de decir esto es la siguiente:

Un espacio X es compacto si todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto finito $\mathcal{B}$ que recubre X.

Esta definición es equivalente a la usual ya que dado tal refinamiento $\mathcal{B}$, uno puede elegir para cada elemento de $\mathcal{B}$ un elemento de $\mathcal{A}$ que lo contiene. De esta forma, obtenemos una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que recubre X.

Esta nueva formulación de compacidad es un tanto complicada, pero sugiere una forma de generalizarla:

Definición. Un espacio X es ***paracompacto*** si todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{B}$ que recubre X.

Muchos autores, siguiendo la indicación de Bourbaki, incluyen como parte de la definición del concepto de *paracompacidad* la condición de que el espacio sea de Hausdorff (Bourbaki también incluye la propiedad de Hausdorff como parte de la definición del término *compacidad*). Nosotros no seguiremos esta convención.

EJEMPLO 1. *El espacio $\mathbb{R}^n$ es paracompacto*. Sean $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $B_0 = \varnothing$ y, para cada entero positivo m, sea B_m la bola abierta de radio m centrada en el origen. Dado m, elijamos una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$ que recubren $\bar{B}_m$ e intersecan cada uno al conjunto abierto $X - \bar{B}_{m-1}$; denotemos a esta colección finita de conjuntos abiertos por $\mathcal{C}_m$. Entonces la colección $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_m$ es

un refinamiento de $\mathcal{A}$. Claramente es localmente finita ya que el conjunto abierto B_m interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, concretamente aquellos elementos que pertenecen a la colección $\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_m$. Finalmente, veamos que $\mathcal{C}$ recubre X. Dado x, sea m el menor entero tal que $x \in \bar{B}_m$. Entonces x pertenece a un elemento de $\mathcal{C}_m$, por definición.

Algunas de las propiedades de un espacio paracompacto son similares a las de un espacio compacto. Por ejemplo, un subespacio de un espacio paracompacto no es necesariamente paracompacto; sin embargo, un subespacio cerrado sí lo es. También un espacio de Hausdorff paracompacto es normal; para otras propiedades, un espacio de este tipo no es similar a un espacio compacto. En particular, el producto de dos espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto. Comprobaremos estas afirmaciones a continuación.

Teorema 41.1. *Todo espacio de Hausdorff paracompacto X es normal.*

Demostración. Esta demostración es un tanto similar a la prueba de que un espacio de Hausdorff compacto es normal.

Primero probaremos la regularidad. Sean a un punto de X y B un conjunto cerrado de X disjunto con a. La condición de Hausdorff nos permite elegir, para cada b de B, un conjunto abierto U_b que contiene a b y cuya clausura no contiene al punto a. Recubramos X por los conjuntos abiertos U_b, junto con el conjunto abierto $X - B$. Tomemos un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{C}$ que recubra X. Construyamos la subcolección $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ consistente en todos los elementos de $\mathcal{C}$ que intersecan a B. Entonces $\mathcal{D}$ recubre B. Además, si $D \in \mathcal{D}$ entonces $\bar{D}$ es disjunto con a. En este caso D interseca a B, por tanto, está contenido en algún conjunto U_b cuya clausura es disjunta con a. Sea

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D;$$

entonces V es un conjunto abierto en X que contiene a B. Dado que $\mathcal{D}$ es localmente finita,

$$\bar{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bar{D},$$

de forma que $\bar{V}$ es disjunto con a. La regularidad queda así probada.

Para demostrar la normalidad sólo tenemos que repetir el mismo argumento, reemplazando a por el conjunto cerrado A y cambiando la condición de Hausdorff por la condición de regularidad. ■

Teorema 41.2. *Todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado de un espacio paracompacto X. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y. Para cada $A \in \mathcal{A}$, elijamos un conjunto abierto A' de X tal que $A' \cap Y = A$. Recubramos X por los conjuntos abiertos A', además del conjunto abierto $X - Y$. Para este cubrimiento, sea $\mathcal{B}$ un refinamiento abierto localmente finito que recubra X. Entonces, la colección

$$\mathcal{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es el refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{A}$ que buscábamos. ∎

EJEMPLO 2. *Un subespacio paracompacto de un espacio de Hausdorff X no es necesariamente cerrado en X.* Efectivamente, el intervalo abierto $(0, 1)$ es paracompacto ya que es homeomorfo a $\mathbb{R}$, sin embargo no es cerrado en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 3. *Un subespacio de un espacio paracompacto no es necesariamente paracompacto.* El espacio $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ es compacto y, por tanto, paracompacto. Sin embargo, el subespacio $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ no es paracompacto porque es de Hausdorff pero no es normal.

Para probar el importante teorema que afirma que todo espacio metrizable es paracompacto, necesitamos el siguiente lema, debido a E. Michael, el cual es también muy útil para otros propósitos.

Lema 41.3. *Sea X un espacio regular. Entonces las siguientes condiciones sobre X son equivalentes.*
Todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento que es:

(1) Un cubrimiento abierto de X numerablemente localmente finito.

(2) Un cubrimiento de X localmente finito.

(3) Un cubrimiento cerrado de X localmente finito.

(4) Un cubrimiento abierto de X localmente finito.

Demostración. Es trivial que (4) $\Rightarrow$ (1). Lo que necesitamos probar para nuestro teorema es el recíproco. Con esta finalidad, debemos ir dando los pasos (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), ineludiblemente. Es por ello que hemos enumerado por conveniencia las condiciones en el orden del lema.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $\mathcal{B}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{A}$ que recubra X y sea numerablemente localmente finito. Pongamos

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

donde cada $\mathcal{B}_n$ es localmente finito.

Aplicamos ahora esencialmente el mismo orden de pequeños arreglos que hemos utilizado anteriormente con el fin de hacer disjuntos los conjuntos de los diferentes $\mathcal{B}_n$. Dado i, pongamos

$$V_i = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y cada elemento U de $\mathcal{B}_n$, definamos

$$S_n(U) = U - \bigcup_{i<n} V_i.$$

[Observemos que $S_n(U)$ no es necesariamente abierto, ni cerrado.] Sea

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) \mid U \in \mathcal{B}_n\}.$$

Entonces $\mathcal{C}_n$ es un refinamiento de $\mathcal{B}_n$ ya que $S_n(U) \subset U$, para cada $U \in \mathcal{B}_n$.

Sea $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_n$. Afirmamos que $\mathcal{C}$ es el refinamiento localmente finito de $\mathcal{A}$ que recubre X requerido.

Sea x un punto de X. Necesitamos probar que x está contenido en un elemento de $\mathcal{C}$ y que x tiene un entorno que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$. Consideremos el cubrimiento $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ y sea N el menor entero tal que x está en un elemento de $\mathcal{B}_N$. Sea U un elemento de $\mathcal{B}_N$ que contiene a x. Primero observemos que, dado que x no pertenece a ningún elemento de $\mathcal{B}_i$, para $i < N$, el punto x pertenece al elemento $S_N(U)$ de $\mathcal{C}$. Segundo observemos que, dado que cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita, podemos elegir para cada $n = 1, \ldots, N$ un entorno W_n de x que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}_n$. Entonces si W_n interseca al elemento $S_n(V)$ de $\mathcal{C}_n$, debe intersecar al elemento V de $\mathcal{B}_n$ porque $S_n(V) \subset V$. Por lo tanto, W_n interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}_n$. Además, debido a que U está en $\mathcal{B}_N$, U no interseca ningún elemento de $\mathcal{C}_n$, para $n > N$. Como resultado, el entorno

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_N \cap U$$

de x interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos abiertos U de X tales que $\bar{U}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{A}$. Por la regularidad, $\mathcal{B}$ recubre X. Utilizando (2) podemos encontrar un refinamiento $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ que recubra X y sea localmente finito. Sea

$$\mathcal{D} = \{\bar{C} \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Entonces $\mathcal{D}$ también recubre X, es localmente finito por el Lema 39.1 y refina $\mathcal{A}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Utilizando (3), elijamos un refinamiento $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que recubra X y sea localmente finito (si lo deseamos, podemos

tomar $\mathcal{B}$ de forma que sea un refinamiento cerrado, pero esto es irrelevante). Ahora vamos a ampliar ligeramente cada elemento B de $\mathcal{B}$ a un conjunto abierto, haciendo la extensión lo suficientemente pequeña como para que la colección resultante de conjuntos abiertos siga siendo localmente finita y refine $\mathcal{A}$.

Este paso implica un nuevo método. El método previo, usado en muchas ocasiones, consistía en ordenar los conjuntos de una determinada manera y formar un nuevo conjunto restando todos los anteriores. Aquel método contraía los conjuntos, de manera que para extenderlos necesitamos algo diferente. Vamos a introducir un cubrimiento cerrado localmente finito auxiliar $\mathcal{C}$ de X y lo utilizaremos para extender los elementos de $\mathcal{B}$.

Para cada punto x de X, existe un entorno de x que interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$. La colección de todos los conjuntos abiertos que intersecan sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ es, por tanto, un cubrimiento abierto de X. Utilizando (3) de nuevo, sea $\mathcal{C}$ un refinamiento cerrado de este cubrimiento que sea localmente finito y recubra X. Cada elemento de $\mathcal{C}$ interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$.

Para cada elemento B de $\mathcal{B}$, sea

$$\mathcal{C}(B) = \{C \mid C \in \mathcal{C} \quad \text{y} \quad C \subset X - B\}.$$

Entonces definamos

$$E(B) = X - \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C.$$

Dado que $\mathcal{C}$ es una colección localmente finita de conjuntos cerrados, la unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{C}$ es un cerrado, por el Lema 39.1. Por lo tanto, el conjunto $E(B)$ es un conjunto abierto. Además, $E(B) \supset B$ por definición (véase la Figura 41.1, en la cual los elementos de $\mathcal{B}$ están representados como regiones circulares cerradas y segmentos de rectas, y los elementos de $\mathcal{C}$ están representados como regiones cuadrangulares cerradas).

Puede ocurrir que hayamos extendido demasiado cada conjunto B; la colección $\{E(B)\}$ puede no ser un refinamiento de $\mathcal{A}$, lo cual puede ser fácilmente remediado. Para cada $B \in \mathcal{B}$, elijamos un elemento $F(B)$ de $\mathcal{A}$ que contenga a B. Entonces definamos

$$\mathcal{D} = \{E(B) \cap F(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

La colección $\mathcal{D}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$. Dado que $B \subset (E(B) \cap F(B))$ y $\mathcal{B}$ recubre X, la colección $\mathcal{D}$ también recubre X.

Finalmente, tenemos que probar que $\mathcal{D}$ es localmente finita. Dado un punto x de X, escojamos un entorno W de x que interseque sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, pongamos $C_1, \ldots, C_k$. Veamos que W interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{C}$ recubre X, el conjunto W está recubierto

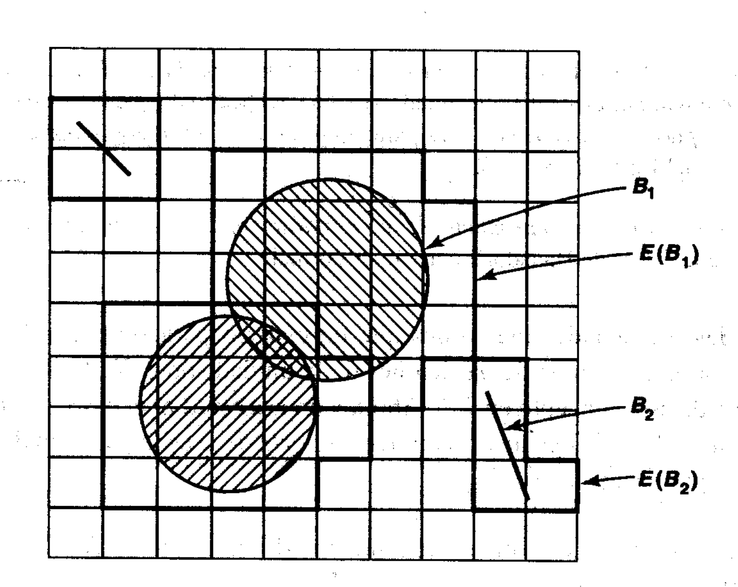


Figura 41.1

por $C_1, \ldots, C_k$. De esta forma, es suficiente probar que cada elemento C de $\mathcal{C}$ interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D}$. Así, si C interseca el conjunto $E(B) \cap F(B)$ entonces interseca a $E(B)$, por tanto, por la definición de $E(B)$, C no está contenido en $X - B$. Esto implica que C debe intersecar a B. Dado que C interseca sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$, C puede intersecar, a lo sumo, el mismo número de elementos de la colección $\mathcal{D}$. ∎

Teorema 41.4. *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable. Ya sabemos por el Lema 39.2 que, dado un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un refinamiento abierto del mismo que recubre X y es *numerablemente* localmente finito. El lema anterior implica entonces que $\mathcal{A}$ admite un refinamiento abierto que recubre X y es localmente finito. ∎

Teorema 41.5. *Todo espacio regular y de Lindelöf es paracompacto.*

Demostración. Sea X regular y de Lindelöf. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe una subcolección numerable que recubre X. Esta subcolección es de forma automática numerablemente localmente finita. Aplicando el lema anterior, resulta que $\mathcal{A}$ admite un refinamiento abierto que recubre X y es localmente finito. ∎

EJEMPLO 4. *El producto de dos espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto.* El espacio $\mathbb{R}_\ell$ es paracompacto porque es regular y de Lindelöf. Sin embargo, $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ no es paracompacto porque es de Hausdorff pero no es normal.

EJEMPLO 5. *El espacio $\mathbb{R}^\omega$ es paracompacto tanto con la topología producto como con la topología uniforme*. Este resultado se sigue del hecho de que $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable con estas topologías. No se sabe si $\mathbb{R}^\omega$ es paracompacto con la topología por cajas (véase el comentario del Ejercicio 5 de §32).

EJEMPLO 6. *El espacio producto $\mathbb{R}^J$ no es paracompacto si J no es numerable*. Esto se debe a que $\mathbb{R}^J$ es de Hausdorff pero no es normal.

Una de las propiedades más útiles que un espacio paracompacto X posee tiene que ver con la existencia de particiones de la unidad sobre X. Ya hemos visto la versión finita de este concepto en §36. Ahora vamos a estudiar el caso general. Recordemos que si $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función, el *soporte* de ϕ es la clausura del conjunto de puntos x para los cuales $\phi(x) \neq 0$.

Definición. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento abierto indexado de X. Una familia indexada de funciones continuas

$$\phi_\alpha : X \longrightarrow [0, 1]$$

se dice que es una ***partición de la unidad*** sobre X, subordinada a $\{U_\alpha\}$, si:

(1) (soporte ϕ_α) $\subset U_\alpha$, para cada α.

(2) La familia indexada {soporte ϕ_α} es localmente finita.

(3) $\sum \phi_\alpha(x) = 1$, para cada $x \in X$.

La condición (2) implica que cada $x \in X$ tiene un entorno en el cual la función ϕ_α es idénticamente nula para todos salvo para un número finito de valores de α. De esta forma, se le puede dar sentido a la "suma" indicada en (3), interpretándola como la suma de los términos $\phi_\alpha(x)$ que no son iguales a cero.

Vamos a construir ahora una partición de la unidad para un espacio de Hausdorff paracompacto arbitrario. Comenzamos probando un "lema de encogimiento", igual que hicimos para el caso finito en §36.

***Lema 41.6.** *Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de conjuntos abiertos que recubra X. Entonces existe una familia indexada localmente finita $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos abiertos que recubre X y tal que $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α.*

La condición $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α, algunas veces se expresa diciendo que la familia $\{\bar{V}_\alpha\}$ es un ***refinamiento preciso*** de la familia $\{U_\alpha\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ la colección formada por todos los conjuntos abiertos A tales que $\bar{A}$ está contenido en algún elemento de la colección $\{U_\alpha\}$. La regularidad de X implica que $\mathcal{A}$ recubre X. Dado que X es paracompacto, podemos encontrar una

colección localmente finita $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos que recubre X y refina $\mathcal{A}$. Representemos $\mathcal{B}$ como una familia indexada por un conjunto de índices K; un elemento general de $\mathcal{B}$ podemos denotarlo por B_β, para $\beta \in K$, y entonces $\{B_\beta\}_{\beta\in K}$ es una familia indexada localmente finita. Como $\mathcal{B}$ refina $\mathcal{A}$, podemos definir una función $f : K \to J$ eligiendo, para cada β de K, un elemento $f(\beta) \in J$ tal que

$$\bar{B}_\beta \subset U_{f(\beta)}.$$

Entonces para cada $\alpha \in J$, definimos V_α como la unión de los elementos de la colección

$$\mathcal{B}_\alpha = \{B_\beta \mid f(\beta) = \alpha\}.$$

(Observemos que V_α es el conjunto vacío si no existe un índice β tal que $f(\beta) = \alpha$.) Para cada elemento B_β de la colección $\mathcal{B}_\alpha$ tenemos, por definición, que $\bar{B}_\beta \subset U_\alpha$. Dado que la colección $\mathcal{B}_\alpha$ es localmente finita, $\bar{V}_\alpha$ es igual a la unión de las clausuras de los elementos de $\mathcal{B}_\alpha$, por tanto $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

Finalmente, vamos a comprobar la finitud local. Dado $x \in X$, elijamos un entorno W de x tal que W interseca a B_β sólo para una cantidad finita de valores de β, pongamos que son $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_k$. Entonces W puede intersecar a V_α sólo si α es uno de los índices $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_k)$. ■

***Teorema 41.7.** *Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento abierto indexado de X. Entonces existe una partición de la unidad sobre X subordinada a $\{U_\alpha\}$.*

Demostración. Comenzamos aplicando dos veces el lema del encogimiento para encontrar familias indexadas localmente finitas de conjuntos abiertos $\{W_\alpha\}$ y $\{V_\alpha\}$ que recubren X y tales que $\bar{W}_\alpha \subset V_\alpha$ y $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α. Dado que X es normal, podemos elegir, para cada α, una función continua $\psi_\alpha : X \to [0,1]$ tal que $\psi_\alpha(\bar{W}_\alpha) = \{1\}$ y $\psi_\alpha(X - V_\alpha) = \{0\}$. Como ψ_α es distinta de cero sólo en puntos de V_α, tenemos

$$(\text{soporte}\,\psi_\alpha) \subset \bar{V}_\alpha \subset U_\alpha.$$

Además, la familia indexada $\{\bar{V}_\alpha\}$ es localmente finita (dado que un conjunto abierto interseca $\bar{V}_\alpha$ sólo si interseca V_α). Por tanto, la familia indexada $\{\text{soporte}\,\psi_\alpha\}$ también es localmente finita. Observemos que, como $\{W_\alpha\}$ recubre X, para cualquier x, al menos una de las funciones ψ_α es positiva en x.

Tiene ahora sentido la suma formalmente infinita

$$\Psi(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x).$$

Dado que cada $x \in X$ tiene un entorno W_x que interseca al conjunto $(\text{soporte}\,\psi_\alpha)$ sólo para una cantidad finita de valores de α, podemos interpretar la suma infinita

como la suma finita de sus términos no nulos. Se sigue que la restricción de Ψ a W_x es igual a una suma finita de funciones continuas y, por consiguiente, es continua. Entonces al ser Ψ continua sobre W_x, para cada x, Ψ es continua sobre X. También Ψ es positiva, lo cual nos permite definir

$$\phi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x)/\Psi(x)$$

para obtener la partición de la unidad que deseábamos. ■

Las particiones de la unidad son utilizadas frecuentemente en matemáticas para "pegar" funciones que están definidas localmente con el fin de obtener una función definida globalmente. Su uso en §36 ilustra este proceso. A continuación, damos otra aplicación de este método.

***Teorema 41.8.** *Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X y, para cada $C \in \mathcal{C}$, sea ϵ_C un número positivo. Si $\mathcal{C}$ es localmente finita, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo x y $f(x) \leq \epsilon_C$ para $x \in C$.*

Demostración. Recubramos X por conjuntos abiertos de forma que cada uno de ellos interseque sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$; pongámosle índices a esta colección de conjuntos abiertos de manera que se convierta en una familia indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Escojamos una partición de la unidad $\{\phi_\alpha\}$ sobre X subordinada a $\{U_\alpha\}$. Dado α, sea δ_α el mínimo de los números ϵ_C, donde C recorre todos los elementos de $\mathcal{C}$ que intersecan el soporte de ϕ_α, y si no hubiera ningún elemento en estas condiciones, ponemos $\delta_\alpha = 1$. Entonces definimos

$$f(x) = \sum \delta_\alpha \phi_\alpha(x).$$

Como todos los números δ_α son positivos, también f es positiva. Vamos a comprobar que $f(x) \leq \epsilon_C$, para $x \in C$. Será suficiente probar que, para $x \in C$ y α arbitrario, tenemos

$$(*) \qquad \delta_\alpha \phi_\alpha(x) \leq \epsilon_C \phi_\alpha(x)$$

y entonces la desigualdad buscada se obtiene sumando, debido a que $\sum \phi_\alpha(x) = 1$. Si $x \notin$ soporte ϕ_α entonces la desigualdad $(*)$ es trivial porque $\phi_\alpha(x) = 0$. Y si ocurre que $x \in$ soporte ϕ_α y $x \in C$, entonces C interseca el soporte de ϕ_α, de manera que $\delta_\alpha \leq \epsilon_C$ por construcción y se satisface $(*)$. ■

Ejercicios

1. Dé un ejemplo que demuestre que el hecho de que X sea paracompacto no implica que para todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, exista una *subcolección* localmente finita de $\mathcal{A}$ que recubra X.

2. (a) Demuestre que el producto de un espacio paracompacto y un espacio compacto es paracompacto. [*Indicación:* use el lema del tubo.]
   (b) Concluya que S_Ω no es paracompacto.

3. ¿Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es paracompacto?

4. (a) Demuestre que si X tiene la topología discreta entonces X es paracompacto.
   (b) Demuestre que si $f : X \to Y$ es continua y X es paracompacto, el subespacio $f(X)$ de Y no es necesariamente paracompacto.

5. Sea X un espacio paracompacto. En esta sección hemos probado un "lema de encogimiento" para cubrimientos abiertos indexados y arbitrarios de X. Damos aquí un "lema de expansión" para familias indexadas localmente finitas y arbitrarias en X.
   Lema. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada localmente finita de subconjuntos de un espacio de Hausdorff paracompacto X. Entonces existe una familia indexada localmente finita $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de conjuntos abiertos en X tal que $B_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α.

6. (a) Sea X un espacio regular. Si X es una unión numerable de subespacios compactos de X, entonces X es paracompacto.
   (b) Demuestre que $\mathbb{R}^\infty$ es paracompacto como subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ con la topología por cajas.

*7. Sea X un espacio regular.
   (a) Si X es una unión finita de subespacios paracompactos cerrados de X, entonces X es paracompacto.
   (b) Si X es una unión numerable de subespacios paracompactos cerrados de X cuyos interiores recubren X, entonces X es paracompacto.

8. Sea $p : X \to Y$ una aplicación perfecta (véase el Ejercicio 7 de §31).
   (a) Demuestre que si Y es paracompacto entonces también lo es X. [*Indicación:* si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X, encuentre un cubrimiento abierto localmente finito de Y formado por conjuntos B tales que $p^{-1}(B)$ puede ser recubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Entonces interseque $p^{-1}(B)$ con estos elementos de $\mathcal{A}$.]
   (b) Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff paracompacto entonces también lo es Y. [*Indicación:* si $\mathcal{B}$ es un recubrimiento cerrado localmen-

te finito de X, entonces $\{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es un recubrimiento cerrado localmente finito de Y.]

9. Sea G un grupo topológico conexo y localmente compacto. Demuestre que G es paracompacto. [*Indicación:* sea U_1 un entorno de e con clausura compacta. En general, defina $U_{n+1} = \bar{U}_n \Delta U_1$. Pruebe que la unión de los conjuntos $\bar{U}_n$ es, a la vez, abierta y cerrada en G.]
Este resultado es cierto sin suponer que G es conexo, pero la demostración requiere más esfuerzo.

10. *Teorema.* *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y paracompacto, entonces cada componente de X tiene una base numerable.*
Demostración. Si X_0 es una componente de X, entonces X_0 es localmente compacto y paracompacto. Sea $\mathcal{C}$ un cubrimiento localmente finito de X_0 por conjuntos abiertos en X_0 que tienen clausuras compactas. Sea U_1 un elemento no vacío de $\mathcal{C}$ y, en general, sea U_n la unión de todos los elementos de $\mathcal{C}$ que intersecan $\bar{U}_{n-1}$. Demuestre que $\bar{U}_n$ es compacto y que los conjuntos U_n recubren X_0.

§42 El teorema de metrización de Smirnov

El teorema de metrización de Nagata-Smirnov nos da un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea metrizable. En esta sección probamos un teorema que nos ofrece otro conjunto de tales condiciones. Es un corolario del teorema de Nagata-Smirnov, el cual fue probado primero por Smirnov.

Definición. Un espacio X es ***localmente metrizable*** si todo punto x de X tiene un entorno U que es metrizable con la topología del subespacio.

Teorema 42.1 (Teorema de metrización de Smirnov). *Un espacio X es metrizable si, y sólo si, X es un espacio de Hausdorff paracompacto y localmente metrizable.*

Demostración. Supongamos que X es metrizable. Entonces X es localmente metrizable y también es paracompacto, por el Teorema 41.4.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio de Hausdorff paracompacto y localmente metrizable. Vamos a probar que X tiene una base que es numerablemente localmente finita y, dado que X es regular, entonces se deducirá, por el teorema de Nagata-Smirnov, que X es metrizable.

La demostración es una adaptación de la última parte de la prueba del Teorema 40.3. Recubramos X por conjuntos abiertos y metrizables; entonces escojamos un refinamiento $\mathcal{C}$ de este cubrimiento que sea abierto localmente finito y que recubra X. Cada elemento C de $\mathcal{C}$ es metrizable, por tanto existe una distancia $d_C : C \times C \to \mathbb{R}$

que induce la topología de C. Dado $x \in C$, sea $B_C(x, \epsilon)$ el conjunto de todos los puntos y de C tales que $d_C(x, y) < \epsilon$. Entonces $B_C(x, \epsilon)$ es abierto en X, ya que es abierto en C.

Dado $m \in \mathbb{Z}_+$, sea $\mathcal{A}_m$ el cubrimiento de X formado por todas estas bolas abiertas de radio $1/m$, concretamente,

$$\mathcal{A}_m = \{B_C(x, 1/m) \mid x \in C \text{ y } C \in \mathcal{C}\}.$$

Sea $\mathcal{D}_m$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{A}_m$ que recubra X (aquí es donde usamos la paracompacidad). Sea $\mathcal{D}$ la unión de las colecciones $\mathcal{D}_m$. Entonces $\mathcal{D}$ es numerablemente localmente finita. Aseguramos que $\mathcal{D}$ es una base para X, de donde se sigue nuestro teorema.

Sea x un punto de X y sea U un entorno de x. Nuestro objetivo es encontrar un elemento D de $\mathcal{D}$ tal que $x \in D \subset U$. Ahora bien, x pertenece sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, pongamos que son $C_1, \ldots, C_k$. Entonces $U \cap C_i$ es un entorno de x en el espacio C_i y, por tanto, existe un $\epsilon_i > 0$ tal que

$$B_{C_i}(x, \epsilon) \subset (U \cap C_i).$$

Elijamos m de forma que $2/m < \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\}$. Como la colección $\mathcal{D}_m$ recubre a X, debe existir un elemento D de $\mathcal{D}_m$ que contenga a x y, dado que la colección $\mathcal{D}_m$ refina $\mathcal{A}_m$, debe existir un elemento $B_C(y, 1/m)$ de $\mathcal{A}_m$, para algún $C \in \mathcal{C}$ y algún $y \in C$, que contenga a D. Como

$$x \in D \subset B_C(y, 1/m)$$

el punto x pertenece a C, de donde C debe ser uno de los conjuntos $C_1, \ldots, C_k$, pongamos que $C = C_i$. Finalmente, dado que $B_C(y, 1/m)$ tiene diámetro no más grande que $2/m < \epsilon_i$, se sigue que

$$x \in D \subset B_{C_i}(y, 1/m) \subset B_{C_i}(x, \epsilon_i) \subset U$$

como queríamos demostrar. ∎

Ejercicios

1. Compare el Teorema 42.1 con los Ejercicios 7 y 8 de §34.
2. (a) Demuestre que, para cada $x \in S_\Omega$, la sección de S_Ω por x tiene una base numerable y, por tanto, es metrizable.
   (b) Concluya que S_Ω no es paracompacto.

Capítulo 7

Espacios métricos completos y espacios de funciones

El concepto de completitud para un espacio métrico puede haber sido estudiado ya por el lector. Es un concepto básico para todos los aspectos del análisis. Aunque la completitud es una propiedad métrica más que una propiedad topológica, hay una cierta cantidad de teoremas que implican a los espacios métricos completos y que, sin embargo, son de naturaleza topológica. En este capítulo, estudiamos los ejemplos más importantes de espacios métricos completos y probamos algunos de estos teoremas.

El ejemplo más familiar de espacio métrico completo es el espacio euclídeo con cualquiera de sus distancias usuales. Otro ejemplo, tan importante como el anterior, es el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de todas las aplicaciones continuas de un espacio X en un espacio métrico Y. Este conjunto tiene una distancia denominada *distancia uniforme*, análoga a la distancia uniforme definida para $\mathbb{R}^J$ en §20. Si Y es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con la distancia uniforme. Esta propiedad será demostrada en §43. Como aplicación, construimos en §44 la bien conocida *curva de Peano que llena el espacio*.

Un teorema de naturaleza topológica concerniente a espacios métricos completos es un teorema que relaciona la compacidad de un espacio con la completitud del mismo. Tratamos esto en §45. Como corolario inmediato, obtenemos un teorema en relación con los subespacios compactos del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$; es una versión clásica del famoso teorema conocido como *teorema de Ascoli*.

Existen otras topologías usuales para el espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$ además de la topología derivada de la distancia uniforme. Estudiamos algunas de ellas en §46, llegando a una prueba de la versión general del teorema de Ascoli en §47.

§43 Espacios métricos completos

En esta sección definimos la noción de completitud y demostramos que si Y es un espacio métrico completo, entonces el espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con la distancia uniforme. También probamos que todo espacio métrico puede ser embebido isométricamente en un espacio métrico completo.

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión (x_n) de puntos de X se dice que es una ***sucesión de Cauchy*** en (X, d) si tiene la propiedad de que, dado $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \qquad \text{para todo } n, m \geq N.$$

El espacio métrico (X, d) se dice que es ***completo*** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Es trivial que cualquier sucesión convergente en X es necesariamente una sucesión de Cauchy; la completitud obliga a que se verifique el recíproco.

Observemos que un subconjunto cerrado A de un espacio métrico completo (X, d) es necesariamente completo con la distancia restringida, ya que una sucesión de Cauchy en A también es una sucesión de Cauchy en X y, por tanto, converge en X. Como A es cerrado en X, el límite de la sucesión debe permanecer en A.

Observemos también que si X es completo con la distancia d, entonces X es completo con la distancia acotada estándar

$$\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$$

correspondiente a d, y recíprocamente. Esto se debe a que una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy para la distancia $\bar{d}$ si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy para la distancia d. Y una sucesión converge en la distancia $\bar{d}$ si, y sólo si, converge en la distancia d.

Un criterio útil para comprobar si un espacio métrico es completo, es el siguiente:

Lema 43.1. *Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X, d). Vamos a probar que si (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_i}) que converge a un punto x, entonces la propia sucesión (x_n) converge a x.

Dado $\epsilon > 0$, elijamos primero N lo suficientemente grande para que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon/2$$

para todos $n, m \geq N$ (utilizando el hecho de que (x_n) es una sucesión de Cauchy). Entonces sea i un entero lo suficientemente grande para que $n_i \geq N$ y

$$d(x_{n_i}, x) < \epsilon/2$$

(utilizamos aquí el hecho de que $n_1 < n_2 < \ldots$ es una sucesión creciente de enteros y que (x_{n_i}) converge a x). Teniendo en cuenta ambas desigualdades, obtenemos el resultado deseado de que para $n \geq N$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \epsilon.$$ ∎

Teorema 43.2. *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$ es completo con cualquiera de sus distancias usuales, la distancia euclídea d o la distancia del supremo ρ.*

Demostración. Para probar que el espacio métrico $(\mathbb{R}^k, \rho)$ es completo, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^k, \rho)$. Entonces el conjunto $\{x_n\}$ es un subconjunto acotado de $(\mathbb{R}^k, \rho)$, ya que si N es tal que

$$\rho(x_n, x_m) \leq 1$$

para todos $n, m \geq N$, entonces el número

$$M = \text{máx}\{\rho(x_1, \mathbf{0}), \ldots, \rho(x_{N-1}, \mathbf{0}), \rho(x_N, \mathbf{0}) + 1\}$$

es una cota superior para $\rho(x_n, \mathbf{0})$. De este modo, los puntos de la sucesión (x_n) permanecen todos en el cubo $[-M, M]^k$. Dado que este cubo es compacto, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión convergente, por el Teorema 28.2. Entonces $(\mathbb{R}^k, \rho)$ es completo.

Para probar que $(\mathbb{R}^k, d)$ es completo, observemos que una sucesión es una sucesión de Cauchy para d si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy para ρ, y una sucesión converge en la distancia d si, y sólo si, converge en la distancia ρ. ∎

Vamos a estudiar ahora el espacio producto $\mathbb{R}^\omega$. Antes necesitamos un lema acerca de sucesiones en un espacio producto.

Lema 43.3. *Sea X el espacio producto $X = \prod X_\alpha$ y sea $\mathbf{x}_n$ una sucesión de puntos de X. Entonces $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ si, y sólo si, $\pi_\alpha(\mathbf{x}_n) \to \pi_\alpha(\mathbf{x})$, para cada α.*

Demostración. Este resultado fue enunciado como un ejercicio en §19, ahora ofrecemos una prueba. En primer lugar, como la proyección $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es una aplicación continua, entonces conserva la convergencia de sucesiones y deducimos la condición necesaria del lema.

Para probar el recíproco, supongamos que $\pi_\alpha(\mathbf{x}_n) \to \pi_\alpha(\mathbf{x})$, para cada $\alpha \in J$. Sea $U = \prod U_\alpha$ un elemento básico de X que contenga a $\mathbf{x}$. Para cada α de forma que U_α *no* es igual a todo el espacio X_α, sea N_α un entero tal que $\pi_\alpha(\mathbf{x}_n) \in U_\alpha$ para todo $n \geq N_\alpha$. Si N es el número más grande de todos los N_α, entonces $\mathbf{x}_n \in U$, para todo $n \geq N$. ■

Teorema 43.4. *Existe una distancia para el espacio producto $\mathbb{R}^\omega$ con la cual $\mathbb{R}^\omega$ es completo.*

Demostración. Sea $\bar{d}(a,b) = \text{mín}\{|a-b|, 1\}$ la distancia acotada estándar sobre $\mathbb{R}$. Sea D la distancia sobre $\mathbb{R}^\omega$ definida por

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_i,y_i)/i\}.$$

Entonces D induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$. Vamos a comprobar que $\mathbb{R}^\omega$ es completo con la distancia D. Sea $\mathbf{x}_n$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^\omega, D)$. Como

$$\bar{d}(\pi_i(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})) \leq iD(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

observamos que, para i fijo, la sucesión $\pi_i(\mathbf{x}_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por tanto, converge a un número a_i. Entonces la sucesión $\mathbf{x}_n$ converge al punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ de $\mathbb{R}^\omega$. ■

EJEMPLO 1. Un ejemplo de un espacio métrico que no es completo, es el espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la distancia usual $d(x,y) = |x-y|$. Por ejemplo, la sucesión

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots$$

de números con una cantidad finita de decimales, que converge (en $\mathbb{R}$) a $\sqrt{2}$, es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$.

EJEMPLO 2. Otro espacio que no es completo es el intervalo abierto $(-1,1)$ de $\mathbb{R}$ con la distancia $d(x,y) = |x-y|$. En este espacio, la sucesión (x_n) definida por

$$x_n = 1 - 1/n$$

es una sucesión de Cauchy que no converge. Este ejemplo demuestra que la completitud no es una propiedad topológica, es decir, no se conserva por homeomorfismos, ya que el intervalo $(-1,1)$ es homeomorfo a la recta real $\mathbb{R}$ y este espacio es completo con su distancia usual.

Aunque ambos espacios producto $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^\omega$ tengan distancias con las cuales son completos, no podemos esperar una demostración del mismo resultado para el espacio producto $\mathbb{R}^J$ en general, ya que $\mathbb{R}^J$ no es ni siquiera metrizable cuando J no es numerable (véase §21). Sin embargo, existe otra topología sobre el conjunto $\mathbb{R}^J$,

aquélla inducida por la distancia uniforme. Relativo a esta distancia, $\mathbb{R}^J$ es completo, como veremos.

Definimos la distancia uniforme en general como sigue:

Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico. Pongamos $\bar{d}(a, b) = \min\{d(a, b), 1\}$ para la distancia acotada estándar sobre Y correspondiente a d. Si $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ son puntos del producto cartesiano Y^J, definimos

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\}.$$

Es fácil comprobar que $\bar{\rho}$ es una distancia, denominada ***distancia uniforme*** sobre Y^J correspondiente a la distancia d sobre Y.

Hemos usado la notación estándar de "upla" para los elementos del producto cartesiano Y^J. Como los elementos de Y^J son simplemente aplicaciones de J en Y, podemos utilizar también la notación funcional para ellos. En este capítulo, la notación funcional será más conveniente que la notación de upla, por lo que la usaremos a lo largo del mismo. Con esta notación, la definición de la distancia uniforme adquiere la siguiente forma: para $f, g : J \to Y$, entonces

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup\{\bar{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \mid \alpha \in J\}.$$

Teorema 43.5. *Si el espacio Y es completo con la distancia d, entonces el espacio Y^J es completo con la distancia uniforme $\bar{\rho}$ correspondiente a d.*

Demostración. Recordemos que si (Y, d) es completo, entonces $(Y, \bar{d})$ también lo es, donde $\bar{d}$ es la distancia acotada correspondiente a d. Supongamos que $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de puntos de Y^J que es una sucesión de Cauchy para la distancia $\bar{\rho}$. Dado α en J, el hecho de que

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m)$$

para todos n, m se traduce en que la sucesión $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots$ es una sucesión de Cauchy en $(Y, \bar{d})$. Por tanto, la sucesión converge a un punto y_α. Sea $f : J \to Y$ la aplicación definida por $f(\alpha) = y_\alpha$. Afirmamos que la sucesión (f_n) converge a f en la distancia $\bar{\rho}$.

Dado $\epsilon > 0$, elijamos N lo suficientemente grande para que $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \epsilon/2$, para todos $n, m \geq N$. Entonces, en particular,

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \epsilon/2$$

para $n, m \geq N$ y $\alpha \in J$. Manteniendo n y α fijos y haciendo tender m a infinito, obtenemos que

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leq \epsilon/2.$$

Esta desigualdad es cierta para todo α, siempre que $n \geq N$. Por consiguiente,

$$\bar{\rho}(f_n, f) \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

para $n \geq N$, como deseábamos probar. ∎

Vamos a centrarnos ahora en un caso peculiar considerando el conjunto Y^X, donde X es un *espacio topológico* más que un conjunto. Desde luego, esto no tiene influencia en lo que hemos estudiado antes; la topología de X es irrelevante cuando consideramos el conjunto de *todas* las aplicaciones $f : X \to Y$. Pero supongamos que consideramos el subconjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de Y^X consistente en todas las aplicaciones *continuas* $f : X \to Y$. Resulta entonces que si Y es completo, este subconjunto es también completo con la distancia uniforme. Lo mismo ocurre para el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$ de todas las aplicaciones $f : X \to Y$ acotadas (una aplicación f se dice que es ***acotada*** si su imagen $f(X)$ es un subconjunto acotado del espacio métrico (Y, d)).

Teorema 43.6. *Sea X un espacio topológico y sea (Y, d) un espacio métrico. El conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de las aplicaciones continuas es cerrado en Y^X con la distancia uniforme. También lo es el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$ de las aplicaciones acotadas. Por tanto, si Y es completo entonces estos dos espacios son completos con la distancia uniforme.*

Demostración. La primera parte de este teorema es justo el teorema del límite uniforme (Teorema 21.6) en otro formato. Veamos primero que si una sucesión de elementos f_n de Y^X converge al elemento f de Y^X en la distancia $\bar{\rho}$ de Y^X, entonces la sucesión converge uniformemente a f, en el sentido definido en §21, para la distancia $\bar{d}$ sobre Y. Dado $\epsilon > 0$, elijamos un entero N tal que

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \epsilon$$

para todo $n > N$. Entonces, para todo $x \in X$ y todo $n \geq N$,

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \bar{\rho}(f_n, f) < \epsilon.$$

Y, por tanto, (f_n) converge uniformemente a f.

Probemos ahora que $\mathcal{C}(X, Y)$ es cerrado en Y^X con la distancia $\bar{\rho}$. Sea f un elemento de Y^X que es un punto límite de $\mathcal{C}(X, Y)$. Existe entonces una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{C}(X, Y)$ convergente a f en la distancia $\bar{\rho}$. Por el teorema del límite uniforme, f es continua, de forma que $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Finalmente, probemos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es cerrado en Y^X. Si f es un punto límite de $\mathcal{B}(X, Y)$, existe una sucesión de elementos f_n de $\mathcal{B}(X, Y)$ convergente a f. Elijamos N lo suficientemente grande para que $\bar{\rho}(f_N, f) < 1/2$. Entonces, para $x \in X$,

tenemos que $\bar{d}(f_N(x), f(x)) < 1/2$, lo cual implica que $d(f_N(x), f(x)) < 1/2$. Deducimos que, si M es el diámetro del conjunto $f_N(X)$, entonces $f(X)$ tiene diámetro menor o igual que $M + 1$. Por tanto, $f \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Concluimos que $\mathcal{C}(X, Y)$ y $\mathcal{B}(X, Y)$ son completos con la distancia $\bar{\rho}$ si Y es completo con la distancia d. ■

Definición. Si (Y, d) es un espacio métrico, podemos definir otra distancia en el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$ de las aplicaciones acotadas de X en Y por la ecuación

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Es fácil observar que ρ está bien definida porque el conjunto $f(X) \cup g(X)$ está acotado si $f(X)$ y $g(X)$ lo están. La distancia ρ se conoce como ***distancia del supremo***.

Hay una relación sencilla entre la distancia del supremo y la distancia uniforme. Efectivamente, si $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$ entonces

$$\bar{\rho}(f, g) = \text{mín}\{\rho(f, g), 1\}$$

ya que si $\rho(f, g) > 1$ entonces $d(f(x_0), g(x_0)) > 1$ para algún $x_0 \in X$, de manera que $\bar{d}(f(x_0), g(x_0)) = 1$ y $\bar{\rho}(f, g) = 1$, por definición. Por otro lado, si $\rho(f, g) \leq 1$ entonces $\bar{d}(f(x), g(x)) = d(f(x), g(x)) \leq 1$ para todo x, y así $\bar{\rho}(f, g) = \rho(f, g)$. Observemos que sobre $\mathcal{B}(X, Y)$, la distancia $\bar{\rho}$ es justamente la distancia acotada estándar derivada de la distancia ρ. Esta es la razón por la que hemos introducido la notación $\bar{\rho}$ para la distancia uniforme, volviendo a §20.

Si X es un espacio compacto, entonces toda aplicación continua $f : X \to Y$ está acotada; por tanto, la distancia del supremo está definida en $\mathcal{C}(X, Y)$. Si Y es completo con la distancia d, entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo con la correspondiente distancia uniforme $\bar{\rho}$ y, por consiguiente, es también completo con la distancia de supremo ρ. Frecuentemente utilizamos la distancia del supremo más que la distancia uniforme en esta situación.

Vamos a probar ahora un teorema clásico, el cual afirma que todo espacio métrico se puede embeber isométricamente en un espacio métrico completo (una demostración diferente, de alguna manera más directa, está esbozada en el Ejercicio 9). Aunque no necesitaremos este teorema, es muy útil en otras partes de las matemáticas.

***Teorema 43.7.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Existe un embebimiento isométrico de X en un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$. Sea x_0 un punto fijo de X. Dado $a \in X$, definamos $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$

Aseguramos que ϕ_a está acotada. Efectivamente, de las desigualdades

$$\begin{aligned} d(x,a) &\leq d(x,b) + d(a,b), \\ d(x,b) &\leq d(x,a) + d(a,b), \end{aligned}$$

se deduce que

$$|d(x,a) - d(x,b)| \leq d(a,b).$$

Poniendo $b = x_0$, concluimos que $|\phi_a(x)| \leq d(a, x_0)$, para todo x.

Definamos $\Phi : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ por

$$\Phi(a) = \phi_a.$$

Vamos a probar que Φ es un embebimiento isométrico de (X, d) en el espacio métrico completo $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$. Es decir, vamos a probar que, para todo par de puntos $a, b \in X$,

$$\rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b).$$

Por definición,

$$\begin{aligned} \rho(\phi_a, \phi_b) &= \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)| : x \in X\} \\ &= \sup\{|d(x,a) - d(x,b)| : x \in X\}. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$$\rho(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b).$$

Por otro lado, esta desigualdad no puede ser estricta, ya que si $x = a$ entonces

$$|d(x,a) - d(x,b)| = d(a,b).$$ ■

Definición. Sea X un espacio métrico. Si $h : X \to Y$ es un embebimiento isométrico de X en un espacio métrico completo Y, entonces el subespacio $\overline{h(X)}$ de Y es un espacio métrico completo. Se conoce como ***completación*** de X.

La completación de X está unívocamente determinada salvo isometrías (véase el Ejercicio 10).

Ejercicios

1. Sea X un espacio métrico.
   (a) Suponga que, para algún $\epsilon > 0$, toda ϵ-bola en X tiene clausura compacta. Pruebe que X es completo.

(b) Suponga que, para cada $x \in X$, existe un $\epsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \epsilon)$ tiene clausura compacta. Muestre mediante un ejemplo que X no es completo necesariamente.

2. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, con Y completo. Sea $A \subset Y$. Demuestre que si $f : A \to Y$ es uniformemente continua, entonces f puede ser extendida unívocamente a una aplicación uniformemente continua $g : \bar{A} \to Y$.

3. Dos distancias d y d' sobre un conjunto X se dice que son ***métricamente equivalentes*** si la aplicación identidad $i : (X, d) \to (X, d')$ y su inversa son uniformemente continuas.

(a) Demuestre que d es métricamente equivalente a la distancia acotada estándar $\bar{d}$ asociada a d.

(b) Demuestre que si d y d' son métricamente equivalentes, entonces X es completo con la distancia d si, y sólo si, es completo con la distancia d'.

4. Demuestre que el espacio métrico (X, d) es completo si, y sólo si, para toda sucesión encajada $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que diám $A_n \to 0$, la intersección de los conjuntos A_n no es vacía.

5. Si (X, d) es un espacio métrico, recuerde que una aplicación $f : X \to X$ se dice que es una *contracción* si existe un número $\alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

para todos $x, y \in X$. Demuestre que si f es una contracción de un espacio métrico completo, entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Compare con el Ejercicio 7 de §28.

6. Un espacio X se dice que es ***topológicamente completo*** si existe una distancia para la topología de X para la cual X es completo.

(a) Demuestre que un subespacio cerrado de un espacio topológicamente completo es topológicamente completo.

(b) Pruebe que un producto numerable de espacios topológicamente completos es topológicamente completo (con la topología producto).

(c) Demuestre que un subespacio abierto de un espacio topológicamente completo es topológicamente completo. [*Indicación:* si $U \subset X$ y X es completo con la distancia d, defina $\phi : U \to \mathbb{R}$ por la ecuación

$$\phi(x) = 1/d(x, X - U).$$

Embeba U en $X \times \mathbb{R}$ poniendo $f(x) = x \times \phi(x)$.]

(d) Pruebe que si A es un conjunto G_δ en un espacio topológicamente completo, entonces A es topológicamente completo. [*Indicación:* sea A la intersección de los conjuntos abiertos U_n, para $n \in \mathbb{Z}_+$. Considere el embebimiento diagonal $f(a) = (a, a, \ldots)$ de A en $\prod U_n$.] Concluya que el espacio de los números irracionales es topológicamente completo.

7. Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots)$ tales que $\sum x_i^2$ converge, es completo con la distancia ℓ^2 (véase el Ejercicio 8 de §20).

8. Si X e Y son espacios topológicos, defina

$$e : X \times \mathcal{C}(X, Y) \to Y$$

por la ecuación $e(x, f) = f(x)$; la aplicación e se denomina ***aplicación evaluación***. Demuestre que si d es una distancia para Y y $\mathcal{C}(X, Y)$ tiene la topología uniforme correspondiente, entonces e es continua. Generalizaremos este resultado en §46.

9. Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que existe un embebimiento isométrico h de X en un espacio métrico completo (Y, D), como sigue: denote por $\tilde{X}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$$

de puntos de X. Defina $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow 0.$$

Denote por $[\mathbf{x}]$ la clase de equivalencia de $\mathbf{x}$, y denote por Y el conjunto de estas clases de equivalencia. Defina una distancia D en Y por la ecuación

$$D([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n).$$

(a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia, y demuestre que D es una distancia bien definida.

(b) Defina $h : X \to Y$ poniendo $h(x)$ igual a la clase de equivalencia asociada a la sucesión constante $(x, x, \ldots)$:

$$h(x) = [(x, x, \ldots)].$$

Demuestre que h es un embebimiento isométrico.

(c) Pruebe que $h(X)$ es denso en Y; efectivamente, dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \tilde{X}$, pruebe que la sucesión $h(x_n)$ de puntos de Y converge al punto $[\mathbf{x}]$ de Y.

(d) Demuestre que si A es un subconjunto denso de un espacio métrico (Z, ρ), y si toda sucesión de Cauchy en A converge en Z, entonces Z es completo.

(e) Pruebe que (Y, D) es completo.

10. *Teorema (Unicidad de la completación). Sean $h : X \to Y$ y $h' : X \to Y'$ dos embebimientos isométricos de un espacio métrico (X, d) en los espacios métricos completos (Y, D) e (Y', D'), respectivamente. Entonces existe una isometría de $(\overline{h(X)}, D)$ en $(\overline{h'(X)}, D')$ que coincide con $h'h^{-1}$ sobre el subespacio $h(X)$.*

*§44 Una curva que llena el espacio

Como una aplicación de la completitud del espacio métrico $\mathcal{C}(X, Y)$ con la distancia uniforme cuando Y es completo, vamos a construir la famosa "curva de Peano que llena el espacio".

Teorema 44.1. *Sea $I = [0, 1]$. Existe una aplicación continua $f : I \to I^2$ cuya imagen llena todo el cuadrado I^2.*

La existencia de este camino choca con nuestra inocente intuición geométrica de la misma forma que la existencia de una función continua y no derivable en ningún punto (la cual nos encontraremos más adelante).

Demostración. *Paso 1.* Vamos a construir la aplicación f como el límite de una sucesión de aplicaciones continuas f_n. Describiremos primero una operación particular sobre caminos, la cual será utilizada para generar la sucesión f_n.

Comenzamos con un intervalo cerrado arbitrario $[a, b]$ de la recta real y un cuadrado arbitrario en el plano con lados paralelos a los ejes coordenados, y consideremos el camino triangular g dibujado en la Figura 44.1, el cual es una aplicación continua de $[a, b]$ en el cuadrado. La operación que deseamos describir reemplaza el camino g por el camino g' dibujado en la Figura 44.2. Está hecho con cuatro caminos triangulares, cada uno de la mitad del tamaño de g. Observemos que g y g' tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final. El lector puede escribir las ecuaciones para g y g' si lo desea.

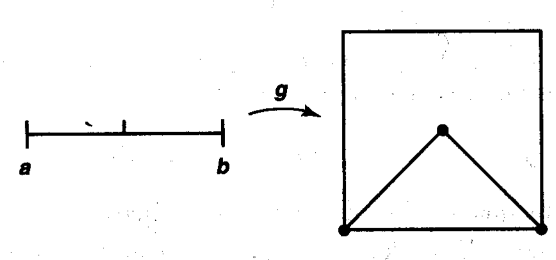


Figura 44.1

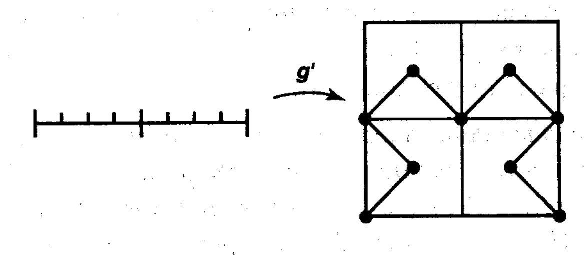


Figura 44.2

La misma operación también puede aplicarse a cualquier camino triangular conectando dos esquinas adyacentes del cuadrado. Por ejemplo, cuando aplicamos esta operación al camino h, dibujado en la Figura 44.3, obtenemos el camino h'.

Paso 2. Vamos a definir ahora una sucesión de aplicaciones $f_n : I \to I^2$. La primera aplicación, la cual denotaremos por f_0 por conveniencia, es el camino triangular dibujado en la Figura 44.1, haciendo $a = 0$ y $b = 1$. La siguiente aplicación f_1 es la aplicación obtenida al realizar la operación descrita en el Paso 1 sobre la aplicación f_0, dibujada en la Figura 44.2. La siguiente aplicación f_2 es la que se obtiene mediante la misma operación sobre cada uno de los cuatro caminos triangulares que constituyen el camino f_1. Está dibujado en la Figura 44.4. La siguiente aplicación f_3 se obtiene aplicando el mismo proceso a cada uno de los 16 caminos triangulares que constituyen el camino f_2 que está dibujado en la Figura 44.5, y así sucesivamente. En general, f_n es un camino formado por 4^n caminos triangulares del tipo considerado en el Paso 1, cada uno de ellos permaneciendo en un cuadrado de lado $1/2^n$. La aplicación f_{n+1} se obtiene aplicando la operación del Paso 1 a estos caminos triangulares, reemplazando cada uno de ellos por cuatro caminos triangulares más pequeños.

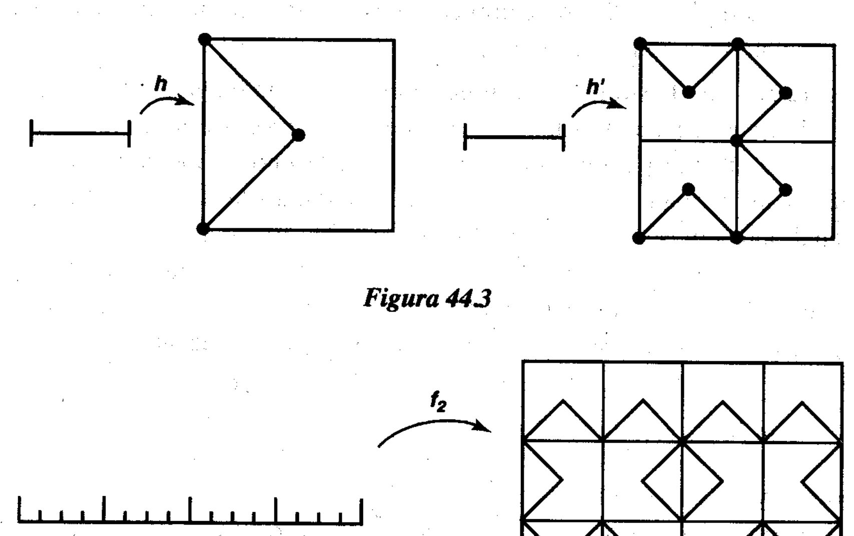


Figura 44.3

Figura 44.4

Paso 3. Para los propósitos de esta demostración, denotemos por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la distancia del supremo sobre $\mathbb{R}^2$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

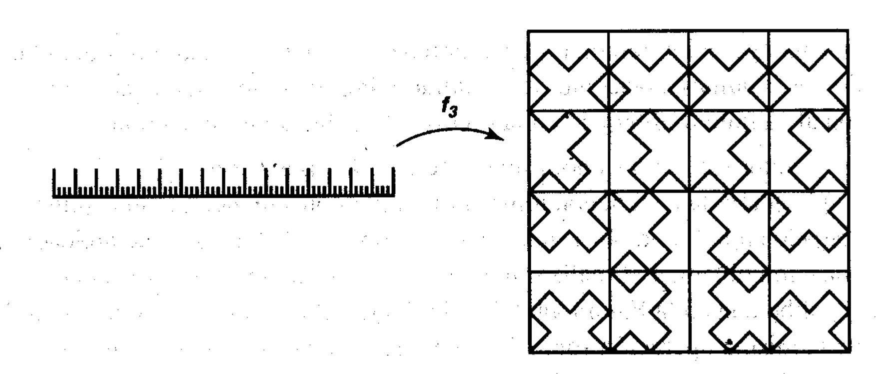


Figura 44.5

Entonces podemos denotar por ρ la correspondiente distancia del supremo sobre $\mathcal{C}(I, I^2)$:

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(t), g(t)) \mid t \in I\}.$$

Como I^2 es cerrado en $\mathbb{R}^2$, es completo con la distancia del supremo; entonces $\mathcal{C}(I, I^2)$ es completo con la distancia ρ.

Aseguramos que la sucesión de aplicaciones (f_n), definida en el Paso 2, es una sucesión de Cauchy para la distancia ρ. Con el fin de probar este hecho, estudiemos lo que sucede cuando pasamos de f_n a f_{n+1}. Cada uno de los pequeños caminos triangulares que forman f_n está contenido en un cuadrado de lado $1/2^n$. La operación con la cual obtenemos f_{n+1}, reemplaza cada camino triangular por cuatro caminos triangulares que están contenidos en el mismo cuadrado. Por tanto, con la distancia del supremo sobre I^2, la distancia entre $f_n(t)$ y $f_{n+1}(t)$ es a lo más $1/2^n$. De manera que $\rho(f_n, f_{n+1}) \leq 1/2^n$. Se deduce entonces que (f_n) es una sucesión de Cauchy, ya que

$$\rho(f_n, f_{n+m}) \leq 1/2^n + 1/2^{n+1} + \cdots + 1/2^{n+m-1} < 2/2^n$$

para todos n y m.

Paso 4. Como $\mathcal{C}(I, I^2)$ es completo, la sucesión f_n converge a una aplicación continua $f : I \to I^2$. Vamos a probar que f es sobreyectiva.

Sea $\mathbf{x}$ un punto de I^2 y veamos que $\mathbf{x}$ pertenece a $f(I)$. Observemos primero que, dado n, el camino f_n se encuentra a una distancia menor o igual que $1/2^n$ del punto $\mathbf{x}$, ya que el camino f_n toca cada uno de los pequeños cuadrados de lado $1/2^n$ en los cuales hemos dividido I^2.

Utilizando este hecho, vamos a probar que, dado $\epsilon > 0$, el ϵ-entorno de $\mathbf{x}$ interseca $f(I)$. Elijamos N suficientemente grande para que

$$\rho(f_N, f) < \epsilon/2 \qquad \text{y} \qquad 1/2^N < \epsilon/2.$$

Por el resultado del párrafo anterior, existe un punto $t_0 \in I$ tal que $d(\mathbf{x}, f_N(t_0)) \leq 1/2^N$. Entonces, como $d(f_N(t), f(t)) < \epsilon/2$ para todo t, deducimos que

$$d(\mathbf{x}, f(t_0)) < \epsilon,$$

y así, el ϵ-entorno de $\mathbf{x}$ interseca $f(I)$.

Se sigue que $\mathbf{x}$ pertenece a la clausura de $f(I)$. Pero I es compacto, luego $f(I)$ es compacto y, por tanto, cerrado. De manera que $\mathbf{x}$ pertenece a $f(I)$, como deseábamos probar. ∎

Ejercicios

1. Dado n, pruebe que existe una aplicación $g : I \to I^n$ continua y sobreyectiva. [*Indicación:* considere $f \times f : I \times I \to I^2 \times I^2$.]
2. Demuestre que existe una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua y sobreyectiva.
3. (a) Si $\mathbb{R}^\omega$ tiene la topología producto, demuestre que no existe una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ continua y sobreyectiva. [*Indicación:* pruebe que $\mathbb{R}^\omega$ no es una unión numerable de subespacios compactos.]
   (b) Si $\mathbb{R}^\omega$ tiene la topología producto, determine si existe o no una aplicación continua y sobreyectiva de $\mathbb{R}$ en el subespacio $\mathbb{R}^\infty$.
   (c) ¿Qué sucede si, en los apartados (a) y (b), consideramos sobre $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme o la topología por cajas?
4. (a) Sea X un espacio de Hausdorff. Demuestre que si existe una aplicación $f : I \to X$ continua y sobreyectiva, entonces X es compacto, conexo, débilmente localmente compacto y metrizable. [*Indicación:* pruebe que f es una aplicación perfecta.]
   (b) El recíproco del resultado de (a) es un famoso teorema de topología conjuntista conocido por el *teorema de Hahn-Mazurkiewicz* (véase [H-Y], pág. 129). Suponiendo este teorema, demuestre que existe una aplicación $f : I \to I^\omega$ continua y sobreyectiva.

   Un espacio de Hausdorff que es la imagen continua de un intervalo unidad cerrado es frecuentemente denominado ***espacio de Peano***.

§45 Compacidad en espacios métricos

Ya hemos demostrado que la compacidad, la compacidad por punto límite y la compacidad sucesional son equivalentes para espacios métricos. Hay otra formulación para la compacidad en espacios métricos que involucra la noción de completitud que

estudiaremos en esta sección. Como una aplicación, probamos un teorema que caracteriza aquellos subespacios de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ que son compactos para la topología uniforme.

¿Cómo está relacionada la compacidad de un espacio métrico X con la completitud de X? Del Lema 43.1 se deduce que todo espacio métrico compacto es completo. El recíproco no es cierto —un espacio métrico completo no es necesariamente compacto—. Es razonable preguntarse qué condición extra necesitamos imponer a un espacio completo para asegurarnos que sea compacto. Dicha condición se conoce por el nombre de *acotación total*.

Definición. Un espacio métrico (X, d) se dice que está ***totalmente acotado*** si, para todo $\epsilon > 0$, existe un cubrimiento finito de X formado por ϵ-bolas.

EJEMPLO 1. La acotación total implica claramente acotación, pues si $B(x_1, 1/2), \ldots, B(x_n, 1/2)$ es un cubrimiento finito de X por bolas abiertas de radio $1/2$, entonces X tiene diámetro menor o igual que $1 + \text{máx}\{d(x_i, x_j)\}$. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, con la distancia $\bar{d}(a, b) = \text{mín}\{1, |a-b|\}$, la recta real $\mathbb{R}$ está acotada pero no está totalmente acotada.

EJEMPLO 2. Con la distancia $d(a, b) = |a - b|$, la recta real $\mathbb{R}$ es completa pero no está totalmente acotada, mientras el subespacio $(-1, 1)$ está totalmente acotado pero no es completo. El subespacio $[-1, 1]$ es completo y está totalmente acotado, a la vez.

Teorema 45.1. *Un espacio métrico (X, d) es compacto si, y sólo si, es completo y está totalmente acotado.*

Demostración. Si X es un espacio métrico compacto, entonces X es completo, como se ha dicho antes. El hecho de que X esté totalmente acotado es una consecuencia del hecho de que todo cubrimiento de X por ϵ-bolas abiertas debe contener un subrecubrimiento finito.

Recíprocamente, sea X completo y totalmente acotado. Vamos a probar que X es sucesionalmente compacto, lo cual será suficiente.

Sea (x_n) una sucesión de puntos de X. Vamos a construir una subsucesión de (x_n) que sea una sucesión de Cauchy, de manera que necesariamente converja. En primer lugar, recubramos X con una cantidad finita de bolas de radio 1. Al menos una de estas bolas, pongamos B_1, contiene x_n para un número infinito de valores de n. Sea J_1 el subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ consistente en todos los índices n para los que $x_n \in B_1$.

En el paso siguiente, recubramos X con una cantidad finita de bolas de radio $1/2$. Como J_1 es infinito, al menos una de estas bolas, pongamos B_2, debe contener x_n para una cantidad infinita de valores de n en J_1. Denotemos por J_2 el conjunto formado por los índices n para los que $n \in J_1$ y $x_n \in B_2$. En general, dado un

conjunto infinito J_k de enteros positivos, denotemos por J_{k+1} el subconjunto infinito de J_k tal que existe una bola B_{k+1} de radio $1/(k+1)$ que contiene x_n, para todo $n \in J_{k+1}$.

Escojamos $n_1 \in J_1$. Dado n_k, escojamos $n_{k+1} \in J_{k+1}$ tal que $n_{k+1} > n_k$, lo cual puede hacerse porque J_{k+1} es un conjunto infinito. Ahora bien, para $i, j \geq k$, los índices n_i y n_j pertenecen a J_k (ya que $J_1 \supset J_2 \supset \cdots$ es una sucesión encajada de conjuntos). Por lo tanto, para todos $i, j \geq k$, los puntos x_{n_i} y x_{n_j} están contenidos en la bola B_k de radio $1/k$. Se sigue que la subsucesión (x_{n_i}) es una sucesión de Cauchy, como deseábamos. ∎

Vamos a aplicar ahora este resultado para encontrar subespacios compactos del espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$, con la topología uniforme. Sabemos que un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado. Podemos esperar que se dé un resultado análogo para $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. Pero no es así, aunque X sea compacto. Necesitamos suponer que el subespacio de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ satisface una condición adicional, denominada *equicontinuidad*. Ahora consideramos esta noción.

Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$. Si $x_0 \in X$, el conjunto $\mathcal{F}$ de aplicaciones se dice que es ***equicontinuo en*** x_0 si, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno U de x_0 tal que, para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$,

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Si el conjunto $\mathcal{F}$ es equicontinuo en x_0, para todo $x_0 \in X$, se dice simplemente que es ***equicontinuo***.

La continuidad de la aplicación f en x_0 significa que, dada f y dado $\epsilon > 0$, existe un entorno U de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$. La equicontinuidad de $\mathcal{F}$ significa que existe un entorno U válido simultáneamente para todas las aplicaciones f de la colección $\mathcal{F}$.

Observemos que la equicontinuidad depende no tanto de la topología sobre Y si no de la distancia concreta d.

Lema 45.2. *Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Si el subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ está totalmente acotado para la distancia uniforme correspondiente a d, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinuo respecto a d.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ está totalmente acotado. Dado $0 < \epsilon < 1$ y dado x_0, encontramos un entorno U de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$ y $f \in \mathcal{F}$.

Pongamos $\delta = \epsilon/3$ y recubramos $\mathcal{F}$ con un cantidad finita de δ-bolas abiertas

$$B(f_1, \delta), \ldots, B(f_n, \delta)$$

en $\mathcal{C}(X, Y)$. Cada aplicación f_i es continua; por tanto, podemos escoger un entorno U de x_0 tal que, para $i = 1, \ldots, n$,

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) < \delta$$

siempre que $x \in U$.

Sea f un elemento arbitrario de $\mathcal{F}$. Entonces f pertenece al menos a una de las δ-bolas anteriores, pongamos que es $B(f_i, \delta)$. De manera que, para $x \in U$, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{d}(f(x), f_i(x)) &< \delta, \\ d(f_i(x), f_i(x_0)) &< \delta, \\ \bar{d}(f_i(x_0), f(x_0)) &< \delta. \end{aligned}$$

La primera y la tercera desigualdad se deben a que $\bar{\rho}(f, f_i) < \delta$, y la segunda se tiene porque $x \in U$. Dado que $\delta < 1$, la primera y la tercera también se verifican si $\bar{d}$ se reemplaza por d. Entonces, la desigualdad triangular implica que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$, como deseábamos probar. ∎

Probamos ahora la versión clásica del teorema de Ascoli, el cual tiene que ver con los subespacios compactos del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$. En §47 damos una versión más general, cuya prueba no depende de ésta. Sin embargo, la versión general depende del teorema de Tychonoff, mientras que ésta no.

Comenzamos probando un recíproco parcial del lema anterior, que se verifica cuando X e Y son compactos.

***Lema 45.3.** *Sea X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico, y supongamos que X e Y son compactos. Si el subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ es equicontinuo respecto a d, entonces $\mathcal{F}$ está totalmente acotado respecto de las distancias uniforme y del supremo correspondientes a d.*

Demostración. Como X es compacto, la distancia del supremo ρ está definida sobre $\mathcal{C}(X, Y)$. La acotación total respecto a ρ es equivalente a la acotación total respecto a $\bar{\rho}$, ya que para $\epsilon < 1$, toda ϵ-bola para ρ es también una ϵ-bola para $\bar{\rho}$, y recíprocamente. Por consiguiente, podemos utilizar igualmente la distancia ρ a lo largo de la demostración.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo. Dado $\epsilon > 0$, recubramos $\mathcal{F}$ por una cantidad finita de conjuntos que sean ϵ-bolas abiertas para la distancia ρ.

Pongamos $\delta = \epsilon/3$. Dado cualquier $a \in X$, existe un entorno U_a de a tal que $d(f(x), f(a)) < \delta$, para todo $x \in U_a$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Recubramos X con un cantidad finita de tales entornos U_a, para $a = a_1, \ldots, a_k$; denotemos U_{a_i} por U_i. Recubramos también Y con una cantidad finita de conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_m$ de diámetro menor que δ.

Sea J la colección de todas las aplicaciones $\alpha : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$. Dado $\alpha \in J$, si existe una aplicación f de $\mathcal{F}$ tal que $f(a_i) \in V_{\alpha(i)}$, para cada $i = 1, \ldots, k$, elijámosla y denotémosla por f_α. La colección $\{f_\alpha\}$ está indexada por un subconjunto J' del conjunto J y, por tanto, es finita. Aseguramos que las bolas abiertas $B_\rho(f_\alpha, \epsilon)$, para $\alpha \in J'$, recubren $\mathcal{F}$.

Sea f un elemento de $\mathcal{F}$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, escojamos un entero $\alpha(i)$ tal que $f(a_i) \in V_{\alpha(i)}$. Entonces la aplicación α está en J'. Afirmamos que f pertenece a la bola $B_\rho(f_\alpha, \epsilon)$.

Sea x un punto de X y elijamos i tal que $x \in U_i$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a_i)) &< \delta, \\ d(f(a_i), f_\alpha(a_i)) &< \delta, \\ d(f_\alpha(a_i), f_\alpha(x)) &< \delta. \end{aligned}$$

La primera y la tercera desigualdad se verifican porque $x \in U_i$, y la segunda desigualdad es cierta porque $f(a_i)$ y $f_\alpha(a_i)$ están en $V_{\alpha(i)}$. Por lo tanto $d(f(x), f_\alpha(x)) < \epsilon$. Como esta desigualdad es cierta para todo $x \in X$,

$$\rho(f, f_\alpha) = \text{máx}\{d(f(x), f_\alpha(x))\} < \epsilon.$$

Por lo tanto, f pertenece a $B_\rho(f_\alpha, \epsilon)$, como deseábamos probar. ■

Definición. Si (Y, d) es un espacio métrico, un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ se dice que está ***puntualmente acotado*** respecto a d si, para cada $a \in X$, el subconjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

de Y, está acotado en la distancia d.

***Teorema 45.4 (Teorema de Ascoli, versión clásica).** *Sea X un espacio compacto; denotemos por $(\mathbb{R}^n, d)$ el espacio euclídeo con la distancia euclídea o la distancia del supremo; dotemos a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ con la correspondiente distancia uniforme. Un subespacio $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ tiene clausura compacta si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es equicontinuo y está puntualmente acotado respecto a d.*

Demostración. Dado que X es compacto, la distancia del supremo ρ está definida sobre $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ y proporciona la topología uniforme sobre $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. A lo largo de la prueba, denotemos por $\mathcal{G}$ la clausura de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$.

Paso 1. Vamos a demostrar que si $\mathcal{G}$ es compacto, entonces $\mathcal{G}$ es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d. Entonces, como $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, deducimos que $\mathcal{F}$ es también equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d, con lo cual la condición necesaria del teorema estaría probada.

La compacidad de $\mathcal{G}$ implica que $\mathcal{G}$ está totalmente acotado respecto a ρ y $\bar{\rho}$, por el Teorema 45.1; a su vez, esto implica que $\mathcal{G}$ es equicontinuo respecto a d, por el Lema 45.2. La compacidad de $\mathcal{G}$ también implica que $\mathcal{G}$ está acotado respecto a ρ, y a su vez, esto implica que $\mathcal{G}$ está puntualmente acotado respecto a d, porque si $\rho(f,g) \leq M$, para todas $f, g \in \mathcal{G}$, entonces en particular $d(f(a), g(a)) \leq M$ para $f, g \in \mathcal{G}$, de manera que $\mathcal{G}_a$ tiene diámetro no mayor que M.

Paso 2. Vamos a probar que si $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d, entonces también lo es $\mathcal{G}$.

En primer lugar, comprobamos la equicontinuidad. Dado $x_0 \in X$ y dado $\epsilon > 0$, escojamos un entorno U de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/3$, para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Dada $g \in \mathcal{G}$, elijamos $f \in \mathcal{F}$ tal que $\rho(f,g) < \epsilon/3$. La desigualdad triangular implica que $d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$, para todo $x \in U$. Como g es arbitraria, se deduce que $\mathcal{G}$ es equicontinuo en x_0.

En segundo lugar, comprobamos la acotación puntual. Dado a, escojamos M de manera que diám $\mathcal{F}_a \leq M$. Entonces, dadas $g, g' \in \mathcal{G}$, existen $f, f' \in \mathcal{F}$ tales que $\rho(f,g) < 1$ y $\rho(f',g') < 1$. Como $d(f(a), f'(a)) \leq M$, deducimos que $d(g(a), g'(a)) \leq M + 2$. Finalmente obtenemos que diám $\mathcal{G}_a \leq M + 2$, debido a que g y g' son arbitrarias.

Paso 3. Vamos a probar que si $\mathcal{G}$ es equicontinuo y puntualmente acotado, entonces existe un subespacio compacto Y de $\mathbb{R}^n$ que contiene a la unión de los conjuntos $g(X)$, para $g \in \mathcal{G}$.

Elijamos, para cada $a \in X$, un entorno U_a de a tal que $d(g(x), g(a)) < 1$, para $x \in U_a$ y $g \in \mathcal{G}$. Dado que X es compacto, podemos recubrir X por una cantidad finita de dichos entornos, pongamos para $a = a_1, \ldots, a_k$. Como los conjuntos $\mathcal{G}_{a_i}$ están acotados, su unión también está acotada; supongamos que está contenida en la bola de radio N de $\mathbb{R}^n$ centrada en el origen. Entonces, para toda $g \in \mathcal{G}$, el conjunto $g(X)$ está contenido en la bola de radio $N+1$ centrada en el origen. Sea Y la clausura de esta bola.

Paso 4. Probamos ahora la condición suficiente del teorema. Supongamos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d. Vamos a ver que $\mathcal{G}$ es completo y totalmente acotado respecto a ρ; entonces, por el Teorema 45.1, se tiene que $\mathcal{G}$ es compacto.

La completitud es fácil, ya que $\mathcal{G}$ es un subespacio cerrado del espacio métrico completo $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n), \rho)$.

Vamos a comprobar la acotación total. En primer lugar, el Paso 2 implica que $\mathcal{G}$ es equicontinuo y puntualmente acotado respecto a d; entonces el Paso 3 nos dice que existe un subespacio compacto Y de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(X, Y)$. La equicontinuidad de $\mathcal{G}$ implica ahora, por el Lema 45.3, que $\mathcal{G}$ está totalmente acotado respecto a d, como deseábamos probar. ■

***Corolario 45.5.** *Sea X un espacio compacto; denotemos por d la distancia euclídea o la distancia del supremo sobre $\mathbb{R}^n$; dotemos a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ con la correspondiente topología uniforme. Un subespacio $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado respecto a la distancia del supremo ρ, y equicontinuo respecto a d.*

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es compacto, entonces debe ser cerrado y acotado; el teorema anterior implica que es también equicontinuo. Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es cerrado, entonces es igual a su clausura $\mathcal{G}$; si está acotado respecto a ρ, está puntualmente acotado respecto a d; y si es también equicontinuo, el teorema anterior implica que es compacto. ■

Ejercicios

1. Si X_n es metrizable con la distancia d_n, entonces

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}_n(x_n, y_n)/n\}$$

es una distancia para el espacio producto $X = \prod X_n$. Demuestre que X está totalmente acotado respecto a D si cada X_n está totalmente acotado respecto a d_n. Concluya, sin utilizar el teorema de Tychonoff, que un producto numerable de espacios metrizables compactos es compacto.

2. Sea (Y, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{C}(X, Y)$.

(a) Demuestre que si $\mathcal{F}$ es finito, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinuo.

(b) Pruebe que si f_n es una sucesión de elementos de $\mathcal{C}(X, Y)$ que converge uniformemente, entonces la colección $\{f_n\}$ es equicontinua.

(c) Suponga que $\mathcal{F}$ es una colección de funciones diferenciables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que cada $x \in \mathbb{R}$ pertenece a un entorno U en el que las derivadas de las funciones de $\mathcal{F}$ están uniformemente acotadas (esto significa que existe un M tal que $|f'(x)| \leq M$, para toda f en $\mathcal{F}$ y todo $x \in U$). Demuestre que $\mathcal{F}$ es equicontinua.

3. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema (teorema de Arzela). Sean X un espacio compacto y $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k)$. Si la colección $\{f_n\}$ está puntualmente acotada y es equicontinua, entonces la sucesión f_n tiene una subsucesión que converge uniformemente.

4. (a) Sea $f_n : I \to \mathbb{R}$ la función $f_n(x) = x^n$. La colección $\mathcal{F} = \{f_n\}$ está puntualmente acotada pero la sucesión (f_n) no tiene una subsucesión que converja uniformemente. ¿En qué punto o puntos deja de ser $\mathcal{F}$ equicontinua?

(b) Repita (a) para las funciones f_n del Ejercicio 9 de §21.

5. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ se dice que ***se anula uniformemente en el infinito*** si, dado $\epsilon > 0$, existe un subespacio compacto C de X tal que $|f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X - C$ y $f \in \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ consiste en una sola función f, decimos simplemente que f ***se anula en el infinito***. Denote por $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$ que se anulan en el infinito.

Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto; dotemos a $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ con la topología uniforme. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ tiene clausura compacta si, y sólo si, está puntualmente acotado, es equicontinuo y se anula uniformemente en el infinito.

[*Indicación:* denote por Y la compactificación por un punto de X. Demuestre que $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ es isométrico a un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$ si ambos tienen la distancia del supremo.]

6. Demuestre que nuestra prueba del teorema de Ascoli también es válida si cambiamos $\mathbb{R}^n$ por cualquier espacio métrico en el cual todos los subespacios cerrados y acotados son compactos.

***7.** Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subset X$ y $\epsilon > 0$, sea $U(A, \epsilon)$ el ϵ-entorno de A. Sea $\mathcal{H}$ la colección de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X. Si $A, B \in \mathcal{H}$, defina

$$D(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon \mid A \subset U(B, \epsilon) \text{ y } B \subset U(A, \epsilon)\}.$$

(a) Demuestre que D es una distancia sobre $\mathcal{H}$; ésta se conoce como ***distancia de Hausdorff***.

(b) Pruebe que si (X, d) es completo, también lo es $(\mathcal{H}, D)$. [*Indicación:* sea A_n una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$; pasando a una subsucesión, suponga que $D(A_n, A_{n+1}) < 1/2^n$. Defina A como el conjunto de todos los puntos x que son límite de las sucesiones $x_1, x_2, \ldots$ tales que $x_i \in A_i$, para cada i, y $d(x_i, x_{i+1}) < 1/2^i$. Demuestre que $A_n \to \bar{A}$.]

(c) Demuestre que si (X, d) está totalmente acotado, también lo está $(\mathcal{H}, D)$. [*Indicación:* dado ϵ, elija $\delta < \epsilon$ y sea S un subconjunto finito de X tal que la colección $\{B_d(x, \delta) \mid x \in S\}$ recubre X. Sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos no vacíos de S; demuestre que $\{B_D(A, \epsilon) \mid A \in \mathcal{A}\}$ recubre $\mathcal{H}$.]

(d) *Teorema. Si X es compacto con la distancia d, entonces el espacio $\mathcal{H}$ es compacto con la distancia de Hausdorff D.*

***8.** Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos; dote a $X \times Y$ con la correspondiente distancia del supremo y denote por $\mathcal{H}$ la colección de todos los subconjuntos cerrados y acotados no vacíos de $X \times Y$ con la distancia de Hausdorff resultante. Considere el espacio $\mathcal{C}(X, Y)$ con la distancia uniforme y sea gr : $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{H}$ la aplicación que asigna, a cada aplicación continua $f : X \to Y$,

su grafo

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\}.$$

(a) Demuestre que la aplicación gr es inyectiva y uniformemente continua.

(b) Denote por $\mathcal{H}_0$ el conjunto imagen de la aplicación gr y sea $g : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{H}_0$ la aplicación sobreyectiva obtenida de gr. Demuestre que si $f : X \to Y$ es uniformemente continua, entonces la aplicación g^{-1} es continua en el punto G_f.

(c) Dé un ejemplo donde g^{-1} no sea continua en el punto G_f.

(d) *Teorema. Si X es compacto, entonces gr : $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{H}$ es un embebimiento.*

§46 Convergencia puntual y convergencia compacta

Existen otras topologías útiles sobre los espacios Y^X y $\mathcal{C}(X, Y)$ adicionalmente a la topología uniforme. Consideraremos aquí tres de ellas que son conocidas como la *topología de la convergencia puntual*, la *topología de la convergencia compacta* y la *topología compacto-abierta*.

Definición. Dado un punto x en el conjunto X y un conjunto abierto U del espacio Y, sea

$$S(x, U) = \{f \mid f \in Y^X \text{ y } f(x) \in U\}.$$

Los conjuntos $S(x, U)$ determinan una subbase para una topología sobre Y^X, la cual se conoce como ***topología de la convergencia puntual*** (o ***topología punto-abierta***).

El elemento básico general para esta topología es una intersección finita de elementos subbásicos $S(x, U)$. Así, un elemento básico típico alrededor de la aplicación f consiste en todas las aplicaciones g que están "cerca" de f en una cantidad finita de puntos. Dicho entorno aparece ilustrado en la Figura 46.1 y consiste en todas las aplicaciones g cuyas gráficas intersecan los tres intervalos verticales dibujados.

La topología de la convergencia puntual sobre Y^X no es nada nueva. Es precisamente la topología producto que ya hemos estudiado. Si cambiamos X por J y denotamos el elemento general de J por α para que parezca más familiar, entonces el conjunto $S(\alpha, U)$ de todas las aplicaciones $\mathbf{x} : J \to Y$ tales que $\mathbf{x}(\alpha) \in U$ es precisamente el subconjunto $\pi_\alpha^{-1}(U)$ de Y^J, que es el elemento subbásico estándar para la topología producto.

La razón por la que llamamos a ésta la topología de la convergencia puntual proviene del siguiente teorema:

Teorema 46.1. *Una sucesión f_n de aplicaciones converge a la aplicación f en la topología de la convergencia puntual si, y sólo si, para cada $x \in X$, la sucesión $f_n(x)$ de puntos de Y converge al punto $f(x)$.*

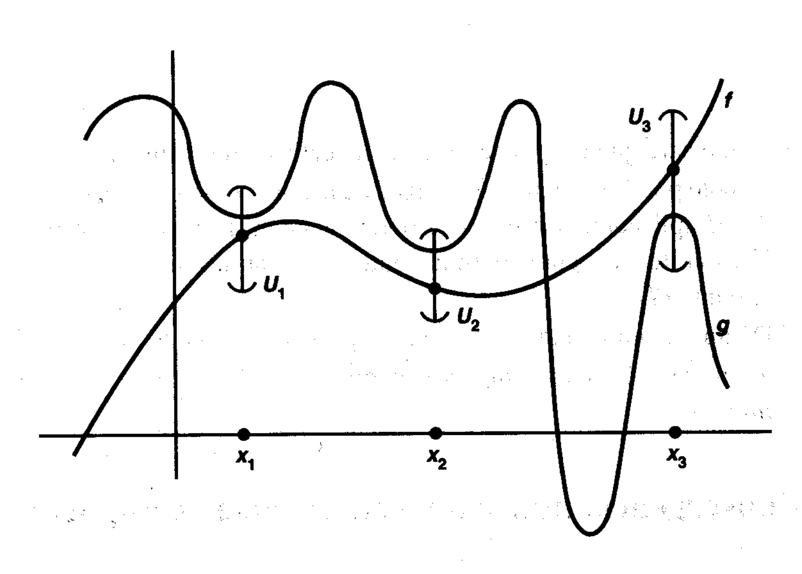


Figura 46.1

Demostración. Este resultado es justo una reformulación, en términos de la nueva notación, de un resultado estándar para la topología producto probado como Lema 43.3. ∎

EJEMPLO 1. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^I$, donde $I = [0,1]$. La sucesión (f_n) de funciones continuas dadas por $f_n(x) = x^n$ converge, en la topología de la convergencia puntual, a la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ para } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ para } x = 1. \end{cases}$$

Este ejemplo muestra que el subespacio $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ de las funciones continuas no es cerrado en $\mathbb{R}^I$ con la topología de la convergencia puntual.

Sabemos que una sucesión (f_n) de aplicaciones continuas que converge en la topología uniforme, tiene un límite continuo, y el ejemplo anterior muestra que una sucesión que converge sólo en la topología de la convergencia puntual, no necesariamente. Podemos preguntarnos si existe una topología intermedia entre estas dos que sea suficiente para asegurar que el límite de una sucesión convergente de aplicaciones continuas sea una aplicación continua. La respuesta es "sí"; asumiendo la (medianamente débil) restricción de que el espacio X sea compactamente generado, será suficiente si f_n converge a f en la topología de la convergencia compacta, la cual definimos ahora.

Definición. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Dados un elemento f de Y^X, un subespacio compacto C de X y un número $\epsilon > 0$, sea $B_C(f, \epsilon)$

el conjunto de todos aquellos elementos g de Y^X para los cuales

$$\sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\} < \epsilon.$$

Los conjuntos $B_C(f, \epsilon)$ conforman una base para una topología sobre Y^X. Se denomina ***topología de la convergencia compacta*** (o algunas veces "topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos").

Es fácil comprobar que los conjuntos $B_C(f, \epsilon)$ satisfacen las condiciones para ser una base. El paso crucial está en darse cuenta de que si $g \in B_C(f, \epsilon)$, entonces para

$$\delta = \epsilon - \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\},$$

tenemos que $B_C(g, \delta) \subset B_C(f, \epsilon)$.

La topología de la convergencia compacta se diferencia de la topología de la convergencia puntual en que el elemento básico general que contiene a f consiste en las aplicaciones que están "cerca" de f no para un número finito de puntos, sino para todos los puntos de algún conjunto compacto.

La justificación para la elección de la terminología se desprende del siguiente teorema, cuya demostración es inmediata.

Teorema 46.2. *Una sucesión $f_n : X \to Y$ de aplicaciones converge a la aplicación f en la topología de la convergencia compacta si, y sólo si, para cada subespacio compacto C de X, la sucesión $f_n|C$ converge uniformemente a $f|C$.*

Definición. Un espacio X se dice que está ***compactamente generado*** si satisface la siguiente condición: un conjunto A es abierto en X si $A \cap C$ es abierto en C, para cada subespacio compacto C de X.

Esta condición equivale a decir que un conjunto B es cerrado en X si $B \cap C$ es cerrado en C, para cada compacto C. Es una restricción relativamente débil sobre el espacio; muchos espacios familiares están compactamente generados. Por ejemplo:

Lema 46.3. *Si X es localmente compacto, o si X satisface el primer axioma de numerabilidad, entonces X está compactamente generado.*

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto. Sea $A \cap C$ abierto en C para todo subespacio compacto C de X. Probemos que A es abierto en X. Dado $x \in A$, elijamos un entorno U de x que esté incluido en un subespacio compacto C de X. Como $A \cap C$ es abierto en C por hipótesis, $A \cap U$ es abierto en U y, por tanto, abierto en X. Entonces $A \cap U$ es un entorno de x contenido en A, de manera que A es abierto en X.

Supongamos que X satisface el primer axioma de numerabilidad. Si $B \cap C$ es cerrado en C, para cada subespacio compacto C de X, probemos que B es cerrado en X. Sea x un punto de $\bar{B}$ y veamos que $x \in B$. Dado que X tiene una base numerable en x, existe una sucesión (x_n) de puntos de B que converge a x. El subespacio

$$C = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

es compacto, de manera que $B \cap C$ es cerrado en C por hipótesis. Como $B \cap C$ contiene a x_n, para todo n, también contiene a x. Por lo tanto $x \in B$, como deseábamos probar. ■

El hecho clave para los espacios compactamente generados es el siguiente:

Lema 46.4. *Si X está compactamente generado, entonces una aplicación $f : X \to Y$ es continua si para cada subespacio compacto C de X, la aplicación restringida $f|C$ es continua.*

Demostración. Sea V un subconjunto abierto de Y y probemos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Dado cualquier subespacio C de X,

$$f^{-1}(V) \cap C = (f|C)^{-1}(V).$$

Si C es compacto, este conjunto es abierto en C porque $f|C$ es continua. Dado que X está compactamente generado, deducimos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. ■

Teorema 46.5. *Sean X un espacio compactamente generado e (Y, d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es cerrado en Y^X con la topología de la convergencia compacta.*

Demostración. Sea $f \in Y^X$ un punto límite de $\mathcal{C}(X, Y)$; tenemos que probar que f es continua. Es suficiente comprobar que $f|C$ es continua para cada subespacio compacto C de X. Para cada n, consideremos el entorno $B_C(f, 1/n)$ de f; éste interseca a $\mathcal{C}(X, Y)$, de manera que podemos elegir una aplicación $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ dentro de este entorno. La sucesión de aplicaciones $f_n|C : C \to Y$ converge uniformemente a la aplicación $f|C$. Por tanto, por el teorema del límite uniforme, $f|C$ es continua. ■

Corolario 46.6. *Sean X un espacio compactamente generado e (Y, d) un espacio métrico. Si una sucesión de aplicaciones continuas $f_n : X \to Y$ converge a f en la topología de la convergencia compacta, entonces f es continua.*

Tenemos ahora tres topologías para el espacio de funciones Y^X, cuando Y es un espacio métrico. La relación entre ellas queda establecida en el siguiente teorema, cuya demostración es directa.

Teorema 46.7. *Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Para el espacio de funciones Y^X, tenemos las siguientes inclusiones de topologías:*

$$(\textit{uniforme}) \supset (\textit{convergencia compacta}) \supset (\textit{convergencia puntual}).$$

Si X es compacto, las dos primeras coinciden, y si X es discreto, las dos últimas coinciden.

Observemos que las definiciones de la topología uniforme y la topología de la convergencia compacta hacen uso específico de la distancia d para el espacio Y. Sin embargo, la topología de la convergencia puntual no lo hace; de hecho, está definida para cualquier espacio Y. Es natural preguntarse si alguna de estas topologías puede ser extendida al caso donde Y es un espacio topológico arbitrario. No existe una respuesta satisfactoria a esta cuestión para el espacio Y^X de *todas* las aplicaciones de X en Y. Sin embargo, para el subespacio $\mathcal{C}(X,Y)$ de las aplicaciones continuas, sí que *podemos* probar algo. Resulta que existe una topología general sobre $\mathcal{C}(X,Y)$, conocida como *topología compacto-abierta*, que coincide con la topología de la convergencia compacta cuando Y es un espacio métrico. Esta topología es importante ya de por sí, como veremos.

Definición. Sean X e Y espacios topológicos. Si C es un subespacio compacto de X y U es un subconjunto abierto de Y, definimos

$$S(C,U) = \{f \mid f \in \mathcal{C}(X,Y) \text{ y } f(C) \subset U\}.$$

Los conjuntos $S(C,U)$ conforman una subbase para una topología sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ que se conoce como ***topología compacto-abierta***.

Se desprende claramente de la definición que la topología compacto-abierta es más fina que la topología de la convergencia puntual. La topología compacto-abierta puede, de hecho, definirse en todo el espacio de funciones Y^X. Sin embargo, es interesante sólo para el subespacio $\mathcal{C}(X,Y)$, de manera que consideraremos esta topología únicamente para este espacio.

Teorema 46.8. *Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Sobre el conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$, la topología compacto-abierta y la topología de la convergencia compacta coinciden.*

Demostración. Si A es un subconjunto de Y y $\epsilon > 0$, sea $U(A,\epsilon)$ el ϵ-entorno de A. Si A es compacto y V es un conjunto abierto que contiene a A, entonces existe un

$\epsilon > 0$ tal que $U(A, \epsilon) \subset V$. Desde luego, el valor mínimo de la función $d(a, X - V)$ es el requerido ϵ.

Probemos primero que la topología de la convergencia compacta es más fina que la topología compacto-abierta. Sea $S(C, U)$ un elemento subbásico para la topología compacto-abierta y sea f un elemento de $S(C, U)$. Como f es continua, $f(C)$ es un subconjunto compacto del conjunto abierto U. Por lo tanto, podemos elegir ϵ de forma que el ϵ-entorno de $f(C)$ esté contenido en U. Entonces, como deseábamos,

$$B_C(f, \epsilon) \subset S(C, U).$$

Probemos ahora que la topología compacto-abierta es más fina que la topología de la convergencia compacta. Sea $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Dado un conjunto abierto alrededor de f en la topología de la convergencia compacta, existe un elemento básico de la forma $B_C(f, \epsilon)$ contenido en él. Vamos a encontrar un elemento básico para la topología compacto-abierta que contenga a f y esté contenido en $B_C(f, \epsilon)$.

Cada punto x de X tiene un entorno V_x tal que $f(\bar{V}_x)$ está contenido en un conjunto abierto U_x de Y con diámetro menor que ϵ. (Por ejemplo, escojamos V_x de forma que $f(V_x)$ esté contenido en el $\epsilon/4$-entorno de $f(x)$. Entonces $f(\bar{V}_x)$ está contenido en el $\epsilon/3$-entorno de $f(x)$, el cual tiene diámetro no más grande que $2\epsilon/3$.) Recubramos C mediante una cantidad finita de tales conjuntos V_x, digamos para $x = x_1, \ldots, x_n$. Sea $C_x = \bar{V}_x \cap C$. Entonces C_x es compacto y el elemento básico

$$S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \cdots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n})$$

contiene a f y está contenido en $B_C(f, \epsilon)$, como deseábamos. ∎

Corolario 46.9. *Sea Y un espacio métrico. La topología de la convergencia compacta sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ no depende de la distancia de Y. Por lo tanto, si X es compacto, la topología uniforme sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ no depende de la distancia de Y.*

El hecho de que la definición de la topología compacto-abierta no involucre una distancia es precisamente una de sus usuales ventajas. Otra es el hecho de que satisface el requisito de "unificar la continuidad". Hablando a grandes rasgos, esto significa que la expresión $f(x)$ es continua no sólo en la "variable" x, sino que es continua conjuntamente en ambas "variables" x y f. Siendo más precisos, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 46.10. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y dotemos a $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología compacto-abierta. Entonces la aplicación*

$$e : X \times \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow Y$$

definida por la ecuación

$$e(x, f) = f(x)$$

es continua.

La aplicación e se conoce como ***aplicación evaluación.***

Demostración. Dado un punto (x, f) de $X \times \mathcal{C}(X, Y)$ y un conjunto abierto V de Y alrededor del punto imagen $e(f, x) = f(x)$, deseamos encontrar un conjunto abierto alrededor de (x, f) que sea aplicado sobre V mediante e. Primero, utilizando la continuidad de f y el hecho de que X es de Hausdorff y localmente compacto, podemos escoger un conjunto abierto U alrededor de x con clausura compacta $\bar{U}$, tal que f aplica $\bar{U}$ sobre V. Entonces consideremos el conjunto abierto $U \times S(\bar{U}, V)$ en $X \times \mathcal{C}(X, Y)$. Es un conjunto abierto que contiene a (x, f). Y si (x', f') pertenece a este conjunto, entonces $e(x', f') = f'(x')$ pertenece a V, como deseábamos. ■

Una consecuencia de este teorema es el teorema que sigue. Es útil en topología algebraica.

Definición. Dada una aplicación $f : X \times Z \to Y$, existe una aplicación asociada $F : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$, definida por la ecuación

$$(F(z))(x) = f(x, z).$$

Recíprocamente, dada $F : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$, esta ecuación define la correspondiente aplicación $f : X \times Z \to Y$. Decimos que F es la aplicación de Z en $\mathcal{C}(X, Y)$ que está ***inducida*** por f.

***Teorema 46.11.** *Sean X e Y espacios topológicos y consideremos en $\mathcal{C}(X, Y)$ la topología compacto-abierta. Si $f : X \times Z \to Y$ es continua, entonces la aplicación inducida $F : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ también es continua. El recíproco es cierto si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto.*

Demostración. Supongamos primero que F es continua y que X es de Hausdorff localmente compacto. Se sigue que f es continua, ya que f es igual a la composición

$$X \times Z \xrightarrow{i_X \times F} X \times \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{e} Y$$

donde i_X es la aplicación identidad de X.

Supongamos ahora que f es continua. Para comprobar la continuidad de F, tomemos un punto z_0 de Z y un elemento subbásico $S(C, U)$ para $\mathcal{C}(X, Y)$ que contiene a $F(z_0)$, y encontremos un entorno W de z_0 que sea aplicado mediante F en $S(C, U)$. Esto será suficiente.

El hecho de que $F(z_0)$ esté en $S(C,U)$ significa simplemente que $(F(z_0))(x) = f(x, z_0)$ está en U, para todo $x \in C$, es decir, $f(C \times z_0) \subset U$. La continuidad de f implica que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en $X \times Z$ que contiene a $C \times z_0$. Entonces

$$f^{-1}(U) \cap (C \times Z)$$

es un conjunto abierto en el subespacio $C \times Z$ que contiene la rebanada $C \times z_0$. El lema del tubo de §26 implica que existe un entorno W de z_0 en Z tal que el tubo completo $C \times W$ está contenido en $f^{-1}(U)$ (véase la Figura 46.2). Entonces, para $z \in W$ y $x \in C$, tenemos que $f(x,z) \in U$. Por lo tanto, $F(W) \not\subset S(C,U)$, como deseábamos probar. ■

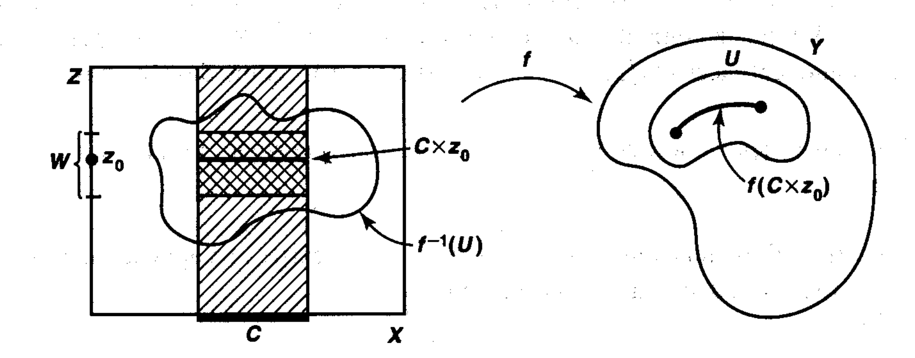


Figura 46.2

Vamos a abordar brevemente las relaciones existentes entre la topología compacto-abierta y el concepto de *homotopía*, el cual surge en topología algebraica.

Si f y g son aplicaciones continuas de X en Y, decimos que f y g son *homotópicas* si existe una aplicación continua

$$h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$. La aplicación h se llama *homotopía* entre f y g.

Hablando a grandes rasgos, una homotopía es una "familia uniparamétrica continua" de aplicaciones de X en Y. Siendo más precisos, observemos que una homotopía h puede verse como una aplicación

$$H : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$$

que asigna, a cada valor del parámetro t en $[0,1]$, la correspondiente aplicación continua de X en Y. Suponiendo que X es de Hausdorff y localmente compacto, vemos que h es continua si, y sólo si, H es continua. Esto significa que una homotopía h entre f y g se corresponde precisamente con un *camino* en el espacio de funciones $\mathcal{C}(X,Y)$ desde el punto f de $\mathcal{C}(X,Y)$ al punto g.

Volveremos a un estudio más detallado de la homotopía en la Parte II del libro.

Ejercicios

1. Demuestre que los conjuntos $B_C(f, \epsilon)$ forman una base para una topología sobre Y^X.

2. Pruebe el Teorema 46.7.

3. Demuestre que el conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones acotadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología uniforme, pero no con la topología de la convergencia compacta.

4. Considere la sucesión de funciones continuas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = x/n.$$

¿En cuál de las tres topologías del Teorema 46.7 converge esta sucesión? Responda a la misma cuestión para la sucesión dada en el Ejercicio 9 de §21.

5. Considere la sucesión de funciones $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

(a) Demuestre que (f_n) converge en la topología de la convergencia compacta y concluya que la función límite es continua (éste es un hecho estándar sobre series de potencias).

(b) Pruebe que (f_n) no converge en la topología uniforme.

6. Demuestre que, con la topología compacto-abierta, $\mathcal{C}(X, Y)$ es de Hausdorff si Y es de Hausdorff, y regular si Y es regular. [*Indicación:* si $\bar{U} \subset V$, entonces $\overline{S(C, U)} \subset S(C, V)$.]

7. Demuestre que si Y es de Hausdorff y localmente compacto, entonces la composición de aplicaciones

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

es continua, siempre que se utilice la topología compacto-abierta. [*Indicación:* si $g \circ f \in S(C, U)$, encuentre V tal que $f(C) \subset V$ y $g(\bar{V}) \subset U$.]

8. Denote por $\mathcal{C}'(X, Y)$ el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ con alguna topología $\mathcal{T}$. Demuestre que si la aplicación evaluación

$$e : X \times \mathcal{C}'(X, Y) \to Y$$

es continua, entonces $\mathcal{T}$ contiene a la topología compacto-abierta. [*Indicación:* la aplicación inducida $E : \mathcal{C}'(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Y)$ es continua.]

9. Damos aquí una aplicación (inesperada) del Teorema 46.11 a las aplicaciones cociente (compare con el Ejercicio 11 de §29).

Teorema. Si $p : A \to B$ es una aplicación cociente y X es de Hausdorff y localmente compacto, entonces $i_X \times p : X \times A \to X \times B$ es una aplicación cociente.

Demostración.

(a) Sea Y el espacio cociente inducido por $i_X \times p$ y sea $q : X \times A \to Y$ la aplicación cociente. Demuestre que existe una aplicación continua biyectiva $f : Y \to X \times B$ tal que $f \circ q = i_X \times p$.

(b) Sea $g = f^{-1}$. Sean $G : B \to \mathcal{C}(X, Y)$ y $Q : A \to \mathcal{C}(X, Y)$ las aplicaciones inducidas por g y q, respectivamente. Demuestre que $Q = G \circ p$.

(c) Demuestre que Q es continua y concluya que G es continua, de manera que g es continua.

10.** Un espacio es localmente compacto si puede ser recubierto por conjuntos abiertos de modo que cada uno de los cuales esté contenido en un subespacio compacto de X. Se dice que es ***σ-compacto si puede ser recubierto por una cantidad numerable de tales conjuntos abiertos.

(a) Demuestre que si X es localmente compacto y 2AN, entonces X es σ-compacto.

(b) Sea (Y, d) un espacio métrico. Demuestre que si X es σ-compacto, existe una distancia para la topología de la convergencia compacta sobre Y^X tal que si (Y, d) es completo, entonces Y^X es completo con esta distancia. [*Indicación:* sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección numerable de subespacios compactos de X cuyos interiores recubren X. Denote por Y_i el conjunto de todas las aplicaciones de A_i en Y, con la topología uniforme. Defina un homeomorfismo entre Y^X y un subespacio cerrado del espacio producto $Y_1 \times Y_2 \times \cdots$.]

11. Sea (Y, d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Defina una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ como sigue: dada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ y dada un función continua positiva $\delta : X \to \mathbb{R}_+$ en X, sea

$$B(f, \delta) = \{g \mid d(f(x), g(x)) < \delta(x) \text{ para todo } x \in X\}.$$

(a) Demuestre que los conjuntos $B(f, \delta)$ forman una base para una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ que se conoce como ***topología fina***.

(b) Pruebe que la topología fina contiene a la topología uniforme.

(c) Demuestre que si X es compacto, las topologías fina y uniforme coinciden.

(d) Pruebe que si X es discreto, entonces $\mathcal{C}(X, Y) = Y^X$ y las topologías fina y por cajas coinciden.

§47 El teorema de Ascoli

Probamos ahora una versión más general del teorema de Ascoli. Ésta caracteriza a los subespacios compactos de $\mathcal{C}(X,Y)$ con la topología de la convergencia compacta. La demostración, sin embargo, involucra a nuestras tres topologías estándar para los espacios de funciones: la topología de la convergencia puntual, la topología de la convergencia compacta y la topología uniforme.

Teorema 47.1 (Teorema de Ascoli). *Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Dotemos a $\mathcal{C}(X,Y)$ con la topología de la convergencia compacta y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{C}(X,Y)$.*

(a) *Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo respecto a d y el conjunto*

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

tiene clausura compacta para cada $a \in X$, entonces $\mathcal{F}$ está contenido en un subespacio compacto de $\mathcal{C}(X,Y)$.

(b) *El recíproco es cierto si X es de Hausdorff y localmente compacto.*

Demostración de (a). Consideremos sobre Y^X la topología producto, la cual coincide con la topología de la convergencia puntual. Entonces Y^X es un espacio de Hausdorff. El espacio $\mathcal{C}(X,Y)$, que tiene la topología de la convergencia compacta, *no* es un subespacio de Y^X. Sea $\mathcal{G}$ la clausura de $\mathcal{F}$ en Y^X.

Paso 1. Veamos que $\mathcal{G}$ es un subespacio compacto de Y^X. Dado $a \in X$, denotemos por C_a la clausura de $\mathcal{F}_a$ en Y; por hipótesis, C_a es un subespacio compacto de Y. El conjunto $\mathcal{F}$ está contenido en el espacio producto

$$\prod_{a\in X} C_a$$

ya que este producto consiste, por definición, en todas las aplicaciones $f : X \to Y$ que satisfacen la condición $f(a) \in C_a$, para todo a. Este espacio producto es compacto, por el teorema de Tychonoff, y es un subespacio cerrado del espacio producto Y^X. Dado que $\mathcal{G}$ es igual a la clausura de $\mathcal{F}$ en Y^X, $\mathcal{G}$ está contenido en $\prod C_a$; por tanto, al ser cerrado, $\mathcal{G}$ es compacto.

Paso 2. Probamos ahora que cada aplicación perteneciente a $\mathcal{G}$ es continua y, más aún, que $\mathcal{G}$ es equicontinua respecto a d.

Dados $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$, escojamos un entorno U de x_0 tal que

$$(*) \qquad d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/3 \qquad \text{para todo } f \in \mathcal{F} \text{ y todo } x \in U.$$

Vamos a demostrar que $d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$ para todo $g \in \mathcal{G}$ y todo $x \in U$; de aquí se deduce que $\mathcal{G}$ es equicontinua.

Sean $g \in \mathcal{G}$ y x un punto de U. Definamos V_x como el subconjunto de Y^X, abierto en Y^X, consistente en todos los elementos h de Y^X tales que

$$(**) \qquad d(h(x), g(x)) < \epsilon/3 \qquad \text{y} \qquad d(h(x_0), g(x_0)) < \epsilon/3.$$

Dado que g pertenece a la clausura de $\mathcal{F}$, el entorno V_x de g debe contener un elemento f de $\mathcal{F}$. Aplicando la desigualdad triangular a $(*)$ y $(**)$, se deduce que $d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$, como deseábamos.

Paso 3. Probemos que la topología producto sobre Y^X y la topología de la convergencia compacta sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ coinciden en el subconjunto $\mathcal{G}$.

En general, la topología de la convergencia compacta es más fina que la topología producto. Probemos que se tiene la inclusión inversa para el subconjunto $\mathcal{G}$. Sean g un elemento de $\mathcal{G}$ y $B_C(g, \epsilon)$ un elemento básico para la topología de la convergencia compacta sobre Y^X que contenga a g. Encontremos un elemento básico B para la topología de la convergencia puntual sobre Y^X que contenga a g y tal que

$$[B \cap \mathcal{G}] \subset [B_C(g, \epsilon) \cap \mathcal{G}].$$

Utilizando la equicontinuidad de $\mathcal{G}$ y la compacidad de C, podemos recubrir C con una cantidad finita de conjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de X, que contenga puntos $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente, tales que, para cada i, se verifica

$$d(g(x), g(x_i)) < \epsilon/3$$

para $x \in U_i$ y $g \in \mathcal{G}$. Entonces definimos B como el elemento básico para Y^X dado por

$$B = \{h \mid h \in Y^X \text{ y } d(h(x_i), g(x_i)) < \epsilon/3 \text{ para } i = 1, \ldots, n\}.$$

Probemos que si h es un elemento de $B \cap \mathcal{G}$, entonces h pertenece a $B_C(g, \epsilon)$. Es decir, probemos que $d(h(x), g(x)) < \epsilon$, para $x \in C$. Dado $x \in C$, escojamos i tal que $x \in U_i$. Entonces

$$d(h(x), h(x_i)) < \epsilon/3 \qquad \text{y}$$
$$d(g(x), g(x_i)) < \epsilon/3$$

ya que $x \in U_i$ y $g, h \in \mathcal{G}$, mientras que

$$d(h(x_i), g(x_i)) < \epsilon/3$$

porque $h \in B$. Se sigue, por la desigualdad triangular, que $d(h(x), g(x)) < \epsilon$, como deseábamos.

Paso 4. Completemos la demostración. El conjunto $\mathcal{G}$ contiene a $\mathcal{F}$ y está contenido en $\mathcal{C}(X, Y)$. Es compacto como subespacio de Y^X con la topología producto. Y,

por el resultado que acabamos de probar, es también compacto como subespacio de $\mathcal{C}(X,Y)$ con la topología de la convergencia compacta.

Demostración de (b). Sea $\mathcal{H}$ un subespacio compacto de $\mathcal{C}(X,Y)$ que contenga a $\mathcal{F}$. Probemos que $\mathcal{H}$ es equicontinuo y que $\mathcal{H}_a$ es compacto, para cada $a \in X$. Se tendrá entonces que $\mathcal{F}$ es equicontinuo (dado que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$) y que $\mathcal{F}_a$ está contenido en el subespacio compacto $\mathcal{H}_a$ de Y, de manera que $\bar{\mathcal{F}}_a$ es compacto.

Para probar que $\mathcal{H}_a$ es compacto, consideremos la composición de la aplicación

$$j : \mathcal{C}(X,Y) \to X \times \mathcal{C}(X,Y)$$

definida por $j(f) = a \times f$, y la aplicación evaluación

$$e : X \times \mathcal{C}(X,Y) \to Y$$

dada por la ecuación $e(x \times f) = f(x)$. La aplicación j es obviamente continua y la aplicación e es continua por los Teoremas 46.8 y 46.10. La composición $e \circ j$ aplica $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}_a$; como $\mathcal{H}$ es compacto, también lo es $\mathcal{H}_a$.

Vamos a demostrar ahora que $\mathcal{H}$ es equicontinua en a, respecto a la distancia d. Sea A un subespacio compacto de X que contenga un entorno de a. Es suficiente probar que el subconjunto

$$\mathcal{R} = \{f|A : f \in \mathcal{H}\}$$

de $\mathcal{C}(A,Y)$ es equicontinuo en a.

Dotemos a $\mathcal{C}(A,Y)$ con la topología de la convergencia compacta. Veamos que la aplicación restricción

$$r : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(A,Y)$$

es continua. Sea f un elemento de $\mathcal{C}(X,Y)$ y sea $B = B_C(f|A,\epsilon)$ un elemento básico para $\mathcal{C}(A,Y)$ conteniendo a $f|A$, donde C es un subespacio compacto de A. Entonces C es un subespacio compacto de X y r aplica en B el entorno $B_C(f,\epsilon)$ de f en $\mathcal{C}(X,Y)$.

La aplicación r lleva $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{R}$; como $\mathcal{H}$ es compacto, también lo es $\mathcal{R}$. Ahora $\mathcal{R}$ es un subespacio de $\mathcal{C}(A,Y)$; dado que A es compacto, la topología de la convergencia compacta y la topología uniforme coinciden sobre $\mathcal{C}(A,Y)$. Se deduce del Teorema 45.1 que $\mathcal{R}$ está totalmente acotado para la distancia uniforme sobre $\mathcal{C}(A,Y)$; entonces el Lema 45.2 implica que $\mathcal{R}$ es equicontinuo respecto a d. ∎

Una versión aún más general del teorema de Ascoli la podemos encontrar en [K] o [Wd]. En ésta no se supone que Y es un espacio métrico, sino únicamente que tiene lo que se conoce como una *estructura uniforme*, lo cual es una generalización del concepto de distancia.

El teorema de Ascoli tiene muchas aplicaciones en análisis, pero éstas se salen fuera del alcance de este libro (véase [K-F] para algunas de tales aplicaciones).

Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ están puntualmente acotados? ¿Cuáles son equicontinuos?

(a) La colección $\{f_n\}$, donde $f_n(x) = x + \operatorname{sen} nx$.

(b) La colección $\{g_n\}$, donde $g_n(x) = n + \operatorname{sen} x$.

(c) La colección $\{h_n\}$, donde $h_n(x) = |x|^{1/n}$.

(d) La colección $\{k_n\}$, donde $k_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$.

2. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces un subespacio $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ con la topología de la convergencia compacta tiene clausura compacta si, y sólo si, $\mathcal{F}$ está puntualmente acotado y es equicontinuo respecto a cualquiera de las distancias estándar sobre $\mathbb{R}^n$.

3. Demuestre que la versión general del teorema de Ascoli implica la versión clásica (Teorema 45.4) cuando X es de Hausdorff.

4. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema (teorema de Arzela, versión general). Sea X un espacio de Hausdorff que es σ-compacto y sea f_n una sucesión de aplicaciones $f_n : X \to \mathbb{R}^k$. Si la colección $\{f_n\}$ está puntualmente acotada y es equicontinua, entonces la sucesión f_n tiene una subsucesión que converge, en la topología de la convergencia compacta, a una aplicación continua.
[*Indicación:* demuestre que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k)$ satisface el primer axioma de numerabilidad.]

5. Sea (Y, d) un espacio métrico y sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de aplicaciones continuas y $f : X \to Y$ una aplicación (no necesariamente continua). Suponga que f_n converge a f en la topología de la convergencia puntual. Demuestre que si $\{f_n\}$ es equicontinua, entonces f es continua y f_n converge a f en la topología de la convergencia compacta.

Capítulo 8

Espacios de Baire y teoría de la dimensión

En este capítulo introducimos una clase de espacios topológicos llamados los *espacios de Baire*. La condición que caracteriza a un espacio de Baire es un poco complicada para ser enunciada pero es, a menudo, muy útil en las aplicaciones, tanto en análisis como en topología. La mayoría de los espacios que hemos estudiado son espacios de Baire. Por ejemplo, un espacio de Hausdorff es un espacio de Baire si es compacto, o incluso si es localmente compacto. Un espacio metrizable X es un espacio de Baire si es topológicamente completo, esto es, si existe una distancia en X relativa a la cual X es un espacio completo.

Como el espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ de todas las funciones continuas de un espacio X en $\mathbb{R}^n$ es completo en la distancia uniforme, se sigue que dicho espacio es un espacio de Baire en la topología uniforme. Este hecho tiene numerosas e interesantes aplicaciones.

Una aplicación se presenta en la prueba que damos en §49 acerca de la existencia de una función continua, con valores en $\mathbb{R}$, que no es diferenciable en ningún punto.

Otra aplicación surge en la rama de topología llamada *teoría de la dimensión*. En §50 definimos una versión topológica de la dimensión debida a Lebesgue. Y probamos el clásico teorema que afirma que todo espacio metrizable compacto de dimensión topológica m puede ser embebido en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$ de dimensión $N = 2m + 1$. Se deduce que toda variedad m-dimensional compacta puede ser embebida en $\mathbb{R}^{2m+1}$, lo cual generaliza el teorema del embebimiento probado en §36.

A lo largo del capítulo se supone que el lector está familiarizado con los espacios métricos completos (§43). Cuando estudiemos la teoría de la dimensión haremos uso de la sección §36, de los embebimientos de variedades así como de los resultados básicos del álgebra lineal.

§48 Espacios de Baire

La condición que caracteriza a los espacios de Baire es probablemente la "menos natural" de todas las que han sido introducidas en este libro.

En esta sección definiremos los espacios de Baire y probaremos que dos importantes familias de espacios —los espacios métricos completos y los espacios de Hausdorff compactos— están contenidas en la clase de los espacios de Baire. Después presentaremos algunas aplicaciones que, incluso si no hacen que la condición de Baire parezca más natural, probarán al menos lo útil que dicho concepto puede llegar a ser. De hecho, es una herramienta muy útil y bastante sofisticada tanto en análisis como en topología.

Definición. Recordemos que si A es un subconjunto de un espacio X, el *interior* de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos de X que están contenidos en A. Decir que A tiene ***interior vacío*** significa que A no contiene ningún conjunto abierto de X distinto del conjunto vacío. Equivalentemente, A tiene interior vacío si todo punto de A es un punto límite del complementario de A, es decir, si el conjunto complementario de A es denso en X.

EJEMPLO 1. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales tiene interior vacío como subconjunto de $\mathbb{R}$, pero el intervalo $[0, 1]$ tiene interior no vacío. El intervalo $[0, 1] \times 0$ tiene interior vacío como subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, igual que el subconjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.

Definición. Un conjunto X se dice que es un ***espacio de Baire*** si se satisface la siguiente condición: dada cualquier familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío en X, su unión $\bigcup A_n$ también tiene interior vacío en X.

EJEMPLO 2. El espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es un espacio de Baire. Los conjuntos unipuntuales de $\mathbb{Q}$ son cerrados y tienen interior vacío en $\mathbb{Q}$; sin embargo, $\mathbb{Q}$ es la unión numerable de sus subconjuntos unipuntuales.

El espacio $\mathbb{Z}_+$, por otra parte, es un espacio de Baire. Todo subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ es abierto, por lo que no existen subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$ con interior vacío, excepto el conjunto vacío. Por tanto, $\mathbb{Z}_+$ satisface trivialmente la condición de Baire.

En general, cualquier subespacio cerrado de $\mathbb{R}$, al ser un espacio métrico completo, es un espacio de Baire. Sorprende el hecho de que los números irracionales de $\mathbb{R}$ también constituyan un espacio de Baire (véase el Ejercicio 6).

La terminología utilizada originalmente por R. Baire para este concepto involucraba la palabra "categoría". Un subconjunto A de un espacio X se dice que es de *primera categoría* en X si está contenido en la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados de X con interiores vacíos en X; en otro caso se dice que es de *segunda categoría*. Usando esta terminología, podemos decir lo siguiente:

Un espacio X es un espacio de Baire si, y sólo si, todo conjunto abierto no vacío de X es de segunda categoría.

En este libro no utilizaremos los términos "primera categoría" y "segunda categoría".

La definición precedente es la "definición por conjuntos cerrados" de un espacio de Baire. Existe también una formulación que utiliza conjuntos abiertos y que es a menudo muy útil. Se enuncia en el siguiente lema:

Lema 48.1. *X es un espacio de Baire si, y sólo si, dada cualquier familia numerable $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos en X, cada uno de los cuales es denso en X, su intersección $\bigcap U_n$ es también un conjunto denso en X.*

Demostración. Recordemos que un conjunto C es denso en X si $\bar{C} = X$. El resultado es entonces una consecuencia de los dos hechos siguientes:

(1) A es cerrado en X si, y sólo si, $X - A$ es abierto en X.

(2) B tiene interior vacío en X si, y sólo si, $X - B$ es denso en X. ∎

Existen numerosos teoremas que proporcionan condiciones para que un espacio sea un espacio de Baire. El más importante es el siguiente.

Teorema 48.2 (Teorema de la categoría de Baire). *Si X es un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico completo entonces X es un espacio de Baire.*

Demostración. Dada una familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X con interiores vacíos, queremos probar que su unión $\bigcup A_n$ tiene también interior vacío en X. Así, dado un conjunto abierto no vacío U_0 de X, debemos encontrar un punto x de U_0 que no pertenezca a ninguno de los conjuntos A_n.

Consideremos el primer conjunto A_1. Por hipótesis, A_1 no contiene a U_0. Por tanto, podemos elegir un punto y de U_0 que no pertenece a A_1. La regularidad de X, junto con el hecho de que A_1 sea cerrado, nos permite escoger un entorno U_1 de y tal que

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \cap A_1 &= \varnothing, \\ \bar{U}_1 &\subset U_0. \end{aligned}$$

Si X es un espacio métrico, escogemos U_1 satisfaciendo que su diámetro sea menor que 1.

En general, dado un conjunto abierto no vacío U_{n-1}, escogemos un punto de U_{n-1} que no pertenece al conjunto cerrado A_n y entonces elegimos un entorno U_n

de dicho punto verificando

$$\begin{aligned} \bar{U}_n \cap A_n &= \varnothing, \\ \bar{U}_n &\subset U_{n-1}, \\ \text{diám}\, U_n &< 1/n \quad \text{en el caso métrico.} \end{aligned}$$

Afirmamos que la intersección $\bigcap \bar{U}_n$ es no vacía, de lo que se concluye el teorema. En efecto, si consideramos un punto x de $\bigcap \bar{U}_n$, entonces x pertenece a U_0 ya que $\bar{U}_1 \subset U_0$. Además, para cada n el punto x no pertenece a A_n, ya que $\bar{U}_n$ y A_n son conjuntos disjuntos.

La prueba de que la intersección $\bigcap \bar{U}_n$ es no vacía se realiza en dos partes, dependiendo de que X sea un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico completo. Si X es un espacio de Hausdorff compacto, consideramos la sucesión encajada $\bar{U}_1 \supset \bar{U}_2 \supset \cdots$ de subconjuntos no vacíos de X. La familia $\{\bar{U}_n\}$ tiene la propiedad de la intersección finita; como X es compacto, la intersección $\bigcap \bar{U}_n$ debe ser no vacía.

Si X es un espacio métrico completo, entonces aplicamos el siguiente lema. ∎

Lema 48.3. *Sea $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ una sucesión encajada de conjuntos cerrados no vacíos en un espacio métrico completo X. Si $\text{diám}\, C_n \to 0$ entonces $\bigcap C_n \neq \varnothing$.*

Demostración. Este resultado se propuso como un ejercicio en §43 y ahora presentamos una demostración. Para cada n escojamos un punto x_n en C_n. Como $x_n, x_m \in C_N$, para $n, m \geq N$, y el diámetro $\text{diám}\, C_N$ puede hacerse menor que cualquier ϵ dado con tal de elegir un N suficientemente grande, la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy. Supongamos que converge a un punto x. Entonces dado k, la subsucesión $x_k, x_{k+1}, \ldots$ también converge a x. Por tanto, necesariamente se cumple que x pertenece a $\bar{C}_k = C_k$ y, en consecuencia, $x \in \bigcap C_k$, como deseábamos. ∎

Ahora presentamos una aplicación de la teoría de los espacios de Baire, y presentaremos algunas más en las secciones siguientes. Esta aplicación es quizá más divertida que profunda y se refiere a una pregunta que un estudiante podría hacer en relación con las sucesiones convergentes de funciones continuas.

Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in [0,1]$. Existen ejemplos que demuestran que la función límite f puede que no sea continua. Pero uno puede quedar muy sorprendido al saber lo discontinua que tal función puede llegar a ser. Por ejemplo, ¿podría ser que fuera discontinua en todos los puntos? La respuesta es "no". Vamos a probar que f debe ser continua en un número infinito de puntos del intervalo $[0,1]$. De hecho, el conjunto de puntos de continuidad de f es denso en $[0,1]$.

Para probar este resultado necesitamos el siguiente lema:

***Lema 48.4.** *Todo subespacio abierto Y de un espacio de Baire X es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea A_n una familia numerable de conjuntos cerrados de Y que tienen interiores vacíos en Y. Probaremos que la unión $\bigcup A_n$ también tiene interior vacío en Y.

Sea $\bar{A}_n$ la clausura de A_n en X, de modo que $\bar{A}_n \cap Y = A_n$. El conjunto $\bar{A}_n$ tiene interior vacío en X. En efecto, si U es un conjunto no vacío abierto en X y contenido en $\bar{A}_n$, entonces U debe intersecar a A_n. Por tanto, $U \cap Y$ es un conjunto no vacío abierto en Y y contenido en A_n, lo que contradice la hipótesis.

Si la unión de los conjuntos A_n contiene al conjunto no vacío W abierto en Y, entonces la unión de los conjuntos $\bar{A}_n$ también contiene al conjunto W, que es abierto en X porque Y es abierto en X. Pero cada conjunto $\bar{A}_n$ tiene interior vacío en X, lo que contradice el hecho de que X sea un espacio de Baire. ■

***Teorema 48.5.** *Sea X un espacio y sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$, donde $f : X \to Y$. Si X es un espacio de Baire, el conjunto de puntos de continuidad de f es un subconjunto denso en X.*

Demostración. Dado un entero positivo N y dado un número $\epsilon > 0$, definimos el conjunto

$$A_N(\epsilon) = \{x \mid d(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon \text{ para todo } n, m \geq N\}.$$

Observemos que $A_N(\epsilon)$ es cerrado en X. Esto es consecuencia del hecho de que el conjunto de puntos x para los cuales $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon$ es cerrado en X, por la continuidad de las funciones f_n y f_m, y $A_N(\epsilon)$ es la intersección de estos conjuntos para $n, m \geq N$.

Para un número ϵ fijo, escojamos los conjuntos $A_1(\epsilon) \subset A_2(\epsilon) \subset \cdots$. La unión de todos estos conjuntos es todo el conjunto X. En efecto, dado un punto $x_0 \in X$, el hecho de que $f_n(x_0) \to f(x_0)$ implica que la sucesión $f_n(x_0)$ sea una sucesión de Cauchy y, en consecuencia, $x_0 \in A_N(\epsilon)$ para algún N.

Definamos el conjunto

$$U(\epsilon) = \bigcup_{N \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{Int} A_N(\epsilon).$$

Vamos a probar dos cosas:

(1) $U(\epsilon)$ es un conjunto abierto y denso en X.

(2) La función f es continua en los puntos del conjunto

$$C = U(1) \cap U(1/2) \cap U(1/3) \cap \cdots.$$

El teorema se sigue entonces del hecho de que X sea un espacio de Baire.

Para probar que $U(\epsilon)$ es denso en X, es suficiente probar que para cualquier conjunto V no vacío y abierto en X existe un número N tal que el conjunto $V \cap \operatorname{Int} A_N(\epsilon)$ es no vacío. Con este objetivo en mente, notemos primero que, para cada N, el conjunto $V \cap A_N(\epsilon)$ es cerrado en V. Como V es un espacio de Baire por el lema precedente, al menos uno de estos conjuntos, digamos $V \cap A_M(\epsilon)$, debe contener un conjunto W no vacío y abierto en V. Como V es abierto en X, el conjunto W es también abierto en X y, por tanto, está contenido en $\operatorname{Int} A_M(\epsilon)$.

Ahora probaremos que si $x_0 \in C$ entonces f es continua en x_0. Dado $\epsilon > 0$ encontraremos un entorno W de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para $x \in W$.

En primer lugar, elijamos un entero k tal que $1/k < \epsilon/3$. Como $x_0 \in C$ se tiene que $x_0 \in U(1/k)$ por lo que existe un número N tal que $x_0 \in \operatorname{Int} A_N(1/k)$. Finalmente, la continuidad de la función f_N nos permite escoger un entorno W de x_0, contenido en $A_N(1/k)$, tal que

$$(*) \qquad d(f_N(x), f_N(x_0)) < \epsilon/3 \qquad \text{para } x \in W.$$

Como $W \subset A_N(1/k)$ entonces se tiene

$$d(f_n(x), f_N(x)) \leq 1/k \qquad \text{para } n \geq N \text{ y } x \in W.$$

Haciendo tender $n \to \infty$ obtenemos la desigualdad

$$(**) \qquad d(f(x), f_N(x)) \leq 1/k < \epsilon/3 \qquad \text{para } x \in W.$$

En particular, como $x_0 \in W$, tenemos

$$(***) \qquad d(f(x_0), f_N(x_0)) < \epsilon/3.$$

Aplicando la desigualdad triangular a $(*)$, $(**)$ y $(***)$ se deduce el resultado. ■

Ejercicios

1. Sea X igual a la unión numerable $\bigcup B_n$. Pruebe que si X es un espacio de Baire no vacío entonces al menos uno de los conjuntos $\bar{B}_n$ tiene interior no vacío.
2. El teorema de la categoría de Baire implica que $\mathbb{R}$ no puede escribirse como una unión numerable de subconjuntos cerrados con interiores vacíos. Pruebe que esto no es cierto si no se exige que los conjuntos sean cerrados.
3. Pruebe que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.

4. Pruebe que si todo punto x de X tiene un entorno que es un espacio de Baire, entonces X es un espacio de Baire. [*Indicación:* use la formulación mediante conjuntos abiertos de la condición de Baire.]

5. Pruebe que si Y es un conjunto G_δ en X, y X es un espacio de Hausdorff compacto o un espacio métrico, entonces Y es un espacio de Baire en la topología relativa. [*Indicación:* suponga que $Y = \bigcap W_n$, donde W_n es un abierto de X, y que B_n es cerrado en Y y tiene interior vacío. Dado un abierto U_0 en X tal que $U_0 \cap Y \neq \varnothing$, encuentre una sucesión de conjuntos abiertos U_n de X con $U_n \cap Y$ no vacío y tal que

$$\begin{aligned} \bar{U}_n &\subset U_{n-1}, \\ \bar{U}_n \cap \bar{B}_n &= \varnothing, \\ \text{diám}\, U_n &< 1/n, \qquad \text{en el caso métrico,} \\ \bar{U}_n &\subset W_n \text{ .]} \end{aligned}$$

6. Pruebe que los números irracionales son un espacio de Baire.

7. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. *Si D es un subconjunto numerable y denso en $\mathbb{R}$, entonces no existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sólo sea continua precisamente en los puntos de D.*
Demostración.

(a) Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces el conjunto C de los puntos de continuidad de f es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$. [*Indicación:* sea U_n la unión de todos los conjuntos U de $\mathbb{R}$ tales que diám $f(U) < 1/n$. Pruebe que $C = \bigcap U_n$.]

(b) Pruebe que D no es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$. [*Indicación:* suponga que $D = \bigcap W_n$, donde W_n es un abierto en $\mathbb{R}$. Para $d \in D$, sea $V_d = \mathbb{R} - \{d\}$. Pruebe que W_n y V_d son densos en $\mathbb{R}$.]

8. Si f_n es una sucesión de funciones continuas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, pruebe que f es continua en un conjunto no numerable de puntos de $\mathbb{R}$.

9. Sea $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ una función biyectiva y sea $x_n = g(n)$. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 1/n \quad \text{para } x_n \in \mathbb{Q}, \\ f(x) &= 0 \qquad \text{para } x \notin \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Pruebe que f es continua en los números irracionales y discontinua en los racionales. ¿Puede encontrar una sucesión de funciones continuas f_n que converja a f?

10. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema (Principio de la acotación uniforme). Sea X un espacio métrico completo y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que para cada $a \in X$ el conjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

está acotado. Entonces existe un conjunto no vacío U abierto en X sobre el cual las funciones de $\mathcal{F}$ están uniformemente acotadas, esto es, existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$. [*Indicación:* sea $A_N = \{x : |f(x)| \leq N$ para toda $f \in \mathcal{F}\}$.]

11. Determine si $\mathbb{R}_\ell$ es un espacio de Baire.

12. Pruebe que $\mathbb{R}^J$ es un espacio de Baire en las topologías por cajas, producto y uniforme.

***13.** Sea X un espacio topológico y sea Y un espacio métrico completo. Pruebe que $\mathcal{C}(X, Y)$ es un espacio de Baire en la topología fina (véase el Ejercicio 11 de §46). [*Indicación:* dados los elementos de la base $B(f_i, \delta_i)$ tales que $\delta_1 \leq 1$, $\delta_{i+1} \leq \delta_i/3$ y $f_{i+1} \in B(f_i, \delta_i/3)$, pruebe que

$$\bigcap B(f_i, \delta_i) \neq \varnothing .]$$

*§49 Una función no diferenciable en ningún punto

Probaremos el siguiente resultado de análisis:

Teorema 49.1. *Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado $\epsilon > 0$, existe una función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $|h(x) - g(x)| < \epsilon$ para todo x, tal que g es continua y no diferenciable en ningún punto.*

Demostración. Sea $I = [0,1]$. Consideremos el espacio $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ de las funciones continuas del intervalo I en $\mathbb{R}$ con la distancia

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|\}.$$

Éste es un espacio métrico completo y, por tanto, es un espacio de Baire. Para cada n vamos a definir un subconjunto U_n de $\mathcal{C}$ que será abierto y denso, y con la propiedad de que las funciones pertenecientes a la intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$$

serán no diferenciables en ningún punto. Como $\mathcal{C}$ es un espacio de Baire, esta intersección es densa en $\mathcal{C}$, por el Lema 48.1. Por tanto, dados h y ϵ, esta intersección debe contener una función g tal que $\rho(h, g) < \epsilon$ y el teorema se deduce.

La parte ingeniosa es definir el conjunto U_n adecuadamente. En primer lugar, tomemos una función f y consideremos sus cocientes incrementales. Dado $x \in I$ y dado $0 < h \leq \frac{1}{2}$, consideremos las expresiones

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right|.$$

Como $h \leq \frac{1}{2}$, al menos uno de los números $x+h$ y $x-h$ pertenece a I, de modo que al menos una de las expresiones anteriores está definida. Sea $\Delta f(x,h)$ la mayor de las dos expresiones si ambas están definidas; en caso contrario, denota la única que está definida. Si la derivada $f'(x)$ de f en x existe, entonces es igual a los límites de estos cocientes incrementales, es decir,

$$|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \Delta f(x,h).$$

Buscaremos una función continua para la cual el límite anterior no exista nunca. Para ser más concretos, vamos a construir una función f para la cual dado x existe una sucesión de números h_n convergente a 0 para los cuales los números $\Delta f(x, h_n)$ son arbitrariamente grandes.

Esto nos proporciona la idea para construir el conjunto U_n. Dado cualquier número positivo $h \leq 1/2$, sea

$$\Delta_h f = \inf\{\Delta f(x,h) \mid x \in I\}.$$

Entonces para $n \geq 2$ definimos U_n por la condición de que una función f pertenece a U_n si, y sólo si, $\Delta_h f > n$ para algún número positivo $h \leq 1/n$.

EJEMPLO 1. Sea $\alpha > 0$ un número dado. La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por la ecuación $f(x) = 4\alpha x(1-x)$, cuya gráfica es una parábola, satisface la condición $\Delta f(x,h) \geq \alpha$ para $h = 1/4$ y todo x, como puede comprobarse. Hablando geométricamente, dicha propiedad significa que para cada x, al menos una de las líneas secantes indicadas en la Figura 49.1 tiene una pendiente cuyo valor absoluto es al menos α. Entonces si $\alpha > 4$ la función pertenece a U_4. La función g dibujada en la Figura 49.1 satisface la condición $\Delta g(x,h) \geq \alpha$ para *cualquier* $h \leq 1/4$; entonces g pertenece a U_n siempre que $\alpha > n$. La función k satisface la condición $k(x,h) \geq \alpha$ para cualquier $h \leq 1/8$; por tanto, k pertenece a U_n si $\alpha > n$.

Ahora vamos a probar las siguientes propiedades del conjunto U_n:

(1) *La intersección* $\bigcap U_n$ *está formada sólo por funciones no diferenciables en ningún punto*. Sea $f \in \bigcap U_n$. Probaremos que para cualquier punto x en $[0,1]$ el límite

$$\lim_{h\to 0} \Delta f(x,h)$$

no existe. Dado n, el hecho de que f pertenece a U_n significa que podemos encontrar un número h_n, con $0 < h_n \leq 1/n$, tal que

$$\Delta f(x, h_n) > n.$$

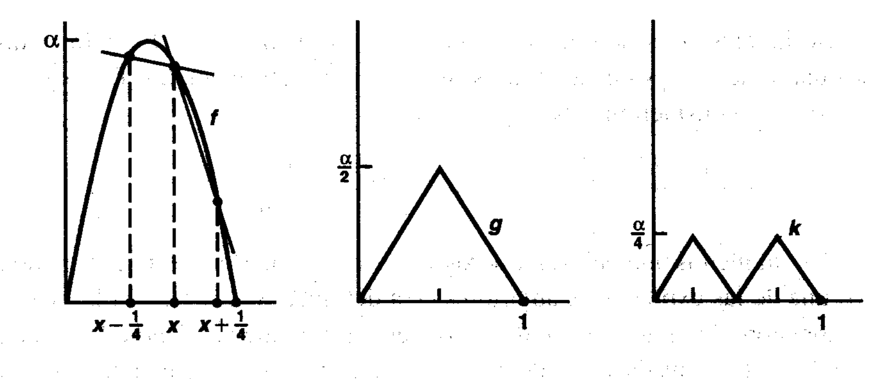


Figura 49.1

Entonces la sucesión (h_n) converge a cero, pero la sucesión $(\Delta f(x, h_n))$ no converge. Como consecuencia, f no es diferenciable en x.

(2) U_n *es abierto en* $\mathcal{C}$. Supongamos que $f \in U_n$ y consideremos un δ-entorno de f contenido en U_n. Como $f \in U_n$ existe un número h, con $0 < h \leq 1/n$, tal que $\Delta_h f > n$. Sea $M = \Delta_h f$ y escribamos

$$\delta = h(M - n)/4.$$

Afirmamos que si g es una función con $\rho(f, g) < \delta$, entonces

$$\Delta g(x, h) \geq \frac{1}{2}(M + n) > n$$

para todo $x \in I$, de forma que $g \in U_n$.

Para probar esta afirmación, supongamos en primer lugar que $\Delta f(x, h)$ es igual al cociente $|f(x + h) - f(x)|/h$. Entonces obtenemos

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right| =$$
$$(1/h)|[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]| \leq 2\delta/h = (M - n)/2.$$

Si el primer cociente incremental es mayor o igual que el valor absoluto de M, entonces el valor absoluto del segundo es mayor o igual que

$$M - \frac{1}{2}(M - n) = \frac{1}{2}(M + n).$$

Un razonamiento similar se aplica si $\Delta f(x, h)$ es igual al segundo cociente incremental.

(3) U_n *es denso en* $\mathcal{C}$. Debemos probar que dada una función $f \in \mathcal{C}$ y dados números n y $\epsilon > 0$, existe un elemento g de U_n tal que $\rho(f, g) < \epsilon$.

Sea $\alpha > n$. Construiremos la función g como una "función poligonal", es decir, una función cuya gráfica está formada por segmentos rectilíneos, donde el valor absoluto de la pendiente de cada segmento es mayor o igual que α. Se deduce inmediatamente que dicha función g debe pertenecer a U_n. En efecto, sea

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = 1$$

una partición del intervalo $[0, 1]$ tal que la restricción de g para cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ es una función lineal. Escojamos h tal que $h \leq 1/n$ y

$$h \leq \frac{1}{2} \text{mín}\{|x_i - x_{i-1}|; i = 1, \ldots, k\}.$$

Si x está en el intervalo $[0, 1]$, entonces x pertenece a algún subintervalo I_i. Si x pertenece a la primera mitad del subintervalo I_i entonces $x + h$ pertenece a I_i y el cociente $(g(x + h) - g(x))/h$ es igual a la pendiente de la función lineal $g|I_i$. De modo similar, si x pertenece a la segunda mitad de I_i, entonces $x - h$ pertenece a la primera mitad de I_i y el cociente $(g(x - h) - g(x))/(-h)$ es igual a la pendiente de la función lineal $g|I_i$. En cualquier caso, $\Delta g(x, h) \geq \alpha$, de lo que se concluye que $g \in U_n$, como deseábamos.

Ahora, dados f, ϵ y α vamos a construir la función poligonal g. En primer lugar, utilizamos la continuidad uniforme de f para escoger una partición del intervalo

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

con la propiedad de que la variación de f en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de la partición no sea superior a $\epsilon/4$. Para cada $i = 1, \ldots, m$, elegimos un punto $a_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Definimos una función poligonal g_1 por las siguientes ecuaciones

$$g_1(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}) & \text{para } x \in [t_{i-1}, a_i] \\ f(t_{i-1}) + m_i(x - a_i) & \text{para } x \in [a_i, t_i] \end{cases}$$

donde $m_i = (f(t_i) - f(t_{i-1}))/(t_i - a_i)$. Las gráficas de f y g_1 están representadas en la Figura 49.2.

Para escoger los puntos a_i tenemos cierta flexibilidad. Si $f(t_i) \neq f(t_{i-1})$, elegimos a_i suficientemente próximo a t_i para que

$$t_i - a_i < \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\alpha}.$$

Entonces la gráfica de g_1 estará formada por segmentos horizontales (de pendiente cero) y segmentos con una pendiente, en valor absoluto, no inferior a α.

Además, se satisface que $\rho(g_1, f) \leq \epsilon/2$. En efecto, para x en el intervalo I_i, la diferencia de $g_1(x)$ y $f(x)$ con $f(t_{i-1})$ no es superior a $\epsilon/4$ por lo que la diferencia entre ellos no es superior a $\epsilon/2$. Entonces $\rho(g_1, f) = \text{máx}\{|g_1(x) - f(x)|\} \leq \epsilon/2$.

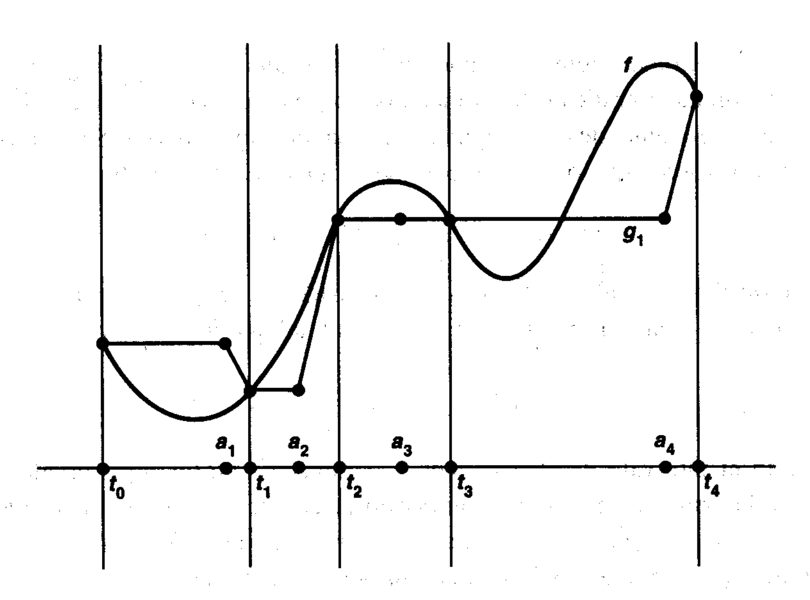


Figura 49.2

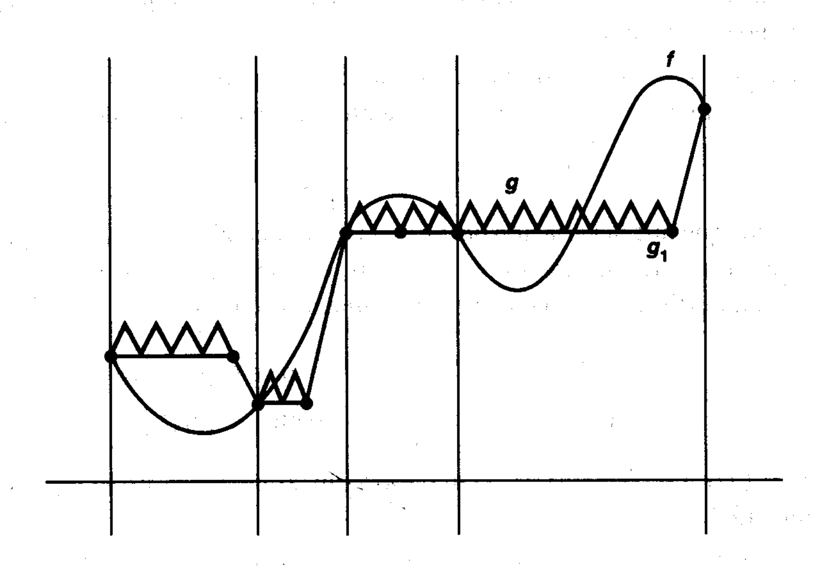


Figura 49.3

La función g_1 no es la función que estamos buscando. Definimos la función g reemplazando cada segmento horizontal de g_1 por una gráfica "sierra", cuya distancia a g_1 sea inferior a $\epsilon/2$, y con la propiedad de que el valor absoluto de la pendiente de cada segmento de la sierra no sea inferior a α. Esta parte de la construcción se deja como ejercicio al lector. El resultado es la función poligonal g que buscábamos. Véase la Figura 49.3. ■

Quizá pueda encontrar esta demostración frustrante, ya que es muy abstracta y la obtención de la función g no es constructiva. Sin embargo, en la demostración se encuentra implícito un procedimiento para construir la sucesión de funciones poligonales f_n que converge a la función f que no es diferenciable en ningún punto. Y la determinación de la función f de este modo es, al menos, tan constructiva como la definición usual de la función seno, por ejemplo, obtenida como el límite de una serie infinita.

Ejercicios

1. Verifique las propiedades enunciadas para las funciones f, g y k del Ejemplo 1.

2. Dados n y ϵ, defina una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \in U_n$ y $|f(x)| \leq \epsilon$ para todo x.

§50 Introducción a la teoría de la dimensión

En §36 hemos demostrado que si X es una variedad compacta, entonces X puede ser embebido en $\mathbb{R}^N$ para un entero positivo N. En esta sección vamos a generalizar este teorema a espacios métricos compactos arbitrarios.

Definiremos, para un espacio topológico arbitrario X, una noción de dimensión topológica. Es la "dimensión recubridora" originalmente introducida por Lebesgue. Probaremos que la dimensión topológica de cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ es, como máximo, m. También probaremos que la dimensión topológica de cualquier m-variedad compacta no es superior a m. De hecho, su dimensión topológica es exactamente m, pero no lo probaremos por su dificultad.

El teorema principal de esta sección es el teorema, debido a K. Menger y G. Nöbeling, que afirma que cualquier espacio compacto metrizable de dimensión topológica m puede ser embebido en $\mathbb{R}^N$ para $N = 2m + 1$. La demostración es una aplicación del teorema de Baire. Se deduce que cualquier m-variedad compacta puede ser embebida en $\mathbb{R}^{2m+1}$. Así mismo, también se demuestra que un espacio compacto metrizable puede ser embebido en $\mathbb{R}^N$, para un cierto N, si, y sólo si, dicho espacio tiene dimensión topológica finita.

La mayoría de los cálculos que realizaremos siguen siendo válidos sin la hipótesis de compacidad. Sin embargo, nos restringiremos a este caso cuando sea conveniente. Las generalizaciones al caso no compacto se proponen en los ejercicios.

Definición. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio X se dice que tiene ***orden*** $m + 1$ si algún punto de X pertenece a $m + 1$ elementos de $\mathcal{A}$, y no existe ningún punto en X que pertenezca a más de $m + 1$ elementos de $\mathcal{A}$.

Ahora definiremos lo que entendemos por *dimensión topológica* de un espacio X. Recordemos que dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, una colección $\mathcal{B}$ se dice que *refina* a $\mathcal{A}$, o que es un *refinamiento* de $\mathcal{A}$, si para cada elemento B de $\mathcal{B}$ existe un elemento A de $\mathcal{A}$ tal que $B \subset A$.

Definición. Un espacio X se dice que es de ***dimensión finita*** si existe algún entero m tal que para todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X existe un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X que refina a $\mathcal{A}$ y que tiene orden $m + 1$ como máximo. La ***dimensión topológica*** de X se define como el menor valor m que satisface lo anterior, y será denotada por $\dim X$.

EJEMPLO 1. *Cualquier subespacio compacto X de $\mathbb{R}$ tiene dimensión topológica 1, como máximo*. Comenzaremos definiendo un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ de orden 2. Sea $\mathcal{A}_1$ la colección de los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ de la forma $(n, n+1)$, donde n es un entero. Sea $\mathcal{A}_0$ la colección de los intervalos abiertos $(n - 1/2, n + 1/2)$, donde n de nuevo es un entero. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ por conjuntos de diámetro uno. Como dos elementos de $\mathcal{A}_0$ siempre tienen intersección vacía, y lo mismo ocurre para dos elementos de $\mathcal{A}_1$, entonces $\mathcal{A}$ tiene orden 2.

Sea X un subespacio compacto de $\mathbb{R}$. Dado un cubrimiento $\mathcal{C}$ de X por subconjuntos abiertos en X, dicho cubrimiento tiene un número de Lebesgue δ positivo. Esto significa que cualquier familia de subconjuntos de X que tengan diámetro inferior a δ es, automáticamente, un refinamiento de $\mathcal{C}$. Consideremos el homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = (\frac{1}{2}\delta)x$. Las imágenes a través de f de los elementos de $\mathcal{A}$ constituyen un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ de orden 2 cuyos elementos tienen un diámetro igual a $\frac{1}{2}\delta$; sus intersecciones con X determinan el cubrimiento abierto de X que íbamos persiguiendo.

EJEMPLO 2. *El intervalo $X = [0, 1]$ tiene dimensión topológica 1*. Sabemos que $\dim X \leq 1$. Para probar la igualdad, sea $\mathcal{A}$ el cubrimiento de X formado por los conjuntos $[0, 1)$ y $(0, 1]$. Probaremos que si $\mathcal{B}$ es un cubrimiento abierto de X que refina a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}$ tiene orden mayor o igual que 2. Como $\mathcal{B}$ refina a $\mathcal{A}$, entonces debe contener más de un elemento. Sea U uno de los elementos de $\mathcal{B}$ y sea V la unión de los restantes. Si $\mathcal{B}$ tuviera orden 1, entonces los conjuntos U y V serían disjuntos y formarían, por tanto, una separación de X. Concluimos entonces que $\mathcal{B}$ tiene orden no inferior a 2.

EJEMPLO 3. *Cualquier subconjunto compacto X de $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión topológica no superior a 2*. Para probar este hecho vamos a construir un cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ de orden 3. Comenzaremos definiendo $\mathcal{A}_2$ como la colección de todos los cuadrados abiertos unitarios de $\mathbb{R}^2$ del siguiendo modo:

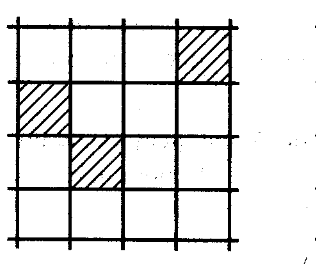
$$\mathcal{A}_2 = \{(n, n+1) \times (m, m+1) \mid n, m \text{ enteros}\}.$$

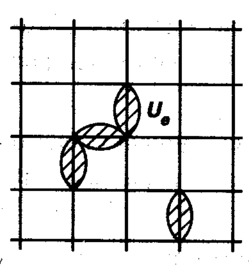
Observemos que los elementos de $\mathcal{A}_2$ son disjuntos. Entonces definimos una colección $\mathcal{A}_1$ considerando cada lado (abierto) de los cuadrados anteriores,

$$e = \{n\} \times (m, m+1) \quad \text{o} \quad e = (n, n+1) \times \{m\},$$

y lo extendemos ligeramente a un conjunto abierto U_e de $\mathbb{R}^2$, con la precaución de que si $e \neq e'$ entonces los conjuntos U_e y $U_{e'}$ son disjuntos. También escogemos cada abierto

U_e con la condición de que su diámetro sea inferior a 2. Finalmente, definimos $\mathcal{A}_0$ como la colección formada por todas las bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de los puntos $n \times m$. Véase la Figura 50.1.





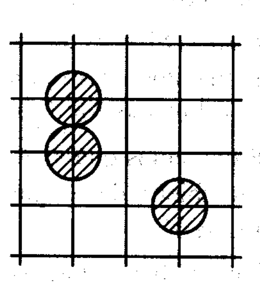


Figura 50.1

La colección de conjuntos abiertos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ recubre el plano $\mathbb{R}^2$, teniendo cada uno de sus elementos un diámetro no superior a 2. Y tiene orden 3, ya que ningún punto de $\mathbb{R}^2$ puede estar contenido en más de un conjunto de cada familia $\mathcal{A}_i$.

Sea X un subespacio compacto de $\mathbb{R}^2$. Cualquier cubrimiento abierto de X tiene número de Lebesgue δ positivo. Consideremos el homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por la ecuación $f(x) = (\delta/3)x$. Las imágenes por f de los conjuntos abiertos de la colección $\mathcal{A}$ forman un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^2$ por conjuntos cuyo diámetro es menor que δ; sus intersecciones con X constituyen el cubrimiento abierto de X requerido.

Muy pronto generalizaremos este resultado a los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Algunos hechos básicos sobre la dimensión topológica se proporcionan en los resultados siguientes.

Teorema 50.1. *Sea X un espacio de dimensión finita. Si Y es un subespacio cerrado de X entonces Y tiene dimensión finita y* $\dim Y \leq \dim X$.

Demostración. Sea $m = \dim X$ y consideremos $\mathcal{A}$ un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y. Para cada $A \in \mathcal{A}$ escogemos un conjunto abierto A' de X tal que $A' \cap Y = A$. Recubrimos X con los conjuntos abiertos A', junto con el conjunto abierto $X - Y$. Sea $\mathcal{B}$ un refinamiento de este cubrimiento, que es un cubrimiento abierto de X y tiene orden $m+1$ como máximo. Entonces la familia

$$\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y, tiene orden $m+1$ como máximo y refina a $\mathcal{A}$. ■

Teorema 50.2. *Sea $X = Y \cup Z$, donde Y y Z son subespacios cerrados de X que tienen dimensión topológica finita. Entonces*

$$\dim X = \text{máx}\{\dim Y, \dim Z\}.$$

Demostración. Sea $m = \text{máx}\{\dim Y, \dim Z\}$. Probaremos que X tiene dimensión finita y que su dimensión topológica es m como máximo. Entonces el teorema precedente nos conduce a que la dimensión topológica de X es exactamente m.

Paso 1. Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X, decimos que $\mathcal{A}$ tiene orden $m+1$ como máximo *en los puntos de* Y si no existen puntos de Y que pertenezcan a más de $m+1$ elementos de $\mathcal{A}$.

Probaremos que si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X entonces existe un cubrimiento abierto de X que refina a $\mathcal{A}$ y que tiene orden $m+1$ como máximo en los puntos de Y.

Para probar lo anterior, consideremos la colección

$$\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Dicha familia constituye un cubrimiento abierto de Y, por lo que admite un refinamiento $\mathcal{B}$ que es también un cubrimiento abierto de Y y que tiene orden $m+1$ como máximo. Dado $B \in \mathcal{B}$, escogemos un conjunto abierto U_B en X tal que $U_B \cap Y = B$. Elegimos también un elemento A_B en $\mathcal{A}$ tal que $B \subset A_B$. Sea $\mathcal{C}$ la familia formada por todos los conjuntos $U_B \cap A_B$, con $B \in \mathcal{B}$, junto con los conjuntos $A - Y$, para $A \in \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{C}$ es el cubrimiento abierto de Y que necesitamos.

Paso 2. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Vamos a construir un cubrimiento abierto $\mathcal{D}$ de X que refine a $\mathcal{A}$ y que tenga orden $m+1$ como máximo. Sea $\mathcal{B}$ un cubrimiento abierto de X que refina a $\mathcal{A}$ y que tiene orden $m+1$ como máximo en los puntos de Y. Sea $\mathcal{C}$ un cubrimiento abierto de X que refina a $\mathcal{B}$ y que tiene orden $m+1$ como máximo en los puntos de Z.

Construimos un nuevo cubrimiento $\mathcal{D}$ de X como sigue. Definimos una aplicación $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ escogiendo para cada $C \in \mathcal{C}$ un elemento $f(C)$ de $\mathcal{B}$ tal que $C \subset f(C)$. Dado $B \in \mathcal{B}$, definimos $D(B)$ como la unión de los elementos C de $\mathcal{C}$ tales que $f(C) = B$. Obviamente, $D(B)$ es vacío si B no está en la imagen de f. Sea $\mathcal{D}$ la colección de todos los conjuntos $D(B)$, para $B \in \mathcal{B}$.

Es claro que $\mathcal{D}$ es un refinamiento de $\mathcal{B}$, ya que $D(B) \subset B$ para cada B por lo que $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{A}$. Además, $\mathcal{D}$ recubre X ya que $\mathcal{C}$ recubre X y $C \subset D(f(C))$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Probaremos ahora que $\mathcal{D}$ tiene orden $m+1$ como máximo. Supongamos que $x \in D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k)$, donde los conjuntos $D(B_i)$ son distintos. Deseamos probar que $k \leq m+1$. Observemos que los conjuntos $B_1, \ldots, B_k$ son distintos ya que los conjuntos $D(B_i)$ lo son. Como $x \in D(B_i)$, para cada i podemos elegir un conjunto $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_i$ y $f(C_i) = B_i$. Los conjuntos C_i son distintos ya que los conjuntos B_i lo son. Además,

$$x \in [C_1 \cap \cdots \cap C_k] \subset [D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k)] \subset [B_1 \cap \cdots \cap B_k].$$

Si resulta que $x \in Y$, entonces $k \leq m+1$ ya que $\mathcal{B}$ tiene orden $m+1$ como máximo en los puntos de Y; por el contrario, si $x \in Z$, entonces $k \leq m+1$ porque $\mathcal{C}$ tiene orden $m+1$ como máximo en los puntos de Z. ∎

Corolario 50.3. *Sea $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$, donde cada Y_i es un subespacio cerrado de X de dimensión finita. Entonces*

$$\dim X = \text{máx}\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_k\}.$$

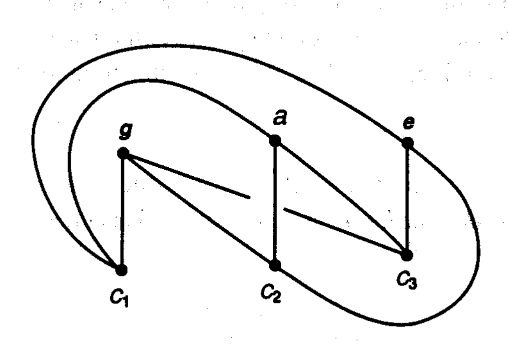
EJEMPLO 4. *Toda 1-variedad compacta X tiene dimensión topológica 1.* El espacio X puede escribirse como una unión finita de espacios homeomorfos al intervalo unidad $[0, 1]$; ahora basta aplicar el corolario precedente.

EJEMPLO 5. *Toda 2-variedad compacta X tiene dimensión topológica no superior a 2.* El espacio X puede escribirse como una unión finita de espacios homeomorfos a la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^2$ y, como en el ejemplo anterior, basta ahora aplicar el corolario precedente.

Una pregunta obvia puede plantearse: ¿la dimensión topológica de una 2-variedad es exactamente 2? La respuesta es "sí", pero la demostración no es nada sencilla y requiere las técnicas y herramientas de la topología algebraica. En la Parte II de este libro probaremos que toda región cerrada triangular de $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión topológica 2 como mínimo (véase §55). Se deduce entonces que todo subespacio compacto de $\mathbb{R}^2$ que contenga una región triangular y cerrada tiene dimensión topológica 2, de donde se llega a que toda 2-variedad compacta tiene dimensión topológica 2.

EJEMPLO 6. Un ***arco*** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado unidad; los ***extremos*** de A son los puntos p y q de A tales que $A - \{p\}$ y $A - \{q\}$ son conexos. Un ***grafo lineal*** (finito) G es un espacio de Hausdorff que se escribe como la unión finita de arcos, tales que dos arcos distintos tienen como máximo un punto en común. Los arcos de la colección se denominan ***aristas*** de G, y los extremos de los arcos se llaman ***vértices*** de G. Cada lado de G es compacto y, por tanto, cerrado en G; entonces el corolario precedente nos garantiza que G tiene dimensión topológica 1.

Dos grafos lineales particulares están representados en la Figura 50.2. El primero es un diagrama del familiar "problema del gas–agua–electricidad"; el segundo se denomina el "grafo completo de cinco vértices". Ninguno de los dos puede ser embebido en $\mathbb{R}^2$. Aunque este hecho es intuitivamente muy obvio, su demostración dista mucho de ser trivial. Presentaremos una prueba en §64.



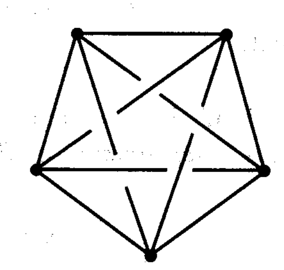


Figura 50.2

EJEMPLO 7. *Todo grafo lineal finito puede ser embebido en* $\mathbb{R}^3$. La demostración utiliza la noción de "posición general". Un conjunto S de puntos de $\mathbb{R}^3$ se dice que están en *posición general* si tres puntos de S no son nunca colineales y cuatro puntos no son coplanarios. Es fácil encontrar tales conjuntos de puntos: por ejemplo, los puntos de la curva

$$S = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

están en posición general. En efecto, si cuatro de tales puntos perteneciesen a un mismo plano $Ax + By + Cz = D$, entonces la ecuación polinómica

$$At + Bt^2 + Ct^3 = D$$

tendría cuatro raíces distintas. Y si tres de esos puntos estuviesen sobre una misma recta, podríamos tomar un punto de S de forma que tendríamos cuatro puntos sobre un mismo plano.

Ahora, dado un grafo lineal finito G, con vértices $v_1, \ldots, v_n$, escogemos un conjunto $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ de puntos de $\mathbb{R}^3$ que se encuentren en posición general. Definimos una aplicación $f : G \to \mathbb{R}^3$ asociando cada vértice v_i con el punto $\mathbf{z}_i$ y transformando el lado entre v_i y v_j en el segmento que conecta $\mathbf{z}_i$ con $\mathbf{z}_j$. Como cada lado de G es cerrado en G, el lema del pegamiento nos garantiza que la función f es continua. Ahora probaremos que f es inyectiva, de lo que concluiremos que f es un embebimiento. Sean $e = v_i v_j$ y $e' = v_k v_m$ dos lados de G. Si no tienen ningún vértice en común entonces los segmentos $f(e)$ y $f(e')$ son disjuntos, pues en caso contrario los puntos $\mathbf{z}_i$, $\mathbf{z}_j$, $\mathbf{z}_k$ y $\mathbf{z}_m$ serían coplanarios. Y si los lados e y e' tienen un vértice común, digamos $i = k$, entonces los segmentos $f(e)$ y $f(e')$ intersectan sólo en el punto $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_k$, pues en otro caso los puntos $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j$ y $\mathbf{z}_m$ serían colineales.

Ahora probaremos el teorema general del embebimiento, que nos conducirá a que todo espacio compacto metrizable de dimensión topológica m puede ser embebido en $\mathbb{R}^{2m+1}$. Este teorema es otro teorema "profundo"; no es obvio, por ejemplo, por qué $2m + 1$ es la dimensión crucial. Esto se verá a lo largo de la demostración del teorema.

Para probar el teorema del embebimiento, necesitamos generalizar al espacio $\mathbb{R}^N$ la noción de posición general. Esta extensión requiere el uso de la geometría analítica de $\mathbb{R}^N$, que no es otra cosa que el álgebra lineal usual de $\mathbb{R}^N$ reescrita en un lenguaje diferente.

Definición. Un conjunto $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ de puntos de $\mathbb{R}^N$ se dice que es ***geométricamente independiente***, o ***afinmente independiente***, si se satisfacen las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i = 0$$

sólo cuando cada $a_i = 0$.

Obviamente, un conjunto formado por un único punto es geométricamente independiente. Pero, ¿qué significa en general la independencia geométrica? Si resolvemos la segunda ecuación para a_0 y trasladamos la solución a la primera ecuación, observamos que esta definición es equivalente al enunciado que afirma que la ecuación

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

se satisface sólo si cada $a_i = 0$. Ésta es precisamente la definición de *independencia lineal* para el conjunto de vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^N$. Esto nos da una idea para visualizar la independencia geométrica: dos puntos distintos forman un conjunto geométricamente independiente; tres puntos forman un conjunto geométricamente independiente si no son colineales; cuatro puntos en $\mathbb{R}^3$ forman un conjunto geométricamente independiente si no son coplanarios. Y así sucesivamente.

De las observaciones anteriores se sigue que los puntos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (0, 0, \ldots, 0), \\ \epsilon_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots \\ \epsilon_N &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

son geométricamente independientes en $\mathbb{R}^N$. Así mismo, se deduce que en $\mathbb{R}^N$ no existe ningún conjunto de puntos geométricamente independiente con más de $N + 1$ puntos.

Definición. Sea $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^N$ que es geométricamente independiente. El ***plano P determinado por estos puntos*** se define como el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^N$ tales que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k} t_i \mathbf{x}_i, \qquad \text{donde } \sum_{i=0}^{k} t_i = 1.$$

Es fácil comprobar que P puede obtenerse como el conjunto de todos los puntos x tales que

$$(*) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)$$

para ciertos números $a_1, \ldots, a_k$. Por tanto, P no sólo puede describirse como "el plano determinado por los puntos $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$", sino también como "el plano que pasa por el punto $\mathbf{x}_0$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$".

Consideremos ahora el homeomorfismo $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definido por la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ y denominado ***traslación*** de $\mathbb{R}^N$. La expresión $(*)$ prueba que esta aplicación transforma el plano P en el subespacio vectorial V^k de $\mathbb{R}^N$ generado por los vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$. Por esta razón, a menudo P se dice que es un ***k-plano*** en $\mathbb{R}^N$.

Dos hechos se deducen fácilmente. En primer lugar, si $k < N$, el k-plano P necesariamente tiene interior vacío en $\mathbb{R}^N$ (pues V^k lo tiene). Y segundo, si $\mathbf{y}$ es cualquier punto de $\mathbb{R}^N$ que no está en P, entonces el conjunto

$$\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}\}$$

es geométricamente independiente. En efecto, si $\mathbf{y} \notin P$, entonces $T(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}_0$ no está en V^k y un teorema estándar de álgebra lineal nos garantiza que los vectores $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{x}_0\}$ son linealmente independientes, de donde se deduce nuestro resultado.

Definición. Un conjunto de puntos A en $\mathbb{R}^N$ se dice que está en ***posición general en*** $\mathbb{R}^N$ si todo subconjunto de A que contiene a lo más $N+1$ puntos es geométricamente independiente.

En el caso de $\mathbb{R}^3$, esta definición coincide con la que hemos proporcionado anteriormente, como se puede comprobar fácilmente.

Lema 50.4. *Dado un conjunto finito* $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *de puntos en* $\mathbb{R}^N$ *y dado* $\delta > 0$, *existe un conjunto* $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ *de puntos en* $\mathbb{R}^N$ *que están en posición general en* $\mathbb{R}^N$ *y tales que* $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| < \delta$ *para todo* i.

Demostración. Procederemos por inducción. Sea $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$. Supongamos que tenemos $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$ puntos de $\mathbb{R}^N$ que están en posición general. Consideremos el conjunto de todos los planos en $\mathbb{R}^N$ determinados por subconjuntos de $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p\}$ formados por N o menos elementos. Cada subconjunto anterior es geométricamente independiente y determina un k-plano en $\mathbb{R}^N$ para algún $k \leq N - 1$. Cada uno de estos planos tiene interior vacío en $\mathbb{R}^N$. Recordemos que $\mathbb{R}^N$ es un espacio de Baire. Elegimos como $\mathbf{y}_{p+1}$ un punto de $\mathbb{R}^N$, con $|\mathbf{y}_{p+1} - \mathbf{x}_{p+1}| < \delta$, que no pertenece a ninguno de esos planos. Se deduce entonces que el conjunto

$$C = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_{p+1}\}$$

está en posición general en $\mathbb{R}^N$. En efecto, sea D cualquier subconjunto de C que contenga no más de $N + 1$ elementos. Si D no contiene a $\mathbf{y}_{p+1}$ entonces D es geométricamente independiente por la hipótesis de inducción. Si $\mathbf{y}_{p+1}$ está contenido en D, entonces $D - \{\mathbf{y}_{p+1}\}$ no contiene más de N elementos y el punto $\mathbf{y}_{p+1}$ no está contenido en el plano determinado por estos puntos, por construcción. Entonces D es geométricamente independiente. ■

Teorema 50.5 (Teorema del embebimiento). *Todo espacio compacto metrizable X de dimensión topológica m puede ser embebido en $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Demostración. Sea $N = 2m + 1$. Denotemos la distancia del supremo en $\mathbb{R}^N$ por

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \text{máx}\{|x_i - y_i|; i = 1, \ldots, N\}.$$

Usaremos ρ para denotar la distancia del supremo en el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, es decir,

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}.$$

El espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ es completo en la distancia ρ, ya que $\mathbb{R}^N$ es completo en la distancia del supremo.

Sea d una distancia en el espacio X. Como X es un espacio compacto entonces d está acotada. Dada una función continua $f : X \to \mathbb{R}^N$, definimos

$$\Delta(f) = \sup\{\text{diám}\, f^{-1}(\{z\}) \mid z \in f(X)\}.$$

El número $\Delta(f)$ mide cuánto se "desvía" f de ser inyectiva; si $\Delta(f) = 0$, cada conjunto $f^{-1}(\{z\})$ consiste en un único punto, por lo que f es inyectiva.

Dado $\epsilon > 0$ definimos U_ϵ como el conjunto de todas las aplicaciones continuas $f : X \to \mathbb{R}^N$ que satisfacen $\Delta(f) < \epsilon$; dicho conjunto está formado por todas las funciones cuya "desviación" de la inyectividad es menor que ϵ. Probaremos que el conjunto U_ϵ es abierto y denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Se deduce entonces que la intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_{1/n}$$

es densa en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ y, en particular, es no vacía.

Si f es un elemento de esta intersección, entonces $\Delta(f) < 1/n$ para todo entero n. Por lo tanto, $\Delta(f) = 0$ y f es inyectiva. Como X es compacto, entonces f es un embebimiento. De este modo, el teorema del embebimiento está probado.

(1) *U_ϵ es abierto en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$*. Dado un elemento f de U_ϵ deseamos encontrar una bola $B_\rho(f, \delta)$ alrededor de f y contenida en U_ϵ. En primer lugar elegimos un número b tal que $\Delta(f) < b < \epsilon$. Observemos que si $f(x) = f(y) = z$ entonces x e y pertenecen al conjunto $f^{-1}(\{z\})$, de modo que $d(x, y)$ debe ser menor que b. Se deduce que si denotamos por A el siguiente subconjunto de $X \times X$,

$$A = \{x \times y \mid d(x, y) \geq b\},$$

entonces la función $|f(x) - f(y)|$ es positiva en A. Pero A es cerrado en $X \times X$ y, por tanto, compacto; entonces la función $|f(x) - f(y)|$ tiene un mínimo positivo en A. Sea

$$\delta = \frac{1}{2} \text{mín}\{|f(x) - f(y)|\, ; \; x \times y \in A\}.$$

Afirmamos que dicho valor de δ es suficiente para nuestros propósitos.

Supongamos que g es una aplicación tal que $\rho(f, g) < \delta$. Si $x \times y \in A$, entonces $|f(x) - f(y)| \geq 2\delta$ por definición; como la distancia de $g(x)$ y $g(y)$ a $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente, es menor que δ entonces $|g(x) - g(y)| > 0$. Por tanto, la función $|g(x) - g(y)|$ es positiva en A. Como consecuencia, si x e y son dos puntos tales que $g(x) = g(y)$ entonces necesariamente $d(x, y) < b$. Concluimos, como buscábamos, que $\Delta(g) \leq b < \epsilon$.

(2) *U_ϵ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$*. Esta es la parte difícil de la demostración. Aquí necesitaremos hacer uso de la geometría analítica de $\mathbb{R}^N$ previamente discutida. Sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, deseamos encontrar una función $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ tal que $g \in U_\epsilon$ y $\rho(f, g) < \delta$.

Recubramos X por un número finito de conjuntos abiertos $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tales que
(1) diám $U_i < \epsilon/2$ en X,
(2) diám $f(U_i) < \delta/2$ en $\mathbb{R}^N$,
(3) $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tiene orden $\leq m + 1$.

Sea $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$ (véase §36). Para cada i, elijamos un punto $x_i \in U_i$. Entonces escogemos, para cada i, un punto $\mathbf{z}_i$ en $\mathbb{R}^N$ tal que la distancia de $\mathbf{z}_i$ a $f(x_i)$ es menor que $\delta/2$ de tal modo que el conjunto de puntos $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ esté en posición general en $\mathbb{R}^N$. Finalmente, definimos $g : X \to \mathbb{R}^N$ por la ecuación

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\mathbf{z}_i.$$

Afirmamos que g es la función deseada.

En primer lugar probaremos que $\rho(f, g) < \delta$. Observemos que

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\mathbf{z}_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)f(x),$$

donde hemos utilizado la propiedad $\sum \phi_i(x) = 1$. Entonces

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x)(\mathbf{z}_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Pero sabemos que $|\mathbf{z}_i - f(x_i)| < \delta/2$ para cada i, por la elección de los puntos $\mathbf{z}_i$. Por otro lado, si $\phi_i(x) \neq 0$ entonces $x \in U_i$; como se satisface diám $f(U_i) < \delta/2$ entonces $|f(x_i) - f(x)| < \delta/2$. De la propiedad $\sum \phi_i(x) = 1$ concluimos que $|g(x) - f(x)| < \delta$ y, finalmente, deducimos que $\rho(f, g) < \delta$.

En segundo lugar vamos a probar que $g \in U_\epsilon$. Probaremos que si $x, y \in X$ y $g(x) = g(y)$ entonces x e y pertenecen a uno de los conjuntos abiertos U_i, de modo que necesariamente se verifica $d(x, y) < \epsilon/2$ (ya que diám $U_i < \epsilon/2$). Como consecuencia, $\Delta(g) \leq \epsilon/2 < \epsilon$, como deseábamos.

Supongamos que $g(x) = g(y)$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)]\mathbf{z}_i = \mathbf{0}.$$

Como el cubrimiento $\{U_i\}$ tiene orden $m+1$ como máximo, entonces a lo más $m+1$ números $\phi_i(x)$ son no nulos y lo mismo sucede para los puntos $\phi_i(y)$. Entonces la suma $\sum[\phi_i(x) - \phi_i(y)]\mathbf{z}_i$ tiene como máximo $2m+2$ términos no nulos. Observemos que la suma de los coeficientes se anula ya que

$$\sum[\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 1 - 1 = 0.$$

Los puntos $\mathbf{z}_i$ están en posición general en $\mathbb{R}^N$, de modo que cualquier subconjunto con no más de $N+1$ elementos es geométricamente independiente. Y por hipótesis se tiene $N+1 = 2m+2$. Por lo tanto, concluimos que

$$\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0$$

para todo i.

Pero $\phi_i(x) > 0$ para algún i, de modo que $x \in U_i$. Como $\phi_i(y) = \phi_i(x)$ deducimos que también $y \in U_i$, como afirmábamos. ■

Para proporcionar contenido al teorema del embebimiento necesitamos más ejemplos de espacios de dimensión finita. Probaremos el siguiente teorema.

Teorema 50.6. *Todo subespacio compacto de $\mathbb{R}^N$ tiene dimensión topológica N como máximo.*

Demostración. La prueba es una generalización de la demostración dada en el Ejemplo 3 para $\mathbb{R}^2$. Sea ρ la distancia del supremo en $\mathbb{R}^N$.

Paso 1. Comenzaremos dividiendo $\mathbb{R}^N$ en "cubos unitarios". Definimos $\mathcal{J}$ como la siguiente familia de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{J} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

y denotamos por $\mathcal{K}$ a la siguiente colección de conjuntos unipuntuales de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{K} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si M es un número entero tal que $0 \leq M \leq N$, sea $\mathcal{C}_M$ el conjunto de todos los productos

$$C = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$$

donde exactamente M de los conjuntos A_i pertenecen a $\mathcal{J}$ y el resto pertenecen a $\mathcal{K}$. Si $M > 0$, entonces C es homeomorfo al producto $(0,1)^M$ y será llamado ***M-cubo***. Si $M = 0$ entonces C es un punto y se denominará ***0-cubo***.

Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_N$. Observemos que cada punto $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^N$ pertenece a un único elemento de $\mathcal{C}$, ya que cada número real x_i pertenece a un único elemento de $\mathcal{J} \cup \mathcal{K}$. Extendemos ligeramente cada elemento C de $\mathcal{C}$ hasta formar un conjunto abierto $U(C)$ en $\mathbb{R}^N$, de diámetro inferior a 3/2, tal que si C y D son dos M-cubos diferentes entonces $U(C)$ y $U(D)$ son disjuntos.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ un punto de un M-cubo C. Probaremos que existe un número $\epsilon(\mathbf{x}) > 0$ tal que el $\epsilon(\mathbf{x})$-entorno de $\mathbf{x}$ no corta a ningún otro cubo distinto de C. Si C es un 0-cubo, tomamos $\epsilon(\mathbf{x}) = 1/2$ y hemos finalizado. En otro caso, $M > 0$ y exactamente M de los números x_i no son enteros. Elegimos $\epsilon \leq 1/2$ de forma que para cada x_i que no sea un entero el intervalo $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ no contiene enteros. Si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ es un punto que pertenece al ϵ-entorno de $\mathbf{x}$, entonces y_i no es entero siempre que x_i no sea entero. Esto significa que, o bien $\mathbf{y}$ pertenece al mismo M-cubo que $\mathbf{x}$, o bien, $\mathbf{y}$ pertenece a algún L-cubo para $L > M$. En cualquier caso, el ϵ-entorno de $\mathbf{x}$ no corta a ningún otro M-cubo distinto de C.

Dado un M-cubo C, definimos el entorno $U(C)$ de C como la unión de los $\epsilon(\mathbf{x})/2$-entornos de $\mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x} \in C$. Es inmediato comprobar que si C y D son dos M-cubos distintos entonces $U(C)$ y $U(D)$ son disjuntos. Además, si $\mathbf{z}$ es un punto de $U(C)$ entonces $d(\mathbf{z}, \mathbf{x}) < \epsilon(\mathbf{x})/2 < 1/4$ para algún punto $\mathbf{x}$ de C. Como C tiene diámetro 1, entonces el conjunto $U(C)$ tiene diámetro no superior a $3/2$.

Paso 2. Dado M tal que $0 \leq M \leq N$, definimos $\mathcal{A}_M$ como la colección de todos los conjuntos $U(C)$, donde $C \in \mathcal{C}_M$. Los elementos de $\mathcal{A}_M$ son disjuntos y el diámetro de cada uno de ellos no es superior a $3/2$. El resto de la demostración es una copia de la prueba dada en el Ejemplo 3 para $\mathbb{R}^2$. ■

Corolario 50.7. *Toda m-variedad compacta tiene dimensión topológica m, como máximo.*

Corolario 50.8. *Toda m-variedad compacta puede ser embebida en $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Corolario 50.9. *Sea X un espacio compacto metrizable. Entonces X puede ser embebido en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$ si, y sólo si, X tiene dimensión topológica finita.*

Como hemos mencionado anteriormente, mucho de lo que hemos probado se verifica sin la condición de compacidad. Le proponemos las generalizaciones apropiadas en los ejercicios que siguen.

Sí hay algo que no proponemos, la demostración de que la dimensión topológica de una m-variedad es exactamente m. Y por una buena razón: la prueba requiere las herramientas y técnicas de la topología algebraica.

Tampoco proponemos que se demuestre que $N = 2m + 1$ es el menor valor de N tal que todo espacio compacto metrizable de dimensión topológica m puede ser embebido en $\mathbb{R}^N$. La razón es la misma. Incluso en el caso de un grafo lineal, donde $m = 1$, la demostración no es trivial, como ya señalamos anteriormente.

Para resultados adicionales sobre la teoría de la dimensión, el lector puede consultar la clásica obra de Hurewicz y Wallman [H-W]. En particular, este libro discute una nueva definición, enteramente diferente, de dimensión topológica, debida a Menger y Urysohn. Es una definición inductiva. El conjunto vacío tiene dimensión -1. Y un espacio tiene dimensión no superior a n si existe una base para su topología tal que para cada elemento B de la base, la frontera de B tiene dimensión no superior a $n - 1$. La dimensión de un espacio es el menor valor de n que satisface la condición anterior. Esta noción de dimensión coincide con la nuestra para los espacios compactos metrizables.

Ejercicios

1. Pruebe que cualquier espacio discreto tiene dimensión 0.

2. Pruebe que cualquier espacio conexo T_1 con más de un punto tiene, como mínimo, dimensión 1.

3. Pruebe que la curva seno del topólogo tiene dimensión 1.

4. Pruebe que los puntos $\mathbf{0}$, ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 y $(1, 1, 1)$ están en posición general en $\mathbb{R}^3$. Haga un esquema del correspondiente embebimiento en $\mathbb{R}^3$ del grafo completo de los cinco vértices.

5. Examine la demostración del teorema del embebimiento en el caso $m = 1$ y pruebe que la aplicación g de la parte (2) aplica X en un grafo lineal de $\mathbb{R}^3$.

6. Demuestre el siguiente resultado:
   Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto con una base numerable, tal que cualquier subespacio compacto de X tiene dimensión topológica no superior a m. Entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^{2m+1}$.
   Demostración. Si $f : X \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación continua, se dice que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ si dado n, existe un subespacio compacto C de X tal que $f(x) > n$ para todo $x \in X - C$.

   (a) Sea $\bar{\rho}$ la distancia uniforme en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. Demuestre que si $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $\bar{\rho}(f, g) < 1$, entonces $g(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

(b) Pruebe que si $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, entonces f se extiende a una función continua en las compactificaciones por un punto. Concluya que si f es además inyectiva, entonces f es un homeomorfismo de X en un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^N$.

(c) Dada $f : X \to \mathbb{R}^N$ y dado un subespacio compacto C de X, sea

$$U_\epsilon(C) = \{f \mid \Delta(f|C) < \epsilon\}.$$

Pruebe que $U_\epsilon(C)$ es abierto en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$.

(d) Pruebe que si $N = 2m + 1$ entonces $U_\epsilon(C)$ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$. [*Indicación:* dada f y dados $\epsilon, \delta > 0$, escoja una función $g : C \to \mathbb{R}^N$ tal que $d(f(x), g(x)) < \delta$ para $x \in C$, y $\Delta(g) < \epsilon$. Extienda $f - g$ a una función $h : X \to [-\delta, \delta]^N$ usando el teorema de Tietze.]

(e) Pruebe que existe una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. [*Indicación:* escriba X como la unión de subespacios compactos C_n tales que $C_n \subset \operatorname{Int} C_{n+1}$ para todo n.]

(f) Sea C_n como en el apartado anterior. Use el hecho de que $\bigcap U_{1/n}(C_n)$ sea denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ para completar la demostración.

7. *Corolario.* *Toda m-variedad puede ser embebida en $\mathbb{R}^{2m+1}$ como un subespacio cerrado.*

8. Recordemos que X se dice que es *σ-compacto* si existe una colección numerable de subespacios compactos de X cuyos interiores recubren X.

Teorema. *Sea X un espacio σ-compacto. Si todo subespacio compacto de X tiene dimensión topológica no superior a m, entonces también se satisface para X.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. Encuentre un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X, que refine a $\mathcal{A}$ y que tenga orden no superior a $m + 1$, como sigue:

(a) Pruebe que $X = \bigcup X_n$, donde X_n es compacto y $X_n \subset \operatorname{Int} X_{n+1}$ para todo n. Sea $X_0 = \varnothing$.

(b) Encuentre un cubrimiento abierto $\mathcal{B}_0$ de X, que refine $\mathcal{A}$, y tal que para cada n, cada elemento de $\mathcal{B}_0$ que corta a X_n está en X_{n+1}.

(c) Suponga que $n \geq 0$ y $\mathcal{B}_n$ es un cubrimiento abierto de X, que refina $\mathcal{B}_0$, y tal que $\mathcal{B}_n$ tiene orden $m + 1$ como máximo en los puntos de X_n. Escoja un cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de X, que refine $\mathcal{B}_n$, y que tenga orden $m + 1$ como máximo en los puntos de X_{n+1}. Sea una función $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}_n$ tal que $C \subset f(C)$. Para $B \in \mathcal{B}_n$, sea $D(B)$ la unión de los conjuntos C tales que $f(C) = B$. Sea $\mathcal{B}_{n+1}$ la colección de todos los conjuntos $B \in \mathcal{B}_n$ tales que $B \cap X_{n-1} \neq \varnothing$, junto con todos los conjuntos $D(B)$ tales que $B \in \mathcal{B}_n$ y $B \cap X_{n-1} = \varnothing$. Pruebe que $\mathcal{B}_{n+1}$ es un cubrimiento abierto de

X que refina $\mathcal{B}_n$ y que tiene orden $m+1$ como máximo en los puntos de X_{n+1}.

(d) Defina $\mathcal{B}$ como sigue: un conjunto B pertenece a $\mathcal{B}$ si existe un número N tal que $B \in \mathcal{B}_n$ para todo $n \geq N$.

9. *Corolario.* *Toda m-variedad tiene dimensión topológica m como máximo.*

10. *Corolario.* *Todo subespacio cerrado de $\mathbb{R}^N$ tiene dimensión topológica N como máximo.*

11. *Corolario.* *Un espacio X puede ser embebido como un subespacio cerrado en $\mathbb{R}^N$, para algún entero N, si, y sólo si, X es localmente compacto y de Hausdorff con una base numerable, y tiene dimensión topológica finita.*

*Ejercicios complementarios: espacios localmente euclídeos

Un espacio X se dice que es ***localmente m-euclídeo*** si para cada $x \in X$ existe un entorno de x que es homeomorfo a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Todo espacio localmente euclídeo automáticamente satisface el axioma T_1, pero no necesariamente es un espacio de Hausdorff (véanse los ejercicios de §36). Sin embargo, si X es de Hausdorff y tiene una base numerable, entonces X se dice que es una ***m-variedad***.

A lo largo de los siguientes ejercicios, X denotará un espacio localmente m-euclídeo.

1. Pruebe que X es localmente compacto y localmente metrizable.

2. Considere las siguientes condiciones sobre X:

(i) X es de Hausdorff y compacto.
(ii) X es una m-variedad.
(iii) X es metrizable.
(iv) X es normal.
(v) X es de Hausdorff.

Pruebe que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v).

3. Pruebe que $\mathbb{R}$ es localmente 1-euclídeo y satisface (ii) pero no (i).

4. Pruebe que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con la topología del diccionario, es localmente 1-euclídeo y satisface (iii) pero no (ii).

5. Pruebe que la línea larga es localmente 1-euclídeo y satisface (iv) pero no (iii) (véanse los ejercicios de §24).

***6.** Existe un espacio que es localmente 2-euclídeo y que satisface (v) pero no (iv). Se construye de la siguiente manera. Sea A el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x, y, 0) \mid x > 0\}.$$

Dado un número real c, sea B_c el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$B_c = \{(x, y, c) \mid x \leq 0\}.$$

Sea X el conjunto unión de A y todos los espacios B_c, para todo número c. Consideremos la topología en X generada por la base formada por los conjuntos de los siguientes tres tipos:

(i) U, donde U es abierto en A.

(ii) V, donde V es abierto en el subespacio de B_c formado por los puntos con $x < 0$.

(iii) Para cada intervalo $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$, cada número real x y cada $\epsilon > 0$, el conjunto $A_c(I, \epsilon) \cup B_c(I, \epsilon)$, donde

$$\begin{aligned} A_c(I, \epsilon) &= \{(x, y, 0) \mid 0 < x < \epsilon \quad \text{y} \quad c + ax < y < c + bx\}, \\ B_c(I, \epsilon) &= \{(x, y, c) \mid -\epsilon < x \leq 0 \quad \text{y} \quad a < y < b\}. \end{aligned}$$

El espacio X se denomina “variedad de Prüfer”.

(a) Represente los conjuntos $A_c(I, \epsilon)$ y $B_c(I, \epsilon)$.

(b) Pruebe que los conjuntos de los tipos (i)–(iii) constituyen una base para una topología en X.

(c) Pruebe que la aplicación $f_c : \mathbb{R}^2 \to X$ dada por

$$f_c(x, y) = \begin{cases} (x, c + xy, 0) & \text{para } x > 0 \\ (x, y, c) & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

define un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en el subespacio $A \cup B_c$ de X.

(d) Pruebe que $A \cup B_c$ es abierto en X; deduzca que X es 2-euclídeo.

(e) Pruebe que X es de Hausdorff.

(f) Pruebe que X es normal. [*Indicación:* el subespacio de X

$$L = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

es cerrado y discreto. Compare con el Ejemplo 3 de §31.]

7. Pruebe que X es de Hausdorff si, y sólo si, X es completamente regular.

8. Pruebe que X es metrizable si, y sólo si, X es de Hausdorff y paracompacto.

9. Pruebe que si X es metrizable, entonces cada componente de X es una m-variedad.

Parte II

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Capítulo 9

El grupo fundamental

Uno de los problemas básicos en topología es determinar si dos espacios topológicos dados son homeomorfos. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que se aplican en casos particulares.

Demostrar que dos espacios *son* homeomorfos consiste en construir una aplicación continua de uno en el otro que tenga inversa continua, y construir aplicaciones continuas es un problema para el cual hemos desarrollado técnicas que lo permiten.

Demostrar que dos espacios *no* son homeomorfos es una cuestión diferente. Para ello, debemos probar que *no* existe ninguna aplicación continua con inversa continua. Si podemos encontrar alguna propiedad topológica que sea cierta para un espacio pero no para el otro, entonces el problema queda resuelto —los espacios no pueden ser homeomorfos. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ no puede ser homeomorfo al intervalo abierto $(0, 1)$, porque el primer espacio es compacto y el segundo no lo es. Y la recta real $\mathbb{R}$ no puede ser homeomorfa a la "recta larga" L porque $\mathbb{R}$ tiene una base numerable y L no. Tampoco la recta real $\mathbb{R}$ puede ser homeomorfa al plano $\mathbb{R}^2$; quitando un punto de $\mathbb{R}^2$ el espacio se mantiene conexo y, en cambio, quitándolo de $\mathbb{R}$ esto no ocurre.

Sin embargo, las propiedades topológicas que hemos estudiado hasta ahora no van muy lejos en la resolución del problema. Por ejemplo, ¿cómo demostramos que el plano $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo al espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$? Cuando recorremos la lista de propiedades topológicas —compacidad, conexión, conexión local, metrizabilidad, y así sucesivamente— no encontramos una propiedad que los distinga. Como otro ejemplo, consideremos superficies tales como la 2-esfera S^2, el toro T (superficie de un donut) y el doble toro $T\#T$ (superficie de un donut con dos agujeros). Ninguna de las propiedades topológicas que hemos estudiado hasta ahora permite distinguirlas.

Por tanto, debemos introducir nuevas propiedades y nuevas técnicas. Una de las propiedades más usuales es la de ser *simplemente conexo*. Probablemente el lector ya aprendió este concepto cuando estudió integrales de línea en el plano. Hablando

a grandes rasgos, decimos que un espacio X es simplemente conexo si toda curva cerrada en X puede contraerse a un punto en X (haremos más precisa la definición más adelante). La propiedad de conexión simple va a distinguir ahora entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; en efecto, quitando un punto de $\mathbb{R}^3$ el espacio obtenido sigue siendo simplemente conexo, pero al quitar un punto de $\mathbb{R}^2$ sucede lo contrario. También va a distinguir entre S^2 (que es simplemente conexa) y el toro (que no lo es). Sin embargo, no va a distinguir entre T y $T\#T$, ya que ninguno de los dos es simplemente conexo.

Existe una idea más general que el concepto de conexión simple, una idea que incluye la conexión simple como un caso particular. Ésta involucra cierto *grupo* que se conoce como *grupo fundamental* del espacio. Dos espacios que son homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos. Y la condición de conexión simple es precisamente la condición de que el grupo fundamental de X sea el grupo trivial (grupo con un elemento). De esta forma, la demostración de que S^2 y T no son homeomorfos puede ser reformulada diciendo que el grupo fundamental de S^2 es trivial y el grupo fundamental de T no lo es. El grupo fundamental va a distinguir entre más espacios que la condición de conexión simple. Por ejemplo, esto puede ser utilizado para demostrar que T y $T\#T$ no son homeomorfos; resulta que T tiene grupo fundamental abeliano y $T\#T$ no.

Es este capítulo definimos el grupo fundamental y estudiamos sus propiedades. Posteriormente las aplicamos a determinados problemas, incluyendo el problema de demostrar que algunos espacios, tales como los ya mencionados, no son homeomorfos.

Otras aplicaciones incluyen teoremas que tratan con puntos fijos y aplicaciones que conservan los puntos antípodas de la esfera, así como el bien conocido *teorema fundamental del álgebra*, el cual dice que toda ecuación polinómica con coeficientes reales o complejos tiene una raíz. Finalmente, obtenemos el famoso *teorema de la curva de Jordan*, el cual estudiaremos en el siguiente capítulo; este teorema establece que toda curva simple cerrada C en el plano separa a éste en dos componentes, donde C es la frontera común.

A lo largo del capítulo, suponemos que el lector está familiarizado con la topología cociente (§22) y la conexión local (§25).

§51 Homotopía de caminos

Antes de definir el grupo fundamental de un espacio X, vamos a considerar caminos sobre X y una relación de equivalencia entre ellos conocida como *homotopía de caminos*. Posteriormente, definiremos cierta operación sobre la colección de las clases de equivalencia que la convierte en lo que en álgebra se conoce como un *grupoide*.

Definición. Si f y f' son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y, decimos que f es ***homotópica*** a f' si existe una aplicación continua $F : X \times I \to Y$ tal que

$$F(x,0) = f(x) \qquad \text{y} \qquad F(x,1) = f'(x)$$

para cada $x \in X$ (aquí $I = [0,1]$). La aplicación F se conoce como ***homotopía*** entre f y f'. Si f es homotópica a f', escribimos $f \simeq f'$. Si $f \simeq f'$ y f' es una aplicación constante, decimos que f es ***homotópicamente nula***.

Podemos imaginar una homotopía como una familia uniparamétrica continua de aplicaciones de X en Y. Si pensamos en el parámetro t como representante del tiempo, entonces la homotopía F describe una "deformación" continua de la aplicación f en la aplicación f', cuando t se mueve de 0 a 1.

Consideremos ahora el caso especial en el cual f es un camino en X. Recordemos que si $f : [0,1] \to X$ es una aplicación continua tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$, decimos que f es un camino en X *desde* x_0 hasta x_1. También decimos que x_0 es el ***punto inicial*** y x_1 es el ***punto final*** del camino f. En este capítulo usaremos, por conveniencia, el intervalo $I = [0,1]$ como el dominio de todos los caminos.

Si f y f' son dos caminos en X, existe una relación más fuerte entre ellos que la de homotopía simplemente. Está definida como sigue:

Definición. Dos caminos f y f', que aplican el intervalo I en X, se dice que son ***homotópicos por caminos*** si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ tal que

$$\begin{aligned} F(s,0) &= f(s) \qquad \text{y} \qquad F(s,1) = f'(s), \\ F(0,t) &= x_0 \qquad\ \ \text{y} \qquad F(1,t) = x_1, \end{aligned}$$

para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de ***homotopía de caminos*** entre f y f'. Véase la Figura 51.1. Si f es homotópico por caminos a f', escribimos $f \simeq_p f'$.

La primera condición dice simplemente que F es una homotopía entre f y f', y la segunda dice que, para cada t, la aplicación f_t, definida por la ecuación $f_t(s) = F(s,t)$, es un camino desde x_0 hasta x_1. Dicho de otro modo, la primera condición dice que F representa una forma continua de deformar el camino f en el camino f', y la segunda dice que los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

Lema 51.1. *Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_p$ son relaciones de equivalencia.*

Si f es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por $[f]$.

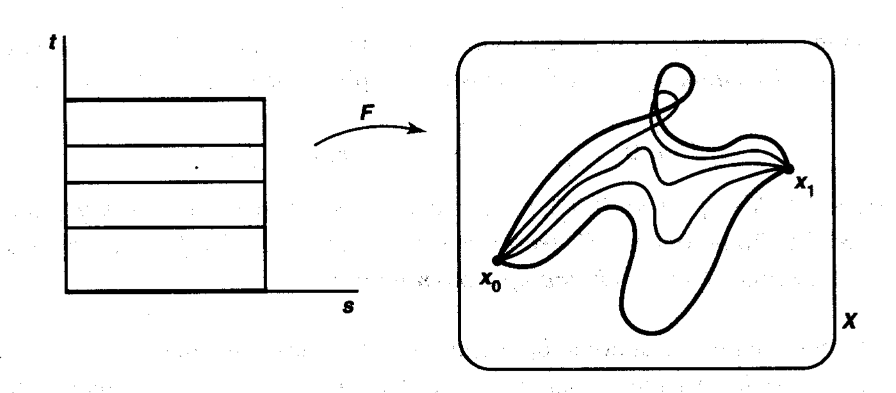


Figura 51.1

Demostración. Comprobemos las propiedades de una relación de equivalencia.

Dado f, es trivial que $f \simeq f$; la aplicación $F(x,t) = f(x)$ es la homotopía requerida. Si f es un camino, F es una homotopía de caminos.

Supongamos que $f \simeq f'$ y demostremos que $f' \simeq f$. Sea F una homotopía entre f y f'. Entonces $G(x,t) = F(x, 1-t)$ es una homotopía entre f' y f. Si F es una homotopía de caminos, también lo es G.

Supongamos que $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$. Probemos que $f \simeq f''$. Sean F una homotopía entre f y f', y F' una homotopía entre f' y f''. Definamos $G : X \times I \to Y$ por la ecuación

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(x, 2t-1) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La aplicación G está bien definida ya que, para $t = \frac{1}{2}$, tenemos $F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t-1)$. Dado que G es continua en los dos subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$, entonces G es continua en todo $X \times I$, por el lema del pegamiento. Por lo tanto, G es la homotopía requerida entre f y f''.

El lector puede comprobar que si F y F' son homotopías de caminos, entonces también lo es G (véase la Figura 51.2). ∎

EJEMPLO 1. Sean f y g dos aplicaciones cualesquiera de un espacio X en $\mathbb{R}^2$. Es fácil comprobar que f y g son homotópicas; la aplicación

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía entre ellas. Se conoce como ***homotopía por rectas*** porque lleva el punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que las une.

Si f y g son caminos de x_0 a x_1, entonces F será una homotopía de caminos, como puede comprobar el lector. Esta última situación está representada en la Figura 51.3.

En general, sea A un subespacio *convexo* de $\mathbb{R}^n$ (lo cual significa que para dos puntos cualesquiera a, b de A, el segmento de recta que los une está contenido en A). Entonces

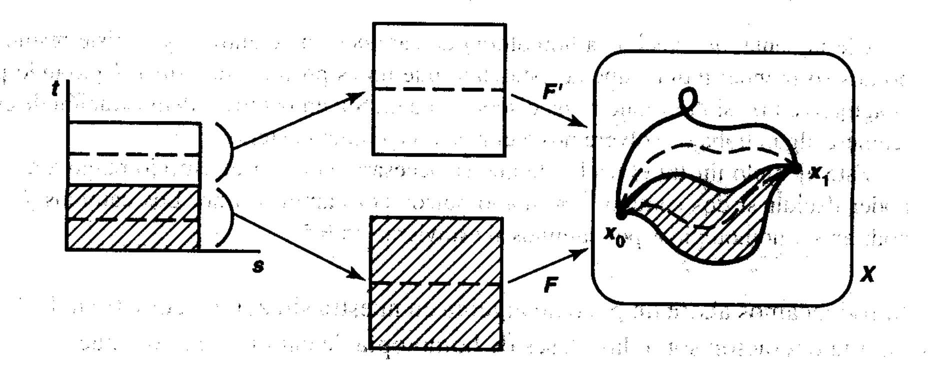


Figura 51.2

dos caminos cualesquiera f, g en A de x_0 a x_1 son homotópicos por caminos en A, ya que la homotopía por rectas F entre ellos mantiene su imagen en A.

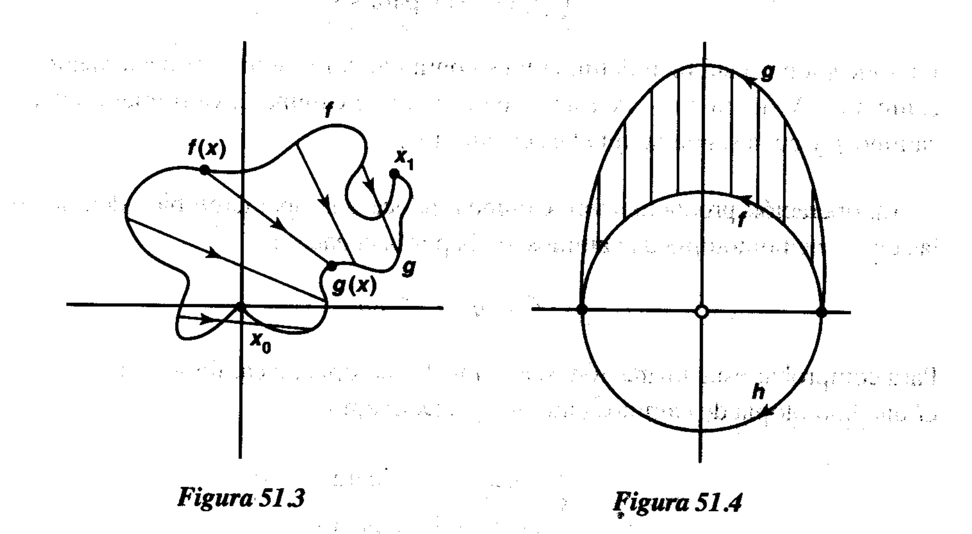


Figura 51.3

Figura 51.4

EJEMPLO 2. Denotemos por X el ***plano agujereado*** $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, el cual escribiremos como $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ para abreviar. Los siguientes caminos en X,

$$\begin{aligned} f(s) &= (\cos \pi s, \operatorname{sen} \pi s), \\ g(s) &= (\cos \pi s, 2 \operatorname{sen} \pi s) \end{aligned}$$

son homotópicos por caminos; la homotopía por rectas entre ellos es una homotopía de caminos aceptable. Pero la homotopía por rectas entre f y el camino

$$h(s) = (\cos \pi s, -\operatorname{sen} \pi s)$$

no es válida, porque su imagen no está contenida en el espacio $X = \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Véase la Figura 51.4.

Ciertamente, *no* existe una homotopía de caminos en X entre f y h. Este resultado no nos sorprende; intuitivamente está claro que no es posible "deformar f pasando por el agujero en $\mathbf{0}$" sin introducir una discontinuidad. Sin embargo, la demostración de esto requiere algún trabajo. Volveremos a ella en un ejemplo posterior.

Este ejemplo ilustra el hecho de que es necesario conocer el espacio rango antes de poder decidir si dos caminos son homotópicos por caminos o no. Los caminos f y h podrían ser homotópicos por caminos si estuvieran en $\mathbb{R}^2$.

Introduzcamos ahora un poco de álgebra en nuestra situación geométrica. Definamos cierta operación sobre las clases de homotopía de caminos como sigue:

Definición. Si f es un camino en X de x_0 a x_1, y g es un camino en X de x_1 a x_2, definimos el ***producto*** $f * g$ de f y g como el camino h dado por las ecuaciones

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua, por el lema del pegamiento; es un camino en X de x_0 a x_2. Pensamos en h como el camino cuya primera mitad es el camino f y cuya segunda mitad es el camino g.

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Para comprobar esta afirmación, sea F una homotopía de caminos entre f y f' y sea G una homotopía de caminos entre g y g'. Definamos

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dado que $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$, para todo t, la aplicación H está bien definida; es continua por el lema del pegamiento. El lector puede comprobar que H es la homotopía de caminos requerida entre $f * g$ y $f' * g'$. Está representada en la Figura 51.5.

La operación $*$ sobre clases de homotopía de caminos satisface propiedades muy parecidas a los axiomas de grupo. Estas propiedades se conocen como *propiedades de grupoide* de $*$. Una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que $[f] * [g]$ no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares $[f], [g]$ para los que $f(1) = g(0)$.

Teorema 51.2. *La operación $*$ tiene las siguientes propiedades:*

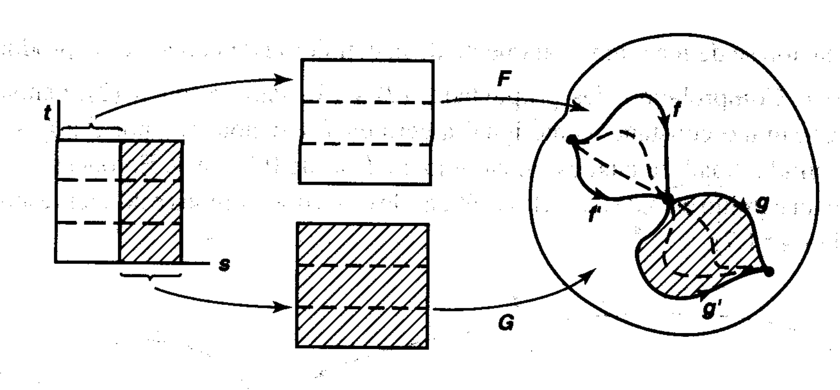


Figura 51.5

(1) (Asociatividad). Si $[f]*([g]*[h])$ está definida, también lo está $([f]*[g])*[h]$, y son iguales.

(2) (Neutro a izquierda y derecha). Dado $x \in X$, denotemos por e_x el camino constante $e_x : I \to X$ que lleva todo I al punto x. Si f es un camino en X desde x_0 hasta x_1, entonces

$$[f]*[e_{x_1}] = [f] \qquad \text{y} \qquad [e_{x_0}]*[f] = [f].$$

*(3) (Inverso). Dado el camino f en X desde x_0 hasta x_1, sea $\bar{f}$ el camino definido por $\bar{f}(s) = f(1-s)$, el cual se conoce como **inverso** de f. Entonces*

$$[f]*[\bar{f}] = [e_{x_0}] \qquad \text{y} \qquad [\bar{f}]*[f] = [e_{x_1}].$$

Demostración. Vamos a utilizar dos hechos elementales. El primero es el hecho de que si $k : X \to Y$ es una aplicación continua y si F es una homotopía de caminos en X entre los caminos f y f', entonces $k \circ F$ es una homotopía de caminos en Y entre los caminos $k \circ f$ y $k \circ f'$. Véase la Figura 51.6.

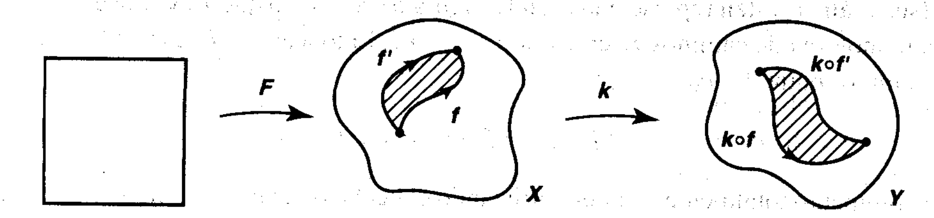


Figura 51.6

El segundo es el hecho de que si $k : X \to Y$ es una aplicación continua y si f y g son caminos en X con $f(1) = g(0)$, entonces

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g).$$

Esta ecuación se deduce inmediatamente de la definición de la operación producto $*$.

Paso 1. Comprobemos las propiedades (2) y (3). Para verificar (2), denotemos por e_0 el camino constantemente igual a cero en I y denotemos por $i : I \to I$ la aplicación identidad, la cual es un camino en I desde 0 hasta 1. Entonces $e_0 * i$ es también un camino en I de 0 a 1 (las gráficas de estos dos caminos están representadas en la Figura 51.7).

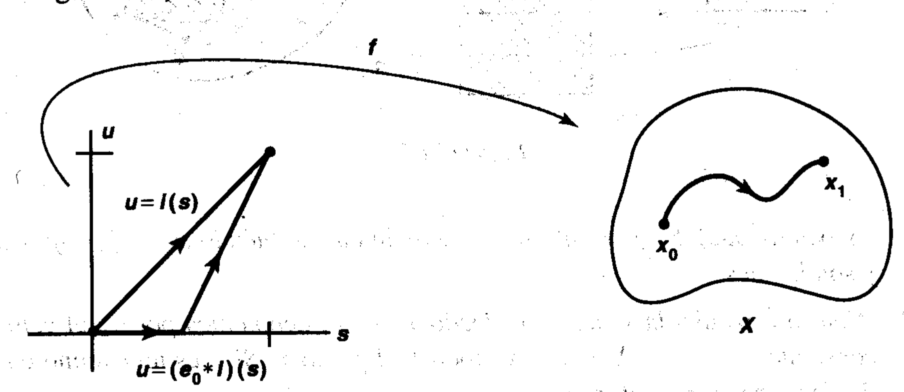


Figura 51.7

Como I es conexo, existe una homotopía de caminos G en I entre i y $e_0 * i$. Entonces $f \circ G$ es una homotopía de caminos en X entre los caminos $f \circ i = f$ y

$$f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f.$$

Siguiendo un argumento similar, utilizando el hecho de que si e_1 denota el camino constantemente 1 entonces $i * e_1$ es homotópico por caminos en I al camino i, se demuestra que $[f] * [e_{x_1}] = [f]$.

Para comprobar (3), observemos que el inverso de i es $\bar{i}(s) = 1 - s$. Entonces $i * \bar{i}$ es un camino en I comenzando y acabando en 0, igual que el camino constante e_0 (sus gráficas están representadas en la Figura 51.8). Dado que I es convexo, existe una homotopía de caminos H en I entre e_0 e $i * \bar{i}$. Entonces $f \circ H$ es una homotopía de caminos entre $f \circ e_0 = e_{x_0}$ y

$$(f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}.$$

Un argumento totalmente análogo, utilizando el hecho de que $\bar{i} * i$ es homotópico por caminos en I a e_1, demuestra que $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

Paso 2. La demostración de (1), asociatividad, es más delicada. Para ello, y también para uso posterior, será conveniente describir el producto $f * g$ de una forma diferente.

Si $[a, b]$ y $[c, d]$ son dos intervalos en $\mathbb{R}$, existe una única aplicación $p : [a, b] \to [c, d]$ de la forma $p(x) = mx + k$ que lleva a a c y b a d, denominada ***aplicación lineal***

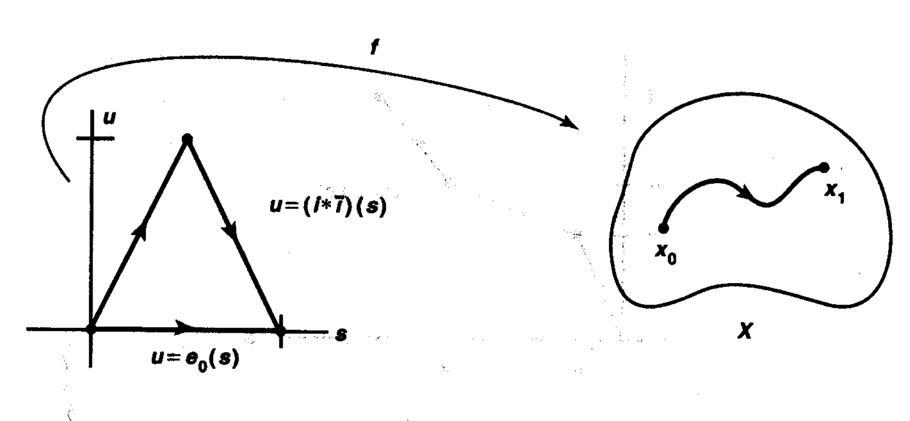


Figura 51.8

positiva de $[a, b]$ a $[c, d]$ porque su gráfica es un línea recta con pendiente positiva. Observemos que la inversa de dicha aplicación es otra de tales aplicaciones, igual que ocurre con la composición de dos aplicaciones de este tipo.

Con esta terminología, el producto $f * g$ puede describirse como sigue: en $[0, \frac{1}{2}]$ es igual a la aplicación lineal positiva de $[0, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$ compuesta con la aplicación f y en $[\frac{1}{2}, 1]$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[\frac{1}{2}, 1]$ en $[0, 1]$ compuesta con g.

Comprobamos ahora (1). Dados caminos f, g y h en X, los productos $f * (g * h)$ y $(f * g) * h$ están definidos precisamente cuando $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$. Suponiendo estas dos condiciones, definimos también un "triple producto" de los caminos f, g y h como sigue: elijamos puntos a y b de I tales que $0 < a < b < 1$ y definamos un camino $k_{a,b}$ en X de la siguiente forma: en $[0, a]$ es igual a la aplicación lineal positiva de $[0, a]$ a I, compuesta con f; en el intervalo $[a, b]$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[a, b]$ a I, compuesta con la aplicación g; y, en $[b, 1]$, es igual a la aplicación lineal positiva de $[b, 1]$ a I, compuesta con h. Ciertamente, el camino $k_{a,b}$ depende de la elección de los puntos a y b, pero su clase de homotopía de caminos no. Probemos que si c y d es otro par de puntos de I con $0 < c < d < 1$, entonces $k_{c,d}$ es homotópico por caminos a $k_{a,b}$.

Sea $p : I \to I$ la aplicación cuya gráfica está representada en la Figura 51.9. Cuando la restringimos a $[0, a]$, $[a, b]$ y $[b, 1]$, respectivamente, coincide con las aplicaciones lineales positivas de estos intervalos en $[0, c]$, $[c, d]$ y $[d, 1]$, respectivamente. Se sigue de inmediato que $k_{c,d} \circ p$ es igual a $k_{a,b}$. Pero p es un camino en I de 0 a 1 igual que la aplicación identidad $i : I \to I$. Por tanto, existe una homotopía de caminos P en I entre p e i. Entonces $k_{c,d} \circ P$ es una homotopía de caminos en X entre $k_{a,b}$ y $k_{c,d}$.

¿Qué tiene esto que ver con la asociatividad? Está muy relacionado, porque el producto $f*(g*h)$ es exactamente el triple producto $k_{a,b}$ cuando $a = 1/2$ y $b = 3/4$, como puede comprobar el lector; mientras que el producto $(f * g) * h$ coincide con

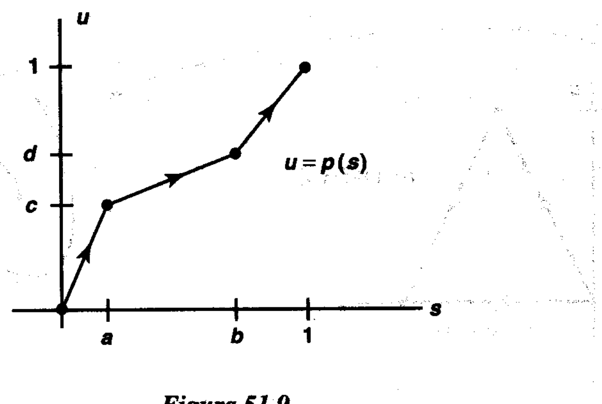


Figura 51.9

$k_{c,d}$ en el caso donde $c = 1/4$ y $d = 1/2$. Por consiguiente, los dos productos son homotópicos por caminos. ∎

El argumento que acabamos de utilizar para probar la asociatividad es válido para cualquier producto de un número finito de caminos. Hablando a grandes rasgos, podemos decir que, mientras el resultado concierna a clases de homotopía de caminos, no importa cómo se parte el intervalo cuando formamos el producto de caminos. Este resultado nos será muy útil más adelante, de manera que lo establecemos formalmente a continuación.

Teorema 51.3. *Sea f un camino en X y sean $a_0, \ldots, a_n$ números tales que $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$. Sea $f_i : I \to X$ el camino igual a la aplicación lineal positiva de I en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f. Entonces*

$$[f] = [f_1] * \cdots * [f_n].$$

Ejercicios

1. Demuestre que si $h, h' : X \to Y$ son homotópicas y $k, k' : Y \to Z$ son homotópicas, entonces $k \circ h$ y $k' \circ h'$ son homotópicas.
2. Dados espacios X e Y, denote por $[X, Y]$ el conjunto de las clases de homotopía de aplicaciones de X en Y.
   (a) Sea $I = [0, 1]$. Demuestre que, para cualquier X, el conjunto $[X, I]$ tiene un único elemento.
   (b) Demuestre que si Y es conexo por caminos, el conjunto $[I, Y]$ tiene un único elemento.
3. Un espacio X se dice que es ***contractible*** si la aplicación identidad $i_X : X \to X$ es homotópicamente nula.

(a) Demuestre que I y $\mathbb{R}$ son contractibles.
(b) Pruebe que un espacio contractible es conexo por caminos.
(c) Demuestre que si Y es contractible, entonces para cualquier X, el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.
(d) Pruebe que si X es contractible e Y es conexo por caminos, entonces $[X, Y]$ tiene un único elemento.

§52 El grupo fundamental

El conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio X no es un grupo con la operación $*$ porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no está siempre definido. Pero supongamos que cogemos un punto x_0 de X que nos sirva como "punto base" y nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en x_0. El conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación $*$. Éste será denominado *grupo fundamental* de X.

En esta sección estudiamos el grupo fundamental y deducimos algunas de sus propiedades. En particular, probaremos que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio X, un hecho que tiene una importancia crucial para el estudio de problemas de existencia de homeomorfismos.

Revisemos alguna terminología de la teoría de grupos. Supongamos que G y G' son dos grupos, con sus operaciones indicadas multiplicativamente. Un ***homomorfismo*** $f : G \to G'$ es una aplicación tal que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos x, y, por lo que automáticamente satisface las ecuaciones $f(e) = e'$ y $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, donde e y e' son los neutros de G y G', respectivamente, y el exponente -1 denota el inverso. El ***núcleo*** de f es el conjunto $f^{-1}(e')$, el cual es un subgrupo de G. Igualmente, la imagen de f es un subgrupo de G'. El homomorfismo f se dice que es un ***monomorfismo*** si es inyectivo (o, equivalentemente, el núcleo de f contiene sólo al neutro e). Se dice que es un ***epimorfismo*** si es sobreyectivo, y es un ***isomorfismo*** si es biyectivo.

Supongamos que G es un grupo y H es un subgrupo de G. Sea xH el conjunto de todos los productos xh, para $h \in H$; este conjunto se conoce como una ***clase por la izquierda*** de H en G. La colección de tales clases forman una partición de G. Análogamente, la colección de todas las clases por la derecha Hx de H en G forman una partición de G. Decimos que H es un ***subgrupo normal*** de G si $x \cdot h \cdot x^{-1} \in H$, para todo $x \in G$ y $h \in H$. En este caso, tenemos que $xH = Hx$, para todo x, de manera que nuestras dos particiones de G coinciden. Denotamos esta partición por G/H. Si definimos

$$(xH) \cdot (yH) = (x \cdot y)H$$

obtenemos una operación bien definida sobre G/H que lo convierte en grupo. Este grupo se conoce como ***cociente*** de G por H. La aplicación $f : G \to G/H$, que

lleva x a xH, es un epimorfismo con núcleo H. Recíprocamente, si $f : G \to G'$ es un epimorfismo, entonces su núcleo N es un subgrupo normal de G y f induce un isomorfismo $G/N \to G'$ que lleva xN a $f(x)$, para cada $x \in G$.

Aunque el subgrupo H de G no sea normal, será conveniente utilizar la notación G/H; en este caso, entenderemos que este conjunto es la colección de las clases por la *derecha* de H en G.

Definimos ahora el grupo fundamental.

Definición. Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X. Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se llama ***lazo*** basado en x_0. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en x_0, con la operación $*$, se denomina ***grupo fundamental*** de X relativo al ***punto base*** x_0. Se denota por $\pi_1(X, x_0)$.

Se sigue del Teorema 51.2 que la operación $*$, restringida a este conjunto, satisface los axiomas de grupo. Dados dos lazos f y g basados en x_0, el producto $f * g$ está siempre definido y es un lazo basado en x_0. La asociatividad, la existencia de un elemento neutro $[e_{x_0}]$ y la existencia de un inverso $[\bar{f}]$ para $[f]$ son inmediatas.

Algunas veces este grupo se conoce como ***primer grupo de homotopía*** de X, lo cual implica que existe un segundo grupo de homotopía. Desde luego que hay grupos $\pi_n(X, x_0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, pero no los estudiaremos en este libro. Son parte de la materia más general conocida como *teoría de homotopía*.

EJEMPLO 1. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo n-dimensional. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es el grupo trivial (consistente sólo en el neutro), ya que si f es un lazo en $\mathbb{R}^n$ basado en x_0, la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre f y el camino constantemente x_0. En general, si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial. En particular, la ***bola unidad***B^n de $\mathbb{R}^n$,

$$B^n = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\},$$

tiene grupo fundamental trivial.

Una cuestión inmediata que nos podemos plantear es el alcance de la dependencia en el punto base del grupo fundamental. Consideremos esta cuestión ahora.

Definición. Sea α un camino en X de x_0 a x_1. Definimos la aplicación

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

por la ecuación

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

La aplicación $\hat{\alpha}$, que denominaremos "α-gorro", está bien definida porque la operación $*$ está bien definida. Si f es un lazo basado en x_0, entonces $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ es un lazo basado en x_1. Por tanto, $\hat{\alpha}$ aplica $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$, como deseábamos; observemos que esta aplicación depende sólo de la clase de homotopía de caminos de α. Está representada en la Figura 52.1.

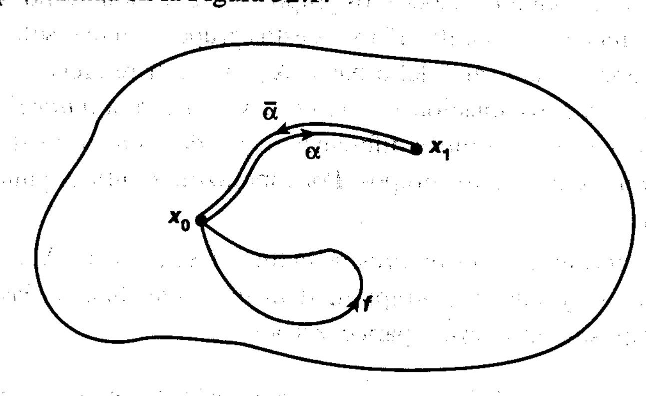


Figura 52.1

Teorema 52.1. *La aplicación $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Para probar que $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo, calculemos

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]).\end{aligned}$$

Para ver que $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo, vamos a probar que si β denota el camino $\bar{\alpha}$, que es el inverso de α, entonces $\hat{\beta}$ es el inverso para $\hat{\alpha}$. Calculamos, para cada elemento $[h]$ de $\pi_1(X, x_1)$,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}([h]) &= [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}], \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h].\end{aligned}$$

Un cálculo similar demuestra que $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$, para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. ∎

Corolario 52.2. *Si X es conexo por caminos, y x_0 y x_1 son dos puntos de X, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Supongamos que X es un espacio topológico. Sea C una componente por caminos de X conteniendo a x_0. Es fácil ver que $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$, ya que todos los lazos y homotopías en X que están basados en x_0 deben permanecer en el subespacio

C. De este modo, $\pi_1(X, x_0)$ depende sólo de la componente por caminos de X conteniendo a x_0, y no nos ofrece ninguna información del resto de X. Por esta razón, es muy usual trabajar sólo con espacios conexos por caminos cuando se estudia el grupo fundamental.

Si X es conexo por caminos, todos los grupos $\pi_1(X, x)$ son isomorfos, de manera que es tentador pretender "identificar" todos estos grupos con uno solo y hablar simplemente del grupo fundamental del espacio X, sin hacer referencia al punto base. La dificultad de esta aproximación es que no hay una forma *natural* de identificar $\pi_1(X, x_0)$ con $\pi_1(X, x_1)$; caminos diferentes α y β de x_0 a x_1 pueden darnos isomorfismos diferentes entre estos grupos. Por esta razón, omitir el punto base puede conducir a error.

Sin embargo, resulta que el isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ es independiente del camino si, y sólo si, el grupo fundamental es abeliano (véase el Ejercicio 3). Éste es un requisito muy severo para el espacio X.

Definición. Un espacio X se dice que es ***simplemente conexo*** si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial (un elemento) para algún $x_0 \in X$ y, por tanto, para todo $x_0 \in X$. Con frecuencia expresamos el hecho de que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial escribiendo $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Lema 52.3. *En un espacio simplemente conexo X, dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.*

Demostración. Sean α y β dos caminos de x_0 a x_1. Entonces $\alpha * \bar{\beta}$ está definido y es un lazo en X basado en x_0. Dado que X es simplemente conexo, este lazo es homotópico por caminos al lazo constante en x_0. Entonces

$$[\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta],$$

de donde se deduce que $[\alpha] = [\beta]$. ■

Intuitivamente está claro que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio X. Una forma conveniente de probar este hecho es introduciendo el concepto de "homomorfismo inducido por una aplicación continua".

Supongamos que $h : X \to Y$ es una aplicación continua que lleva el punto x_0 de X al punto y_0 de Y. Frecuentemente denotamos esta propiedad escribiendo

$$h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0).$$

Si f es un lazo en X basado en x_0, entonces la composición $h \circ f : I \to Y$ es un lazo en Y basado en y_0. La correspondencia $f \to h \circ f$ nos conduce a una aplicación que lleva $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$. La definimos formalmente como sigue:

Definición. Sea $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación continua. Definimos

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

La aplicación h_* se denomina ***homomorfismo inducido por h***, relativo al punto base x_0.

La aplicación h_* está bien definida ya que si F es una homotopía de caminos entre los caminos f y f', entonces $h \circ F$ es una homotopía de caminos entre los caminos $h \circ f$ y $h \circ f'$. El hecho de que h_* sea un homomorfismo se deduce de la ecuación

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

El homomorfismo h_* no sólo depende de la aplicación $h : X \to Y$ sino también de la elección del punto base x_0 (una vez que x_0 está fijado, y_0 está determinado por h). Así, podríamos tener alguna dificultad en la notación si queremos considerar diferentes puntos base en X. Si x_0 y x_1 son dos puntos diferentes de X, no podemos usar el mismo símbolo h_* para denotar los dos homomorfismos diferentes, uno teniendo dominio $\pi_1(X, x_0)$ y el otro dominio $\pi_1(X, x_1)$. Incluso si X es conexo por caminos, estos grupos son isomorfos pero no son el mismo grupo. En tal caso, utilizaremos la notación

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

para el primer homomorfismo y $(h_{x_1})_*$ para el segundo. Si sólo hubiera un punto base en consideración, omitiremos la referencia al punto base y denotaremos el homomorfismo inducido simplemente por h_*.

El homomorfismo inducido tiene dos propiedades que son cruciales para las aplicaciones. Se conocen como "propiedades funtoriales" y están dadas en el siguiente teorema:

Teorema 52.4. *Si $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $k : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ son continuas, entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Si $i : (X, x_0) \to (X, x_0)$ es la aplicación identidad, entonces i_* es el homomorfismo identidad.*

Demostración. La prueba es una trivialidad. Por definición,

$$\begin{aligned} (k \circ h)_*([f]) &= [(k \circ h) \circ f], \\ (k_* \circ h_*)([f]) &= k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)]. \end{aligned}$$

Análogamente, $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. ■

Corolario 52.5. *Si $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y, entonces h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.*

Demostración. Considérese $k : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ la inversa de h. Entonces se satisface $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$, donde i es la aplicación identidad de (X, x_0); y $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$, donde j es la aplicación identidad de (Y, y_0). Dado que i_* y j_* son los homomorfismos identidad de los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$, respectivamente, k_* es la inversa de h_*. ■

Ejercicios

1. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice que es ***estrellado*** si, para algún punto a_0 de A, todos los segmentos de recta uniendo a_0 con los puntos de A están contenidos en A.
   (a) Encuentre un conjunto estrellado que no sea convexo.
   (b) Demuestre que si A es estrellado entonces A es simplemente conexo.
2. Sea α un camino en X de x_0 a x_1 y sea β un camino en X de x_1 a x_2. Demuestre que si $\gamma = \alpha * \beta$ entonces $\hat{\gamma} = \hat{\beta} \circ \hat{\alpha}$.
3. Sean x_0 y x_1 puntos de un espacio conexo por caminos X. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si, y sólo si, para todo par de caminos α y β de x_0 a x_1, se tiene que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.
4. Sea $A \subset X$; suponga que $r : X \to A$ es una aplicación continua tal que $r(a) = a$, para cada $a \in A$ (la aplicación r se conoce como una ***retracción*** de X en A). Si $a_0 \in A$, demuestre que
$$r_* : \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$$
   es sobreyectiva.
5. Sean A un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $h : (A, a_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación. Demuestre que si h se puede extender a una aplicación continua de $\mathbb{R}^n$ en Y, entonces h_* es el homomorfismo trivial (el homomorfismo que aplica todos los elementos en el neutro).
6. Demuestre que si X es conexo por caminos, el homomorfismo inducido por una aplicación continua es independiente del punto base, salvo isomorfismos de los grupos implicados. Siendo más precisos, sea $h : X \to Y$ una aplicación continua con $h(x_0) = y_0$ y $h(x_1) = y_1$. Sea α un camino en X de x_0 a x_1 y pongamos $\beta = h \circ \alpha$. Demuestre que
$$\hat{\beta} \circ (h_{x_0})_* = (h_{x_1})_* \circ \hat{\alpha}.$$

Esta ecuación expresa el hecho de que el siguiente diagrama de aplicaciones "conmute".

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{(h_{x_0})_*} & \pi_1(Y,y_0) \\ \downarrow \hat{\alpha} & & \downarrow \hat{\beta} \\ \pi_1(X,x_1) & \xrightarrow{(h_{x_1})_*} & \pi_1(Y,y_1) \end{array}$$

7. Sea G un grupo topológico con operación $\cdot$ y elemento neutro x_0. Denotemos por $\Omega(G,x_0)$ el conjunto de todos los lazos en G basados en x_0. Si $f,g \in \Omega(G,x_0)$, definamos el lazo $f \otimes g$ por la regla

$$(f \otimes g)(s) = f(s) \cdot g(s).$$

(a) Demuestre que esta operación dota al conjunto $\Omega(G,x_0)$ de estructura de grupo.

(b) Pruebe que esta operación induce una operación de grupo $\otimes$ en $\pi_1(G,x_0)$.

(c) Demuestre que las dos operaciones de grupo $*$ y $\otimes$ en $\pi_1(G,x_0)$ son la misma. [*Indicación:* calcule $(f * e_{x_0}) \otimes (e_{x_0} * g)$.]

(d) Pruebe que $\pi_1(G,x_0)$ es abeliano.

§53 Espacios recubridores

Hemos demostrado que cualquier subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$ tiene grupo fundamental trivial; acometemos ahora la tarea de calcular algunos grupos fundamentales que no son triviales. Una de las herramientas más usuales para este propósito es la noción de *espacio recubridor*, la cual introducimos en esta sección. Los espacios recubridores son también importantes en el estudio de las superficies de Riemann y las variedades complejas (véase [A-S]). Los estudiaremos con más detalle en el Capítulo 13.

Definición. Sea $p : E \to B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Un conjunto abierto U de B se dice que está ***regularmente cubierto*** por p si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ puede escribirse como una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tales que, para cada α, la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α en U. La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada una partición de $p^{-1}(U)$ en ***rebanadas***.

Si U es un conjunto abierto que está regularmente cubierto por p, frecuentemente dibujamos el conjunto $p^{-1}(U)$ como una "pila de tortitas", cada una con la misma forma y tamaño que U, flotando en el aire sobre U; la aplicación p las comprime a todas sobre U (véase la Figura 53.1). Observemos que si U está regularmente cubierto por p y W es un conjunto abierto conteniendo a U, entonces W está también regularmente cubierto por p.

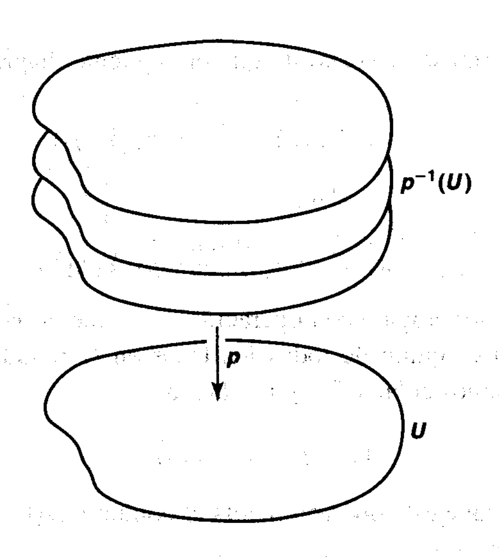


Figura 53.1

Definición. Sea $p : E \to B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si todo punto b de B tiene un entorno U que está regularmente cubierto por p, entonces p se dice que es una ***aplicación recubridora*** y E un ***espacio recubridor*** de B.

Observemos que si $p : E \to B$ es una aplicación recubridora entonces, para cada $b \in B$, el subespacio $p^{-1}(b)$ de E tiene la topología discreta. Esto se debe a que cada rebanada V_α es abierta en E e interseca al conjunto $p^{-1}(b)$ es un solo punto; por tanto, este punto es abierto en $p^{-1}(b)$.

Observemos también que si $p : E \to B$ es una aplicación recubridora entonces p es una aplicación abierta. Efectivamente, supongamos que A es un conjunto abierto de E. Dado $x \in p(A)$, elijamos un entorno U de x que esté regularmente cubierto por p. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas. Existe un punto y de A tal que $p(y) = x$; sea V_β la rebanada que contiene a y. El conjunto $V_\beta \cap A$ es abierto en E y, por tanto, abierto en V_β; como p aplica V_β homeomórficamente en U, el conjunto $p(V_\beta \cap A)$ es abierto en U y, por tanto, abierto en B; es un entorno de x contenido en $p(A)$, como deseábamos.

EJEMPLO 1. Sea X un espacio topológico y sea $i : X \to X$ la aplicación identidad. Entonces i es una aplicación recubridora (del tipo más trivial). En general, sea E el espacio $X \times \{1, \ldots, n\}$ consistente en n copias disjuntas de X. La aplicación $p : E \to X$ dada por $p(x, i) = x$, para todo i, es nuevamente una aplicación recubridora (más bien trivial). En este caso, podemos dibujar el espacio entero E como una pila de tortitas sobre X.

En la práctica, frecuentemente nos restringimos a espacios recubridores que son conexos por caminos, para eliminar cubrimientos triviales del tipo "pila de tortitas". Un ejemplo de dicho espacio recubridor no trivial es el siguiente:

Teorema 53.1. *La aplicación $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por la ecuación*

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

es una aplicación recubridora.

Podemos representar p como una aplicación que enrolla la recta real $\mathbb{R}$ alrededor del círculo S^1 y, en el proceso, aplica cada intervalo $[n, n+1]$ sobre S^1.

Demostración. El hecho de que p sea una aplicación recubridora reside en las propiedades elementales de las funciones seno y coseno. Consideremos, por ejemplo, el subconjunto U de S^1 consistente en aquellos puntos que tienen la primera coordenada positiva. El conjunto $p^{-1}(U)$ consiste en aquellos puntos x para los que $\cos 2\pi x$ es positivo, es decir, es la unión de los intervalos

$$V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ (véase la Figura 53.2). Ahora bien, la aplicación p, restringida a cualquier intervalo cerrado $\bar{V}_n$, es inyectiva porque $\operatorname{sen} 2\pi x$ es estrictamente monótona en tales intervalos. Además, p lleva $\bar{V}_n$ sobreyectivamente sobre $\bar{U}$, y V_n sobre U, por el teorema de los valores intermedios. Dado que $\bar{V}_n$ es compacto, $p|\bar{V}_n$ es un homeomorfismo entre $\bar{V}_n$ y $\bar{U}$. En particular, $p|V_n$ es un homeomorfismo entre V_n y U.

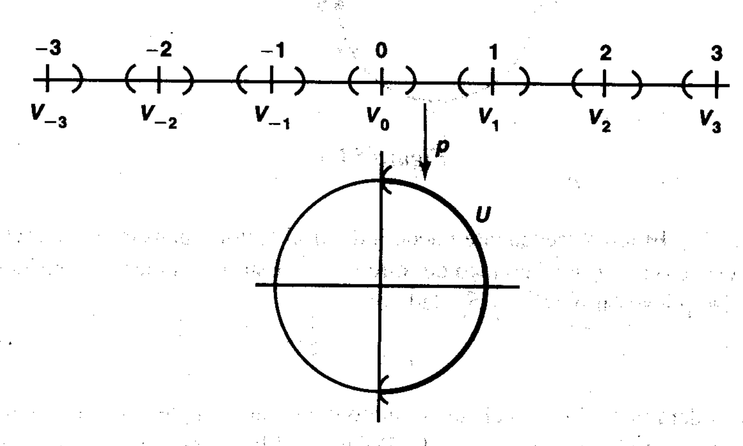


Figura 53.2

Podemos aplicar un razonamiento similar a las intersecciones de S^1 con los semiplanos abiertos superior e inferior, y con el semiplano abierto izquierdo. Estos conjuntos abiertos recubren S^1 y cada uno de ellos está regularmente cubierto por p. Por lo tanto, $p : \mathbb{R} \to S^1$ es una aplicación recubridora. ■

Si $p : E \to B$ es una aplicación recubridora, entonces p es un ***homeomorfismo local*** entre E y B. Es decir, cada punto e de E tiene un entorno que se aplica por p

homeomórficamente sobre un subconjunto abierto de B. Sin embargo, la condición de que p sea un homeomorfismo local no es suficiente para asegurar que p sea una aplicación recubridora, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2. La aplicación $p : \mathbb{R}_+ \to S^1$ dada por la ecuación

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

es sobreyectiva y es un homeomorfismo local (véase la Figura 53.3). Sin embargo, no es una aplicación recubridora ya que el punto $b_0 = (1, 0)$ no tiene un entorno U que esté regularmente cubierto por p. El típico intervalo U de b_0 tiene una imagen inversa consistente en pequeños entornos V_n de cada entero n, para $n > 0$, junto con un pequeño intervalo V_0 de la forma $(0, \epsilon)$. Cada uno de los intervalos V_n, para $n > 0$, se aplica homeomórficamente sobre U por la aplicación p, pero el intervalo V_0 está únicamente embebido en U mediante p.

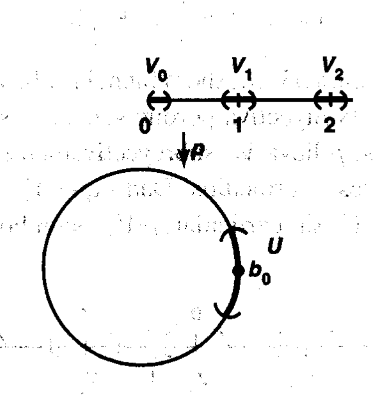


Figura 53.3

EJEMPLO 3. El lema precedente puede inducir al lector a pensar que la recta real $\mathbb{R}$ es el único espacio recubridor conexo del círculo S^1. Esto no es cierto. Consideremos, por ejemplo, la aplicación $p : S^1 \to S^1$ dada por

$$p(z) = z^2.$$

[Aquí consideramos S^1 como el subconjunto del plano complejo $\mathbb{C}$ consistente en aquellos números complejos z con $|z| = 1$.] Dejamos al lector comprobar que p es una aplicación recubridora.

El Ejemplo 2 muestra que la aplicación obtenida al restringir una aplicación recubridora puede no ser una aplicación recubridora. A continuación tenemos una situación donde *sí* encontraremos este tipo de aplicación.

Teorema 53.2. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora. Si B_0 es un subespacio de B y si $E_0 = p^{-1}(B_0)$ entonces la aplicación $p_0 : E_0 \to B_0$, obtenida al restringir p, es una aplicación recubridora.*

Demostración. Dado $b_0 \in B_0$, sea U un conjunto abierto en B que contiene a b_0 y que esté regularmente cubierto por p; sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas. Entonces $U \cap B_0$ es un entorno de b_0 en B_0 y los conjuntos $V_\alpha \cap E_0$ son abiertos disjuntos en E_0 cuya unión es $p^{-1}(U \cap B_0)$, y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre $U \cap B_0$ mediante p. ■

Teorema 53.3. *Si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son aplicaciones recubridoras entonces*

$$p \times p' : E \times E' \to B \times B'$$

es una aplicación recubridora.

Demostración. Dados $b \in B$ y $b' \in B'$, sean U y U' entornos de b y b', respectivamente, que estén regularmente cubiertos por p y p', respectivamente. Sean $\{V_\alpha\}$ y $\{V'_\beta\}$ particiones en rebanadas de $p^{-1}(U)$ y $(p')^{-1}(U')$, respectivamente. Entonces la imagen inversa mediante $p \times p'$ del conjunto abierto $U \times U'$ es la unión de todos los conjuntos $V_\alpha \times V'_\beta$. Estos conjuntos son abiertos disjuntos de $E \times E'$, y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre $U \times U'$ por $p \times p'$. ■

EJEMPLO 4. Consideremos el espacio $T = S^1 \times S^1$, conocido como ***toro***. La aplicación producto

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$

es un cubrimiento del toro por el plano $\mathbb{R}^2$, donde p es la aplicación recubridora del Teorema 53.1. Cada uno de los cuadrados unidad $[n, n+1] \times [m, m+1]$ se enrolla completamente alrededor del toro, por medio de $p \times p$ (véase la Figura 53.4).

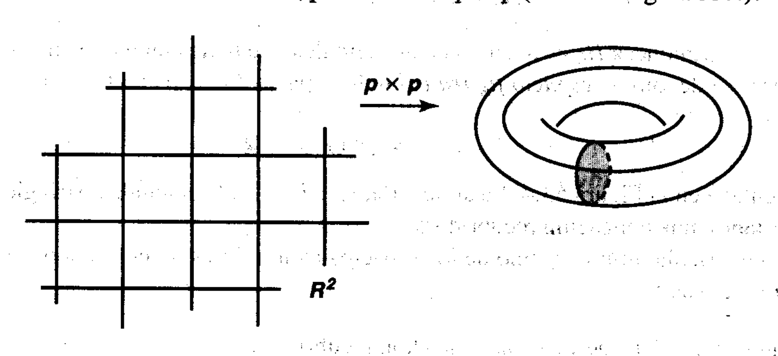


Figura 53.4

En esta figura, hemos representado el toro no como el producto $S^1 \times S^1$, que es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y difícil de visualizar, sino como la superficie familiar de un donut D en $\mathbb{R}^3$ obtenida rotando el círculo C_1 en el plano xz de radio $\frac{1}{3}$ centrado en $(1, 0, 0)$ alrededor del eje z. No es difícil ver que $S^1 \times S^1$ es homeomorfo con la superficie D. Sea C_2 el círculo de radio 1 en el plano xy centrado en el origen. Entonces apliquemos

$C_1 \times C_2$ en D definiendo $f(a \times b)$ como el punto al cual va a parar a cuando rotamos el círculo C_1 alrededor del eje z hasta que su centro alcanza el punto b (véase la Figura 53.5). La aplicación f será un homeomorfismo entre $C_1 \times C_2$ y D, como el lector puede comprobar mentalmente. Si lo desea, puede escribir las ecuaciones para f y comprobar la continuidad, inyectividad y sobreyectividad, directamente (la continuidad de f^{-1} se deducirá de la compacidad de $C_1 \times C_2$).

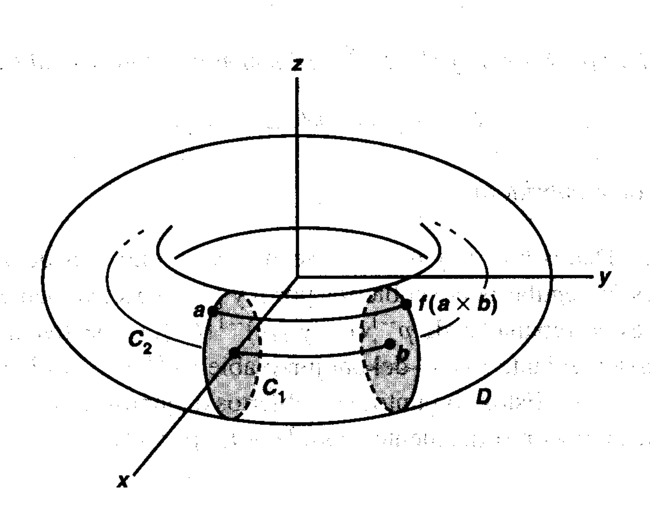


Figura 53.5

EJEMPLO 5. Consideremos la aplicación recubridora $p \times p$ del ejemplo anterior. Sea b_0 el punto $p(0)$ de S^1 y denotemos por B_0 el subespacio

$$B_0 = (S^1 \times b_0) \cup (b_0 \times S^1)$$

de $S^1 \times S^1$. Entonces B_0 es la unión de dos círculos que tienen un punto en común; algunas veces se denomina ***espacio figura ocho***. El espacio $E_0 = p^{-1}(B_0)$ es la "cuadrícula infinita"

$$E_0 = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$$

representada en la Figura 53.4. La aplicación $p_0 : E_0 \to B_0$ obtenida restringiendo $p \times p$ es, por tanto, una aplicación recubridora.

La cuadrícula infinita es uno de los espacios recubridores de la figura ocho; veremos otros más adelante.

EJEMPLO 6. Consideremos la aplicación recubridora

$$p \times i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}_+,$$

donde i es la aplicación identidad de $\mathbb{R}_+$ y p es la aplicación del Teorema 53.1. Si tomamos el homeomorfismo estándar entre $S^1 \times \mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, que lleva $x \times t$ a tx, la composición nos permite obtener un cubrimiento

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$$

del plano agujereado por el semiplano abierto superior. Lo representamos en la Figura 53.6. Esta aplicación recubridora aparece en el estudio de variables complejas como la *superficie de Riemann* correspondiente a la función logaritmo complejo.

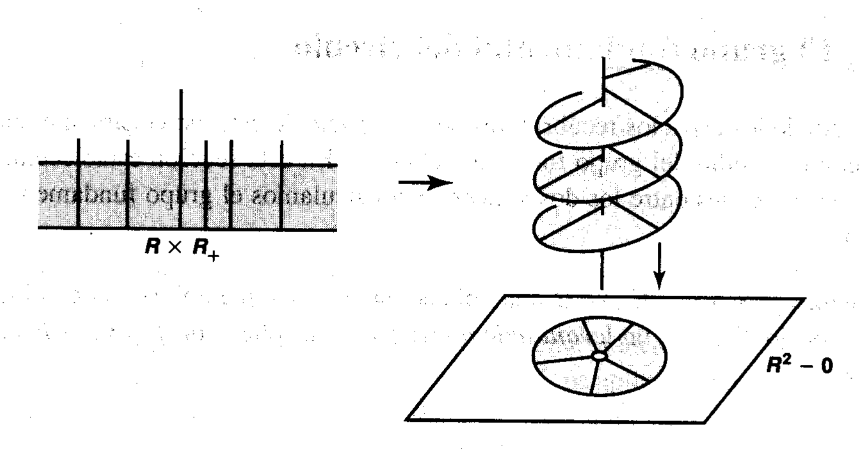


Figura 53.6

Ejercicios

1. Sea Y un espacio con la topología discreta. Demuestre que si $p : X \times Y \to X$ es la proyección sobre la primera coordenada, entonces p es una aplicación recubridora.

2. Sea $p : E \to B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Suponga que U es un conjunto abierto de B que está regularmente cubierto por p. Demuestre que si U es conexo entonces la partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas es única.

3. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora, con B conexo. Demuestre que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En tal caso, se dice que E es un ***recubridor de k hojas*** de B.

4. Sean $q : X \to Y$ y $r : Y \to Z$ aplicaciones recubridoras y pongamos $p = r \circ q$. Demuestre que si $r^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces p es una aplicación recubridora.

5. Demuestre que la aplicación del Ejemplo 3 es una aplicación recubridora. Generalícelo a la aplicación $p(z) = z^n$.

6. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora.

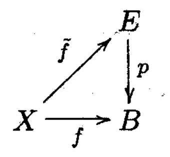
   (a) Si B es de Hausdorff, regular, completamente regular o de Hausdorff localmente compacto, entonces también lo es E. [*Indicación:* si $\{V_\alpha\}$ es una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas y C es un conjunto cerrado de B tal que $C \subset B$, entonces $p^{-1}(C) \cap V_\alpha$ es un conjunto cerrado de E.]

(b) Si B es compacto y $p^{-1}(b)$ es finito, para todo $b \in B$, entonces E es compacto.

§54 El grupo fundamental del círculo

El estudio de los espacios recubridores de un espacio X está estrechamente relacionado con el estudio del grupo fundamental de X. En esta sección establecemos las relaciones cruciales entre los dos conceptos y calculamos el grupo fundamental del círculo.

Definición. Sea $p : E \to B$ una aplicación. Si f es una aplicación continua de algún espacio X en B, un ***levantamiento*** de f es una aplicación $\tilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.



La existencia de levantamientos cuando p es una aplicación recubridora es una herramienta importante en el estudio de los espacios recubridores y el grupo fundamental. Vamos a probar primero que, para un espacio recubridor, los caminos pueden ser levantados; entonces demostraremos que las homotopías de caminos también pueden ser levantadas. Demos previamente un ejemplo:

EJEMPLO 1. Consideremos el cubrimiento $p : \mathbb{R} \to S^1$ del Teorema 53.1. El camino $f : [0,1] \to S^1$ comenzando en $b_0 = (1,0)$ y dado por $f(s) = (\cos \pi s, \operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{f}(s) = s/2$ comenzando en 0 y acabando en $\frac{1}{2}$. El camino $g(s) = (\cos \pi s, -\operatorname{sen} \pi s)$ se levanta al camino $\tilde{g}(s) = -s/2$, que comienza en 0 y acaba en $-\frac{1}{2}$. El camino $h(s) = (\cos 4\pi s, \operatorname{sen} 4\pi s)$ se levanta al camino $\tilde{h}(s) = 2s$ comenzando en 0 y acabando en 2. Intuitivamente, h enrolla dos veces el intervalo $[0,1]$ alrededor del círculo; esto queda reflejado en el hecho de que el levantamiento $\tilde{h}$ comienza en cero y acaba en el número 2. Estos caminos están representados en la Figura 54.1.

Lema 54.1. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Cualquier camino $f : [0,1] \to B$ comenzando en b_0 tiene un único levantamiento a un camino $\tilde{f}$ en E que comienza en e_0.*

Demostración. Cubramos B por conjuntos abiertos U que estén regularmente cubiertos por p. Encontremos una subdivisión de $[0,1]$, pongamos $s_0, \ldots, s_n$, tal que para cada i el conjunto $f([s_i, s_{i+1}])$ esté contenido en alguno de tales conjuntos abiertos U (aquí utilizamos el lema del número de Lebesgue). Vamos a definir el levantamiento $\tilde{f}$ paso a paso.

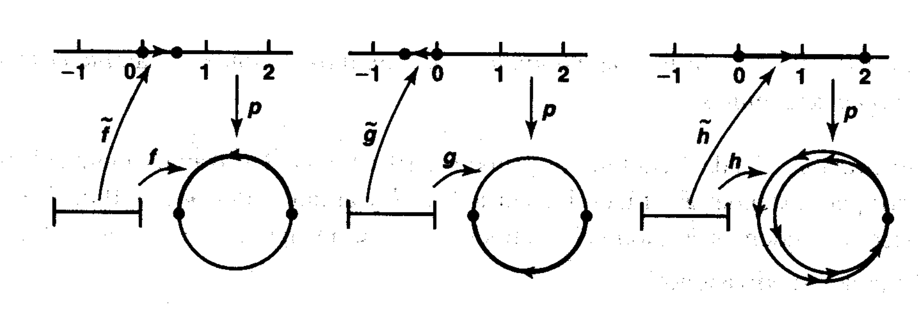


Figura 54.1

Primero, definamos $\tilde{f}(0) = e_0$. Entonces, suponiendo que $\tilde{f}(s)$ está definida para $0 \leq s < s_i$, definimos $\tilde{f}$ en $[s_i, s_{i+1}]$ como sigue: el conjunto $f([s_i, s_{i+1}])$ está contenido en algún conjunto abierto U que está regularmente cubierto por p. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición en rebanadas de $p^{-1}(U)$; cada conjunto V_α es aplicado por p homeomórficamente sobre U. Así, $\tilde{f}(s_i)$ está en alguno de estos conjuntos, pongamos en V_0. Definamos $\tilde{f}(s)$ para $s \in [s_i, s_{i+1}]$ por la ecuación

$$\tilde{f}(s) = (p|V_0)^{-1}(f(s)).$$

Como $p|V_0 : V_0 \to U$ es un homeomorfismo, $\tilde{f}$ será continua sobre $[s_i, s_{i+1}]$.

Continuando de esta forma, definimos $\tilde{f}$ en todo el intervalo $[0, 1]$. La continuidad de $\tilde{f}$ se deduce del lema del pegamiento; el hecho de que $p \circ \tilde{f} = f$ es inmediato de la definición de $\tilde{f}$.

La unicidad de $\tilde{f}$ se prueba también paso por paso. Supongamos que $\tilde{\tilde{f}}$ es otro levantamiento de f comenzando en e_0. Entonces $\tilde{\tilde{f}}(0) = e_0 = \tilde{f}(0)$. Supongamos que $\tilde{\tilde{f}}(s) = \tilde{f}(s)$, para todo s tal que $0 \leq s < s_i$. Sea V_0 como en el párrafo anterior; entonces, para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{f}(s)$ está definido como $(p|V_0)^{-1}(f(s))$. ¿Puede coincidir con $\tilde{\tilde{f}}(s)$? Dado que $\tilde{\tilde{f}}$ es un levantamiento de f, debe llevar el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ en el conjunto $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$. Las rebanadas V_α son abiertas y disjuntas; como el conjunto $\tilde{\tilde{f}}([s_i, s_{i+1}])$ es conexo, debe estar totalmente contenido en uno de los conjuntos V_α. Y como $\tilde{\tilde{f}}(s_i) = \tilde{f}(s_i)$, que está en V_0, $\tilde{\tilde{f}}$ debe llevar todo el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ en el conjunto V_0. Por lo tanto, para s en $[s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{\tilde{f}}(s)$ debe ser igual a algún punto y de V_0 que esté en $p^{-1}(f(s))$. Pero sólo hay *un* punto y en estas condiciones, concretamente $(p|V_0)^{-1}(f(s))$. Por consiguiente, $\tilde{\tilde{f}}(s) = \tilde{f}(s)$ para $s \in [s_i, s_{i+1}]$. ■

Lema 54.2. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sea $F : I \times I \to B$ una aplicación continua con $F(0,0) = b_0$. Existe un único levantamiento de F a una aplicación continua*

$$\tilde{F} : I \times I \to E$$

tal que $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Si F es una homotopía de caminos, entonces $\tilde{F}$ también es una homotopía de caminos.

Demostración. Dada F, definimos primero $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Utilizamos ahora el lema anterior para extender $\tilde{F}$ al lado izquierdo $0 \times I$ y al lado inferior $I \times 0$ de $I \times I$. Entonces extendemos $\tilde{F}$ a todo el cuadrado $I \times I$ como sigue.

Elijamos subdivisiones

$$s_0 < s_1 < \cdots < s_m,$$
$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

de I lo suficientemente finas como para que cada rectángulo

$$I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

se aplique mediante F en un conjunto abierto de B que esté regularmente cubierto por p (utilizamos el lema del número de Lebesgue). Definimos el levantamiento $\tilde{F}$, paso a paso, comenzando con el rectángulo $I_1 \times J_1$, continuando con los otros rectángulos $I_i \times J_1$ de la "fila inferior", después con los rectángulos $I_i \times J_2$ de la siguiente fila, y así sucesivamente.

En general, dados i_0 y j_0, supongamos que $\tilde{F}$ está definido en el conjunto A determinado por la unión de $0 \times I$, $I \times 0$ y todos los rectángulos "previos" a $I_{i_0} \times J_{j_0}$ (aquellos rectángulos $I_i \times I_j$ con $j < j_0$ y aquellos con $j = j_0$ e $i < i_0$). Supongamos también que $\tilde{F}$ es un levantamiento continuo de $F|A$. Definamos $\tilde{F}$ en $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Escojamos un conjunto abierto U de B que esté regularmente cubierto por p y contenga al conjunto $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición en rebanadas de $p^{-1}(U)$; cada conjunto V_α se aplica mediante p homeomórficamente sobre U. Ahora bien, $\tilde{F}$ está ya definida en el conjunto $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$. Este conjunto es la unión de los lados izquierdo e inferior del rectángulo $I_{i_0} \times J_{j_0}$ y, por tanto, *es conexo*. Así, $\tilde{F}(C)$ es conexo y debe estar totalmente contenido dentro de uno de los conjuntos V_α. Supongamos que está contenido en V_0. Entonces la situación es como la representada en la Figura 54.2.

Denotemos por $p_0 : V_0 \to U$ la restricción de p a V_0. Dado que $\tilde{F}$ es un levantamiento de $F|A$ sabemos que, para $x \in C$,

$$p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x),$$

de manera que $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$. Por tanto, podemos extender $\tilde{F}$ definiendo

$$\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$$

para $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$. La aplicación extendida será continua por el lema del pegamiento.

Continuando de esta forma, definimos $\tilde{F}$ en todo el cuadrado I^2.

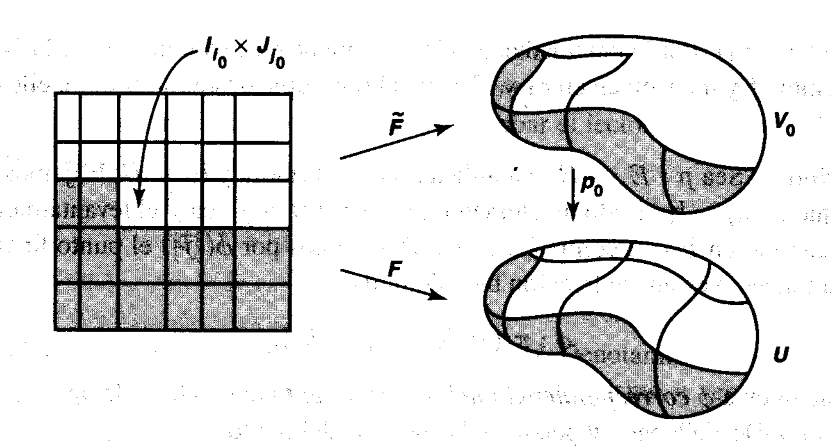


Figura 54.2

Para comprobar la unicidad, observemos que, en cada paso de la construcción de $\tilde{F}$, como primero hemos extendido $\tilde{F}$ a los lados inferior e izquierdo de I^2, y entonces a los rectángulos $I_i \times J_j$, uno por uno, existe sólo una forma de extender $\tilde{F}$ de manera continua. De modo que, una vez especificado el valor de $\tilde{F}$ en $(0, 0)$, $\tilde{F}$ está completamente determinado.

Supongamos ahora que F es una homotopía de caminos. Queremos probar que $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos. La aplicación F lleva todo el lado izquierdo $0 \times I$ de I^2 a un solo punto b_0 de B. Como $\tilde{F}$ es un levantamiento de F, lleva todo este lado sobre el conjunto $p^{-1}(b_0)$. Pero este conjunto tiene la topología discreta como subespacio de E. Dado que $0 \times I$ es conexo y $\tilde{F}$ es continua, $\tilde{F}(0 \times I)$ es conexo y, por lo tanto, debe ser igual a un conjunto unipuntual. Análogamente, $\tilde{F}(1 \times I)$ debe ser también un conjunto unipuntual. Así, $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos. ∎

Teorema 54.3. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Sean f y g dos caminos en B de b_0 a b_1, y sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus respectivos levantamientos a caminos en E comenzando en e_0. Si f y g son homotópicos por caminos, entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en el mismo punto de E y son homotópicos por caminos.*

Demostración. Sea $F : I \times I \to B$ la homotopía de caminos entre f y g. Entonces $F(0, 0) = b_0$. Sea $\tilde{F} : I \times I \to E$ el levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Por el lema anterior, $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos, de manera que $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ y $\tilde{F}(1 \times I)$ es un conjunto unipuntual $\{e_1\}$.

La restricción $\tilde{F}|I \times 0$ de $\tilde{F}$ al lado inferior de $I \times I$ es un camino en E comenzando en e_0 y que es un levantamiento de $F|I \times 0$. Por la unicidad de los levantamientos de caminos, debemos tener que $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$. Análogamente, $\tilde{F}|I \times 1$ es un camino en E que es un levantamiento de $F|I \times 1$ y comienza en e_0 porque

$\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$. Por la unicidad de los levantamientos de caminos, $\tilde{F}(s,1) = \tilde{g}(s)$. Por lo tanto, $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en e_1 y $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos entre ellos. ■

Definición. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora y $b_0 \in B$. Elijamos e_0 de forma que $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento $[f]$ de $\pi_1(B, b_0)$, sea $\tilde{f}$ el levantamiento de f a un camino en E que comience en e_0. Denotemos por $\phi([f])$ el punto final $\tilde{f}(1)$ de $\tilde{f}$. Entonces ϕ es una aplicación bien definida

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0).$$

Denominamos a ϕ ***correspondencia del levantamiento*** derivada de la aplicación recubridora p. Desde luego, depende de la elección del punto e_0.

Teorema 54.4. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Si E es conexo por caminos, entonces la correspondencia del levantamiento*

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. Si E es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

Demostración. Si E es conexo por caminos entonces, dado $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe un camino $\tilde{f}$ en E de e_0 a e_1. De modo que $f = p \circ \tilde{f}$ es un lazo en B con base b_0 y $\phi([f]) = e_1$, por definición.

Supongamos que E es simplemente conexo. Sean $[f]$ y $[g]$ dos elementos de $\pi_1(B, b_0)$ tales que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ los levantamientos de f y g, respectivamente, a caminos en E comenzando en e_0; entonces $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Como E es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos $\tilde{F}$ en E entre $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$. Entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre f y g. ■

Teorema 54.5. *El grupo fundamental de S^1 es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.*

Demostración. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ la aplicación recubridora del Teorema 53.1, pongamos $e_0 = 0$ y sea $b_0 = p(e_0)$. Entonces $p^{-1}(b_0)$ es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros. Dado que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$$

es biyectiva. Probemos que ϕ es un homomorfismo y el teorema quedará demostrado.

Dados $[f]$ y $[g]$ en $\pi_1(B, b_0)$, sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus respectivos levantamientos a caminos en $\mathbb{R}$ comenzando en 0. Sean $n = \tilde{f}(1)$ y $m = \tilde{g}(1)$, entonces $\phi([f]) = n$ y $\phi([g]) = m$, por definición. Sea $\tilde{\tilde{g}}$ el camino

$$\tilde{\tilde{g}}(s) = n + \tilde{g}(s)$$

en $\mathbb{R}$. Como $p(n+x) = p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, el camino $\tilde{\tilde{g}}$ es un levantamiento de g que comienza en n. Entonces el producto $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ está definido y es el levantamiento de $f * g$ que comienza en 0, como puede comprobar el lector. El punto final de este camino es $\tilde{\tilde{g}}(1) = n + m$. Entonces, por definición,

$$\phi([f] * [g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]).$$ ■

Definición. Sea G un grupo y x un elemento de G. Denotamos el inverso de x por x^{-1}. El símbolo x^n representa el producto de x por sí mismo n veces, x^{-n} denota el producto de x^{-1} por sí mismo n veces, y x^0 denota el elemento neutro de G. Si el conjunto de todos los elementos de la forma x^m, para $m \in \mathbb{Z}$, coincide con G, entonces se dice que G es un grupo ***cíclico*** y x se dice que es un ***generador*** de G.

El cardinal de un grupo se llama también ***orden*** del grupo. Un grupo es cíclico de orden infinito si, y solamente si, es isomorfo al grupo aditivo de los enteros; es cíclico de orden k si, y sólo si, es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}/k$ de los enteros módulo k. El teorema precedente implica que el grupo fundamental del círculo es cíclico infinito.

Observemos que si x es un generador del grupo cíclico infinito G y si y es un elemento de un grupo arbitrario H, entonces existe un único homomorfismo h de G en H tal que $h(x) = y$; está definido poniendo $h(x^n) = y^n$, para todo n.

Con el fin de utilizarlo más adelante, en §65 y en los Capítulos 13 y 14, probamos aquí una versión más fuerte del Teorema 54.4.

***Teorema 54.6.** *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$.*

(a) El homomorfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es un monomorfismo.

(b) Sea $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. La correspondencia del levantamiento ϕ induce una aplicación inyectiva

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/H \to p^{-1}(b_0)$$

de la colección de las clases por la derecha de H en $p^{-1}(b_0)$, la cual es biyectiva si E es conexo por caminos.

(c) Si f es un lazo en B basado en b_0, entonces $[f] \in H$ si, y sólo si, f es un levantamiento a un lazo en E basado en e_0.

Demostración. (a) Supongamos que $\tilde{h}$ es un lazo en E basado en e_0 y que $p_*([\tilde{h}])$ es el elemento neutro. Sea F una homotopía de caminos entre $p \circ \tilde{h}$ y el lazo constante. Si $\tilde{F}$ es el levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}(0,0) = e_0$, entonces $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos entre $\tilde{h}$ y el lazo constante en e_0.

(b) Dados lazos f y g en B, sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus levantamientos a E que empiezan en e_0. Entonces $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$ y $\phi([g]) = \tilde{g}(1)$. Demostremos que $\phi([f]) = \phi([g])$ si, y sólo si, $[f] \in H * [g]$.

Supongamos primero que $[f] \in H * [g]$. Entonces $[f] = [h * g]$, donde $h = p \circ \tilde{h}$ para algún lazo $\tilde{h}$ en E basado en e_0. Ahora bien, el producto $\tilde{h} * \tilde{g}$ está definido y es un levantamiento de $h * g$. Dado que $[f] = [h * g]$, los levantamientos $\tilde{f}$ y $\tilde{h} * \tilde{g}$, los cuales comienzan en e_0, deben acabar en el mismo punto de E. Entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en el mismo punto de E, de manera que $\phi([f]) = \phi([g])$ (véase la Figura 54.3).

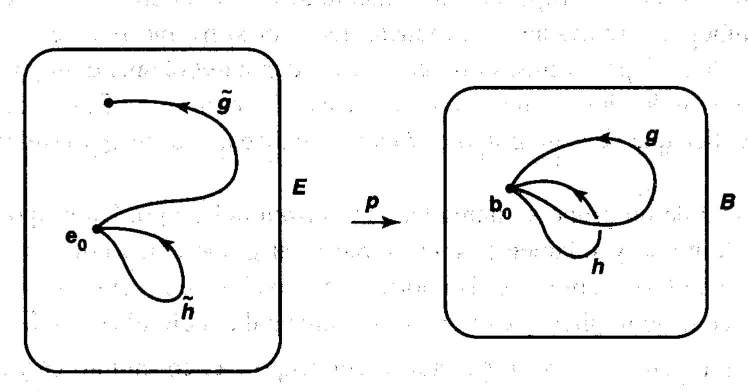


Figura 54.3

Supongamos ahora que $\phi([f]) = \phi([g])$. Entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ acaban en el mismo punto de E. El producto de $\tilde{f}$ y el inverso de $\tilde{g}$ está definido y es un lazo $\tilde{h}$ en E basado en e_0. Mediante un cálculo directo, $[\tilde{h} * \tilde{g}] = [\tilde{f}]$. Si $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos en E entre los lazos $\tilde{h} * \tilde{g}$ y $\tilde{f}$, entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre $h * g$ y f, donde $h = p \circ \tilde{h}$. Por lo tanto $[f] \in H * [g]$, como deseábamos.

Si E es conexo por caminos entonces ϕ es sobreyectiva, de forma que Φ también es sobreyectiva.

(c) La inyectividad de Φ significa que $\phi([f]) = \phi([g])$ si, y sólo si, $[f] \in H * [g]$. Aplicando este resultado al caso en donde g es el lazo constante, vemos que $\phi([f]) = e_0$ si, y sólo si, $[f] \in H$. Pero $\phi([f]) = e_0$ precisamente cuando el levantamiento de f que comienza en e_0 también acaba en e_0. ∎

Ejercicios

1. ¿Qué es lo que falla en el "lema de levantamientos de caminos" (Lema 54.1) cuando se aplica al homeomorfismo local del Ejemplo 2 de §53?

2. Al definir la aplicación $\tilde{F}$ en la demostración del Lema 54.2, ¿por qué hemos tenido tanto cuidado en el orden en el cual hemos considerado los rectángulos pequeños?

3. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora. Sean α y β caminos en B con $\alpha(1) = \beta(0)$; sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ sus levantamientos tales que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Demuestre que $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantamiento de $\alpha * \beta$.

4. Considere la aplicación recubridora $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ del Ejemplo 6 de §53. Encuentre levantamientos de los caminos

$$\begin{aligned} f(t) &= (2-t, 0), \\ g(t) &= ((1+t)\cos 2\pi t, (1+t)\operatorname{sen} 2\pi t), \\ h(t) &= f * g. \end{aligned}$$

Dibuje estos caminos y sus levantamientos.

5. Considere la aplicación recubridora $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ del Ejemplo 4 de §53. Considere el camino

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \times (\cos 4\pi t, \operatorname{sen} 4\pi t)$$

en $S^1 \times S^1$. Dibuje lo que parece f cuando $S^1 \times S^1$ se identifica con la superficie del donut D. Encuentre un levantamiento $\tilde{f}$ de f a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y dibújelo.

6. Considere las aplicaciones $g, h : S^1 \to S^1$ dadas por $g(z) = z^n$ y $h(z) = 1/z^n$ (aquí representamos S^1 como el conjunto de los números complejos z de valor absoluto 1). Calcule los homomorfismos inducidos g_* y h_* del grupo cíclico infinito $\pi_1(S^1, b_0)$ en sí mismo. [*Indicación:* recuerde la ecuación $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$.]

7. Generalice la demostración del Teorema 54.5 para probar que el grupo fundamental del toro es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

8. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora, con E conexo por caminos. Demuestre que si B es simplemente conexo, entonces p es un homeomorfismo.

§55 Retracciones y puntos fijos

Probamos ahora algunos resultados clásicos de topología que se deducen de nuestro conocimiento del grupo fundamental de S^1.

Definición. Si $A \subset X$, una ***retracción*** de X en A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r|A$ es la aplicación identidad de A. Si existe dicha aplicación r, decimos que A es un ***retracto*** de X.

Lema 55.1. *Si A es un retracto de X, entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $j : A \to X$ es inyectivo.*

Demostración. Si $r : X \to A$ es una retracción entonces la aplicación compuesta $r \circ j$ es igual a la aplicación identidad de A. Se sigue que $r_* \circ j_*$ es la aplicación identidad de $\pi_1(A, a)$, de manera que j_* debe ser inyectiva. ■

Teorema 55.2 (Teorema de la no-retracción). *No existe una retracción de B^2 en S^1.*

Demostración. Si S^1 fuera un retracto de B^2, entonces el homomorfismo inducido por la inclusión $j : S^1 \to B^2$ debería ser inyectivo. Pero el grupo fundamental de S^1 es no trivial y el grupo fundamental de B^2 es trivial. ■

Lema 55.3. *Sea $h : S^1 \to X$ una aplicación continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) h es homotópicamente nula.

(2) h se extiende a una aplicación continua $k : B^2 \to X$.

(3) h_* es el homomorfismo trivial de grupos fundamentales.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $H : S^1 \times I \to X$ una homotopía entre h y una aplicación constante. Sea $\pi : S^1 \times I \to B^2$ la aplicación

$$\pi(x, t) = (1 - t)x.$$

Entonces π es continua, cerrada y sobreyectiva, de manera que es una aplicación cociente; ésta colapsa todo $S^1 \times 1$ en el punto $\mathbf{0}$ y es inyectiva en el resto de puntos. Como H es constante sobre $S^1 \times 1$, induce, *vía* la aplicación cociente π, una aplicación continua $k : B^2 \to X$ que es una extensión de h (véase la Figura 55.1).

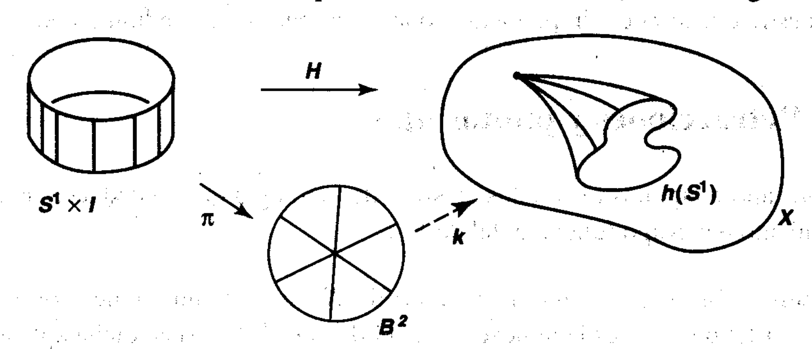


Figura 55.1

(2) ⇒ (3). Si $j : S^1 \to B^2$ es la aplicación inclusión, entonces h es igual a la composición $k \circ j$. Por tanto $h_* = k_* \circ j_*$. Pero

$$j_* : \pi_1(S^1, b_0) \to \pi_1(B^2, b_0)$$

es trivial porque el grupo fundamental de B^2 es trivial. Por consiguiente, h_* es trivial.

(3) ⇒ (1). Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ la aplicación recubridora estándar y sea $p_0 : I \to S^1$ su restricción al intervalo unidad. Entonces $[p_0]$ genera $\pi_1(S^1, b_0)$ porque p_0 es un lazo en S^1 cuyo levantamiento a $\mathbb{R}$ comienza en 0 y acaba en 1.

Pongamos $x_0 = h(b_0)$. Como h_* es trivial, el lazo $f = h \circ p_0$ representa el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$. Por tanto, existe una homotopía de caminos F en X entre f y el lazo constante en x_0. La aplicación $p_0 \times \text{id} : I \times I \to S^1 \times I$ es una aplicación cociente al ser continua, cerrada y sobreyectiva; ésta aplica $0 \times t$ y $1 \times t$ sobre $b_0 \times t$, para cada t, y en el resto es inyectiva. La homotopía de caminos F aplica $0 \times I$, $1 \times I$ e $I \times 1$ sobre el punto x_0 de X. De esta forma, induce una aplicación continua $H : S^1 \times I \to X$ que es una homotopía entre h y una aplicación constante (véase la Figura 55.2). ■

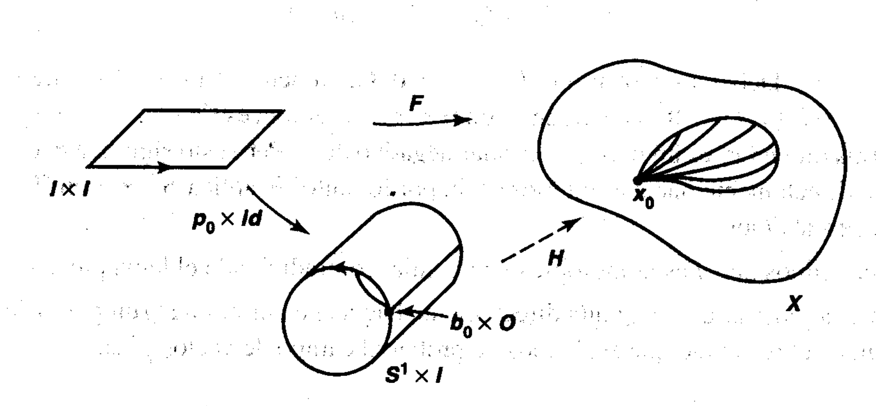


Figura 55.2

Corolario 55.4. *La aplicación inclusión $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ no es homotópicamente nula. La aplicación identidad $i : S^1 \to S^1$ no es homotópicamente nula.*

Demostración. Existe una retracción de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ en S^1 dada por la ecuación $r(x) = x/\|x\|$. Así, j_* es inyectiva y, por tanto, no trivial. Análogamente, i_* es el homomorfismo identidad y, por tanto, no trivial. ■

Teorema 55.5. *Dado un campo de vectores sobre B^2 que no se anule en ningún punto, existe un punto de S^1 donde el campo de vectores apunta directamente hacia el interior y un punto de S^1 donde apunta directamente hacia el exterior.*

Demostración. Un ***campo de vectores*** sobre B^2 es un par ordenado $(x, v(x))$, donde x está en B^2 y v es una aplicación continua de B^2 en $\mathbb{R}^2$. En cálculo, frecuentemente se utiliza la notación

$$\mathbf{v}(x) = v_1(x)\mathbf{i} + v_2(x)\mathbf{j}$$

para la aplicación v, donde $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son los vectores básicos unitarios estándar en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, nosotros consideraremos la notación funcional simple. Decir que un campo de vectores no se anula significa que $v(x) \neq \mathbf{0}$ para todo x; en tal caso v realmente aplica B^2 en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$.

Supongamos primero que $v(x)$ no apunta directamente hacia el interior en ningún punto x de S^1 y lleguemos a una contradicción. Consideremos la aplicación $v : B^2 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ y sea w su restricción a S^1. Dado que la aplicación w se extiende a una aplicación de B^2 en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, es homotópicamente nula.

Por otro lado, w es homotópica a la aplicación inclusión $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. La Figura 55.3 ilustra la homotopía, definida formalmente por la ecuación

$$F(x, t) = tx + (1 - t)w(x),$$

para $x \in S^1$. Debemos probar que $F(x, t) \neq \mathbf{0}$. Claramente, $F(x, t) \neq \mathbf{0}$ para $t = 0$ y $t = 1$. Si $F(x, t) = \mathbf{0}$, para algún t con $0 < t < 1$, entonces $tx + (1 - t)w(x) = 0$, de forma que $w(x)$ es un múltiplo escalar negativo de x. Pero esto significa que $w(x)$ apunta directamente hacia el interior en x, por lo tanto, F aplica $S^1 \times I$ en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, como deseábamos.

Deducimos que j es homotópicamente nula, contradiciendo el lema precedente.

Para demostrar que v apunta directamente hacia el exterior en algún punto de S^1, aplicamos el resultado que acabamos de probar al campo de vectores $(x, -v(x))$. ∎

Ya hemos visto que toda aplicación continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tiene un punto fijo (véase el Ejercicio 3 de §24). Lo mismo es cierto para la bola B^2, aunque la demostración es más profunda.

Teorema 55.6 (Teorema del punto fijo de Brouwer para el disco). *Si $f : B^2 \to B^2$ es continua entonces existe un punto $x \in B^2$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $f(x) \neq x$, para todo x en B^2. Entonces definiendo $v(x) = f(x) - x$, obtenemos un campo de vectores $(x, v(x))$ en B^2 que no se anula en ningún punto. Pero el campo de vectores v no puede apuntar directamente hacia el exterior en ningún punto x de S^1 porque esto significaría que

$$f(x) - x = ax$$

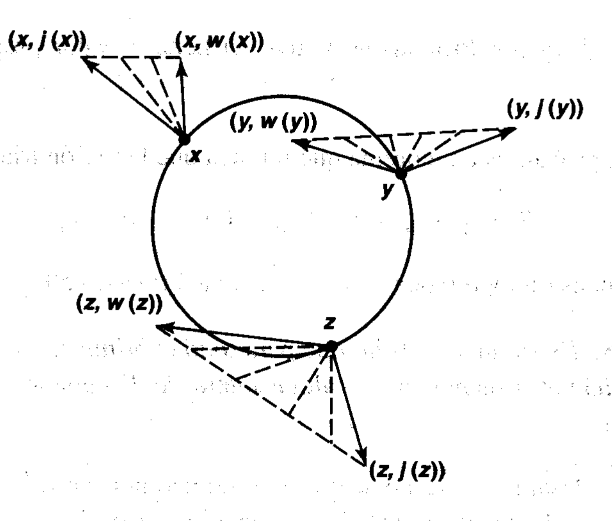


Figura 55.3

para algún número real *positivo* a, de manera que $f(x) = (1 + a)x$ se encontraría fuera de la bola unidad B^2. Llegamos así a una contradicción. ■

El lector bien podría preguntarse por qué los teoremas del punto fijo son de interés en matemáticas. Resulta que muchos problemas, tales como los problemas relativos a la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones, por ejemplo, pueden ser formulados como teoremas del punto fijo. Aquí tenemos un ejemplo, un teorema clásico de Frobenius. Suponemos, en este punto, algún conocimiento de álgebra lineal.

***Corolario 55.7.** *Sea A una matriz 3 por 3 de números reales positivos. Entonces A tiene un valor propio (valor característico) real positivo.*

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz (relativa a la base estándar para $\mathbb{R}^3$) es A. Sea B la intersección de la 2-esfera S^2 con el primer octante

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ y } x_3 \geq 0\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Es fácil comprobar que B es homeomorfo a la bola B^2, por lo que el teorema del punto fijo es cierto para aplicaciones continuas de B en sí mismo.

Ahora bien, si $x = (x_1, x_2, x_3)$ está en B, entonces todas las componentes de x son no negativas y al menos una es positiva. Dado que todos los elementos de A son positivos, el vector $T(x)$ es un vector cuyas componentes son todas positivas. Como resultado, la aplicación $x \rightarrow T(x)/\|T(x)\|$ es una aplicación continua de B en sí mismo, la cual tiene, por tanto, un punto fijo x_0. Entonces

$$T(x_0) = \|T(x_0)\|x_0,$$

de manera que T (y por lo tanto la matriz A) tiene el valor propio real positivo $\|T(x_0)\|$. ■

Finalmente, probamos un teorema que implica que la región triangular

$$T = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ y } x+y \leq 1\}$$

en $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión topológica al menos igual a 2 (véase §50).

***Teorema 55.8.** *Existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de T por conjuntos de diámetro menor que ϵ, algún punto de T pertenece al menos a tres elementos de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Usamos el hecho de que T es homeomorfo a B^2, por lo tanto podemos aplicar los resultados probados en esta sección al espacio T.

Elijamos $\epsilon > 0$ de forma que ningún conjunto de diámetro menor que ϵ interseque los tres lados de T (de hecho, $\epsilon = \frac{1}{2}$ valdrá). Supongamos que $\mathcal{A} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ es un cubrimiento abierto de T por conjuntos de diámetro menor que ϵ tal que cualesquiera tres elementos de $\mathcal{A}$ tienen intersección vacía, y lleguemos a una contradicción.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, elijamos un vértice v_i de T como sigue: si U_i interseca dos lados de T, sea v_i el vértice común de estos lados. Si U_i interseca sólo un lado de T, sea v_i uno de los vértices de este lado. Si U_i no interseca ningún lado de T, sea v_i cualquier vértice de T.

Sea ahora $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_1, \ldots, U_n\}$ (véase §36). Definamos $k : T \to \mathbb{R}^2$ por la ecuación

$$k(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) v_i.$$

Entonces k es continua. Un punto x de T está contenido a lo más en dos elementos de $\mathcal{A}$, por tanto, como máximo dos de los números $\phi_i(x)$ son distintos de cero. Entonces $k(x) = v_i$ si x está sólo en un conjunto abierto U_i y $k(x) = tv_i + (1-t)v_j$, para algún t con $0 \leq t \leq 1$, si x está en dos conjuntos abiertos U_i y U_j. En otro caso, $k(x)$ pertenece a la unión de los lados de T, que es $\operatorname{Fr} T$. Por lo tanto, k aplica T en $\operatorname{Fr} T$.

Además, k aplica cada lado de T en sí mismo. Esto se debe a que si x pertenece al lado vw de T, cualquier conjunto abierto U_i que contenga a x interseca este lado, de manera que v_i debe ser igual a v o w. La definición de k muestra entonces que $k(x)$ pertenece a vw.

Sea $h : \operatorname{Fr} T \to \operatorname{Fr} T$ la restricción de k a $\operatorname{Fr} T$. Dado que h puede extenderse a la aplicación continua k, h es homotópicamente nula. Por otro lado, h es homotópica a la aplicación identidad de $\operatorname{Fr} T$; desde luego, como h aplica cada lado de T en

sí mismo, la homotopía por rectas entre h y la aplicación identidad de $\operatorname{Fr} T$ será dicha homotopía. Pero la aplicación identidad i de $\operatorname{Fr} T$ *no* es homotópicamente nula. ■

Ejercicios

1. Demuestre que si A es un retracto de B^2, entonces toda aplicación continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.
2. Pruebe que si $h : S^1 \to S^1$ es homotópicamente nula, entonces h tiene un punto fijo y h aplica algún punto x a su antípoda $-x$.
3. Demuestre que si A es una matriz 3 por 3 no singular y con elementos no negativos, entonces A tiene un valor propio real positivo.
4. Suponga que conoce el hecho de que, para cada n, no existe una retracción $r : B^{n+1} \to S^n$ (este resultado puede probarse utilizando técnicas más avanzadas de topología algebraica). Demuestre las siguientes afirmaciones:
   (a) La aplicación identidad $i : S^n \to S^n$ no es homotópicamente nula.
   (b) La aplicación inclusión $j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ no es homotópicamente nula.
   (c) Todo campo de vectores sobre B^{n+1} que no se anula apunta directamente hacia el exterior en algún punto de S^n y directamente hacia el interior en otro punto de S^n.
   (d) Toda aplicación continua $f : B^{n+1} \to B^{n+1}$ tiene un punto fijo.
   (e) Toda matriz $n+1$ por $n+1$ con elementos reales positivos tiene un valor propio positivo.
   (f) Si $h : S^n \to S^n$ es homotópicamente nula, entonces h tiene un punto fijo y h aplica algún punto x en su antípoda $-x$.

*§56 El teorema fundamental del álgebra

Es un hecho básico en la teoría de números complejos que toda ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado n con coeficientes reales o complejos tiene n raíces (si las raíces se cuentan de acuerdo a sus multiplicidades). Probablemente el lector ya habrá oído hablar de este hecho en algún curso de álgebra, aunque es dudoso que le fuera demostrado en ese momento.

La demostración es, de hecho, bastante difícil; la parte más complicada es probar que toda ecuación polinómica de grado positivo tiene *al menos una* raíz. Hay varias

formas de hacer esto. Pueden utilizarse técnicas de álgebra (esta prueba es larga y ardua), o puede desarrollarse la teoría de funciones analíticas de una variable compleja hasta el punto donde este resultado es un corolario trivial del teorema de Liouville. También puede probarse como un corolario relativamente fácil de nuestro cálculo del grupo fundamental del círculo; esto es lo que haremos a continuación.

Teorema 56.1 (Teorema fundamental del álgebra). *Una ecuación polinómica*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado $n > 0$ con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz (real o compleja).

Demostración. *Paso 1*. Consideremos la aplicación $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = z^n$, donde z es un número complejo. Probemos que el homomorfismo inducido f_* de grupos fundamentales es inyectivo.

Sea $p_0 : I \to S^1$ el lazo estándar en S^1,

$$p_0(s) = e^{2\pi i s} = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s).$$

Su imagen bajo f_* es el lazo

$$f(p_0(s)) = (e^{2\pi i s})^n = (\cos 2\pi n s, \operatorname{sen} 2\pi n s).$$

Este lazo se levanta a los caminos $s \to ns$ en el espacio recubridor $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el lazo $f \circ p_0$ se corresponde con el entero n bajo el isomorfismo estándar de $\pi_1(S^1, b_0)$ con los enteros, mientras p_0 se corresponde con el número 1. Así f_* es "multiplicar por n" en el grupo fundamental de S^1, de manera que, en particular, f_* es inyectiva.

Paso 2. Probemos que si $g : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ es la aplicación $g(z) = z^n$, entonces g no es homotópicamente nula.

La aplicación g es igual a la aplicación f del Paso 1 compuesta con la aplicación inclusión $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Ahora bien, f_* es inyectiva y j_* es inyectiva porque S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Por lo tanto, $g_* = j_* \circ f_*$ es inyectiva y g no puede ser homotópicamente nula.

Paso 3. Probemos ahora un caso especial del teorema. Dada una ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

supongamos que

$$|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$$

y demostremos que la ecuación tiene una raíz dentro de la bola unidad B^2.

Supongamos que no tiene tal raíz. Entonces podemos definir una aplicación $k : B^2 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ mediante la ecuación

$$k(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Sea h la restricción de k a S^1. Dado que h se extiende a una aplicación de la bola unidad en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, la aplicación h es homotópicamente nula.

Por otro lado, vamos a definir una homotopía F entre h y la aplicación g del Paso 2; como g no es homotópicamente nula, obtendremos una contradicción. Definimos $F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ por la ecuación

$$F(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0).$$

Véase la Figura 56.1; $F(z,t)$ nunca es igual a $\mathbf{0}$ porque

$$\begin{aligned} |F(z,t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)| \\ &\geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0. \end{aligned}$$

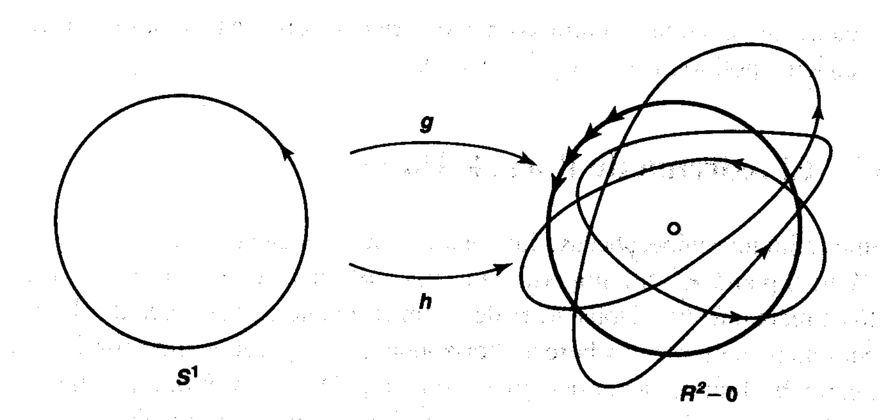


Figura 56.1

Paso 4. Probemos ahora el caso general. Dada una ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

elijamos un número real $c > 0$ y sustituyamos $x = cy$. Obtenemos la ecuación

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \cdots + a_1(cy) + a_0 = 0$$

o

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{c^{n-1}}y + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

Si esta ecuación tiene la raíz $y = y_0$, entonces la ecuación original tiene una raíz $x_0 = cy_0$. De manera que necesitamos simplemente elegir c lo suficientemente grande para que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{c^2}\right| + \cdots + \left|\frac{a_1}{c^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_0}{c^n}\right| < 1$$

y reducir el teorema al caso particular considerado en el Paso 3. ■

Ejercicios

1. Dada una ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes reales o complejos, pruebe que si $|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$, entonces *todas* las raíces de la ecuación están contenidas en el interior de la bola unidad B^2. [*Indicación:* considere $g(x) = 1 + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$ y pruebe que $g(x) \neq 0$ para $x \in B^2$.]

2. Encuentre un círculo centrado en el origen que contenga a todas las raíces de la ecuación polinómica $x^7 + x^2 + 1 = 0$.

*§57 El teorema de Borsuk-Ulam

Tenemos aquí un rompecabezas. Supongamos que nos dan una región poligonal acotada A en el plano $\mathbb{R}^2$. Sin importar la forma que tenga A, es fácil probar que existe una línea recta que bisecciona A, es decir, un recta que corta el área de A por la mitad. Simplemente tomemos la recta horizontal $y = c$ y denotemos por $f(c)$ el área de la parte de A que está por debajo de esta recta. Observemos que f es una función continua de c por lo que, usando el teorema de los valores intermedios, encontramos un valor para c tal que $f(c)$ es exactamente igual a la mitad del área de A.

Pero ahora, en lugar de esto, supongamos que nos dan *dos* de tales regiones A_1 y A_2, y nos piden encontrar una recta que las biseccione *a la vez*. No es nada obvio que exista tal recta. Intente el lector encontrar una, para un par arbitrario de regiones triangulares, si tiene dudas.

De hecho, tal línea recta siempre existe. Este resultado en un corolario de un teorema bien conocido llamado teorema de Borsuk-Ulam, el cual estudiamos ahora.

Definición. Si x es un punto de S^n, entonces su ***antípoda*** es el punto $-x$. Una aplicación $h : S^n \to S^n$ se dice que ***conserva antípodas*** si $h(-x) = -h(x)$, para todo $x \in S^n$.

Teorema 57.1. *Si $h : S^1 \to S^1$ es continua y conserva antípodas, entonces h no es homotópicamente nula.*

Demostración. Sea b_0 el punto $(1, 0)$ de S^1. Sea $\rho : S^1 \to S^1$ una rotación de S^1 que aplique $h(b_0)$ en b_0. Dado que ρ conserva antípodas, también lo hará la composición $\rho \circ h$. Además, si H fuera una homotopía entre h y una aplicación constante, entonces $\rho \circ H$ sería una homotopía entre $\rho \circ h$ y una aplicación constante. Por lo tanto, es suficiente probar el teorema bajo la hipótesis adicional de que $h(b_0) = b_0$.

Paso 1. Sea $q : S^1 \to S^1$ la aplicación $q(z) = z^2$, donde z es un número complejo. En coordenadas reales, $q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta)$. La aplicación q es una aplicación cociente, ya que es continua, cerrada y sobreyectiva. La imagen inversa bajo q de cualquier punto de S^1 consiste en dos puntos antípodas z y $-z$ de S^1. Como $h(-z) = -h(z)$, tenemos la ecuación $q(h(-z)) = q(h(z))$. Por lo tanto, dado que q es una aplicación cociente, la aplicación $q \circ h$ induce una aplicación continua $k : S^1 \to S^1$ tal que $k \circ q = q \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{h} & S^1 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ S^1 & \xrightarrow{k} & S^1 \end{array}$$

Observemos que $q(b_0) = h(b_0) = b_0$, de forma que también $k(b_0) = b_0$. Además, $h(-b_0) = -b_0$.

Paso 2. Probemos que el homomorfismo k_* de $\pi_1(S^1, b_0)$ en sí mismo es no trivial.

Con este fin, mostramos primero que q es una aplicación recubridora (propusimos esto como un ejercicio en §53). La demostración es similar a la prueba de que la aplicación estándar $p : \mathbb{R}^1 \to S^1$ es una aplicación recubridora. Si, por ejemplo, U es el subconjunto S^1 consistente en aquellos puntos que tienen la segunda coordenada positiva, entonces $p^{-1}(U)$ consiste en aquellos puntos de S^1 que están en el primer y tercer cuadrante de $\mathbb{R}^2$. La aplicación q lleva cada uno de estos conjuntos homeomórficamente sobre U. Argumentos análogos se aplican cuando U es la intersección de S^1 con el semiplano abierto inferior, el semiplano abierto derecho o el semiplano abierto izquierdo.

Segundo, observemos que si $\tilde{f}$ es cualquier camino en S^1 de b_0 a $-b_0$, entonces el lazo $f = q \circ \tilde{f}$ representa un elemento no trivial de $\pi_1(S^1, b_0)$. Esto se debe a que $\tilde{f}$ es un levantamiento de f a S^1 que comienza en b_0 y no acaba en b_0.

Finalmente, probemos que k_* es no trivial. Sea $\tilde{f}$ un camino en S^1 de b_0 a $-b_0$ y sea f el lazo $q \circ \tilde{f}$. Entonces $k_*[f]$ es no trivial, ya que $k_*[f] = [k \circ (q \circ \tilde{f})] = [q \circ (h \circ \tilde{f})]$, y lo último no es trivial porque $h \circ \tilde{f}$ es un camino en S^1 de b_0 a $-b_0$.

Paso 3. Finalmente, probemos que el homomorfismo h_* es no trivial, de manera que h no puede ser homotópicamente nula.

El homomorfismo k_* es inyectivo por ser un homomorfismo no trivial de un grupo cíclico infinito en sí mismo. El homomorfismo q_* también es inyectivo; efectivamente, q_* se corresponde con la multiplicación por dos en el grupo de los enteros. Se sigue que $k_* \circ q_*$ es inyectivo. Dado que $q_* \circ h_* = k_* \circ q_*$, el homomorfismo h_* debe ser inyectivo también. ■

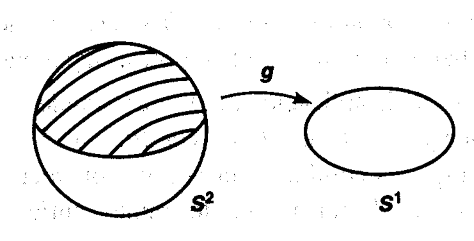


Figura 57.1

Teorema 57.2. *No existe ninguna aplicación continua $g : S^2 \to S^1$ que conserve antípodas.*

Demostración. Supongamos que $g : S^2 \to S^1$ es continua y conserva antípodas. Tomemos S^1 como el ecuador de S^2. Entonces la restricción de g a S^1 es una aplicación continua h de S^1 en sí misma que conserva antípodas. Por el lema precedente, h no es homotópicamente nula. Pero el hemisferio superior E de S^2 es homeomorfo a la bola B^2 y g es una extensión continua de h a E (véase la Figura 57.1). ■

Teorema 57.3 (Teorema de Borsuk-Ulam para S^2). *Dada una aplicación continua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, existe un punto x de S^2 tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq f(-x)$, para todo $x \in S^2$. Entonces la aplicación

$$g(x) = [f(x) - f(-x)]/\|f(x) - f(-x)\|$$

es una aplicación continua $g : S^2 \to S^1$ tal que $g(-x) = -g(x)$, para todo x. ■

Teorema 57.4 (Teorema de la bisección). *Dadas dos regiones poligonales acotadas en $\mathbb{R}^2$, existe un recta en $\mathbb{R}^2$ que bisecciona cada una de ellas.*

Demostración. Tomemos dos regiones poligonales acotadas A_1 y A_2 en el plano $\mathbb{R}^2 \times 1$ de $\mathbb{R}^3$ y demostremos que existe una recta L en este plano que bisecciona cada una de ellas.

Dado un punto u de S^2, consideremos el plano P en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y tiene a u como vector normal unitario. Este plano divide a $\mathbb{R}^3$ en dos semiespacios;

sea $f_i(u)$ igual al área de la porción de A_i que está en el mismo lado de P que el vector u.

Si u es el vector unitario $\mathbf{k}$, entonces $f_i(u) = \text{área}\, A_i$ y si $u = -\mathbf{k}$, entonces $f_i(u) = 0$. En otro caso, el plano P interseca al plano $\mathbb{R}^2 \times 1$ en una recta L que divide $\mathbb{R}^2 \times 1$ en dos semiplanos y $f_i(u)$ es el área de la parte de A_i que está en un lado de esta recta (véase la Figura 57.2).

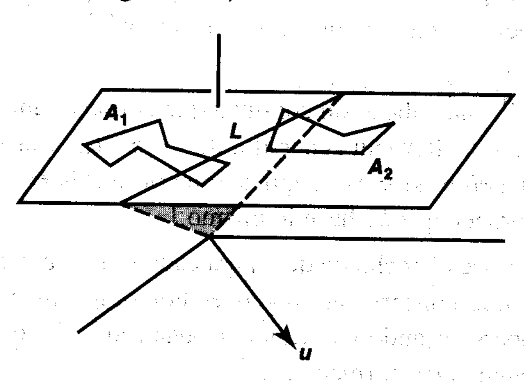


Figura 57.2

Cambiando u por $-u$, obtenemos el mismo plano P pero los semiespacios cambiados. De manera que $f_i(-u)$ es el área de la parte de A_i que está en el semiespacio determinado por P opuesto al que contiene al vector u. Se deduce que

$$f_i(u) + f_i(-u) = \text{área}\, A_i.$$

Consideremos ahora la aplicación $F : S^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$. El teorema de Borsuk-Ulam nos da un punto u de S^2 para el cual $F(u) = F(-u)$. Entonces $f_i(u) = f_i(-u)$, para $i = 1, 2$, de forma que $f_i(u) = \frac{1}{2}\text{área}\, A_i$, como deseábamos probar. ■

Hemos probado el teorema de la bisección para regiones poligonales acotadas en el plano. Sin embargo, lo único que fue necesario en la demostración fue la existencia de una función área aditiva para A_1 y A_2. Así, el teorema es válido para cualesquiera dos conjuntos A_1 y A_2 que sean "Jordan-medibles" en el sentido usual del análisis.

Estos teoremas se generalizan a dimensiones superiores, pero las demostraciones son considerablemente más sofisticadas. La versión generalizada del teorema de la bisección establece que, dados n conjuntos Jordan-medibles en $\mathbb{R}^n$, existe un plano de dimensión $n - 1$ que los bisecciona a todos. En el caso $n = 3$, este resultado se conoce con el nombre de "teorema del sandwich de jamón". Si consideramos un sandwich de jamón consistente en dos piezas de pan y una loncha de jamón, entonces el teorema de la bisección dice que podemos dividir de forma precisa cada una de ellas por la mitad con un simple golpe de hacha.

Ejercicios

1. Pruebe el siguiente "teorema de meteorología": en cualquier instante de tiempo, existen un par de puntos antípodas en la superficie de la tierra en los cuales la temperatura y la presión barométrica son iguales.
2. Demuestre que si $g : S^2 \to S^2$ es continua y $g(x) \neq g(-x)$, para todo x, entonces g es sobreyectiva. [*Indicación:* si $p \in S^2$, entonces $S^2 - \{p\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.]
3. Sea $h : S^1 \to S^1$ una aplicación continua que conserva antípodas con $h(b_0) = b_0$. Demuestre que h_* lleva un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$ a una potencia *impar* de sí mismo. [*Indicación:* si k es la aplicación construida en la demostración del Teorema 57.1, pruebe que k_* hace lo mismo.]
4. Suponga que conoce el hecho de que, para cada n, ninguna aplicación continua $h : S^n \to S^n$ que conserve antípodas es homotópicamente nula (este resultado puede probarse usando técnicas más avanzadas de topología algebraica). Demuestre las siguientes afirmaciones:
   (a) No existe ninguna retracción $r : B^{n+1} \to S^n$.
   (b) No existe ninguna aplicación continua $g : S^{n+1} \to S^n$ que conserve antípodas.
   (c) (Teorema de Borsuk-Ulam). Dada una aplicación continua $f : S^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, existe un punto x de S^{n+1} tal que $f(x) = f(-x)$.
   (d) Si $A_1, \ldots, A_{n+1}$ son conjuntos medibles acotados en $\mathbb{R}^{n+1}$, existe un n-plano en $\mathbb{R}^{n+1}$ que los bisecciona a todos.

§58 Retractos de deformación y tipo de homotopía

Como hemos visto, una forma de obtener información acerca del grupo fundamental de un espacio X es estudiar los espacios recubridores de X. En esta sección vamos a discutir otra forma, la cual involucra el concepto de *tipo de homotopía*. Esto proporciona un método para reducir el problema de calcular el grupo fundamental de un espacio al problema de calcular el grupo fundamental de algún otro espacio —preferiblemente, uno que sea más familiar.

Comenzamos con un lema.

Lema 58.1. *Sean $h, k : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ dos aplicaciones continuas. Si h y k son homotópicas y si la imagen del punto base x_0 de X permanece fija en y_0 durante la homotopía, entonces los homomorfismos h_* y k_* coinciden.*

Demostración. La demostración es inmediata. Por hipótesis, existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ entre h y k tal que $H(x_0, t) = y_0$, para todo t. Se sigue que si f es

un lazo en X basado en x_0, entonces la composición

$$I \times I \xrightarrow{f \times \mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

es una homotopía entre $h \circ f$ y $k \circ f$; es una homotopía de caminos porque f es un lazo en x_0 y H aplica $x_0 \times I$ en y_0. ■

Utilizando este lema, generalizamos un resultado concerniente al espacio $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ y probado anteriormente, demostrando que el homomorfismo inducido por la inclusión $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ no sólo es inyectivo sino también sobreyectivo. Más generalmente, probemos el siguiente teorema.

Teorema 58.2. *La aplicación inclusión $j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.*

Demostración. Sea $X = \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ y $b_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Sea $r : X \to S^n$ la aplicación $r(x) = x/\|x\|$. Entonces $r \circ j$ es la aplicación identidad de S^n, de manera que $r_* \circ j_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi_1(S^n, b_0)$.

Consideremos ahora la composición $j \circ r$, la cual aplica X en sí mismo;

$$X \xrightarrow{r} S^n \xrightarrow{j} X.$$

Esta aplicación no es la identidad de X, pero es homotópica a la aplicación identidad. En efecto, la homotopía por rectas $H : X \times I \to X$, dada por

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx/\|x\|,$$

es una homotopía entre la aplicación identidad de X y la aplicación $j \circ r$. Observemos que $H(x, t)$ nunca es igual a $\mathbf{0}$ porque $(1 - t) + t/\|x\|$ es un número entre 1 y $1/\|x\|$. El punto b_0 permanece fijo durante la homotopía ya que $\|b_0\| = 1$. Se sigue por el lema precedente que el homomorfismo $(j \circ r)_* = j_* \circ r_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi_1(X, b_0)$. ■

¿Qué hace que la demostración anterior funcione? Hablando a grandes rasgos, su realización es posible porque disponemos de una manera natural de deformar la aplicación identidad de $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ a una aplicación que colapsa todo $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ sobre S^n. La deformación H colapsa gradualmente cada recta radial que parte del origen al punto donde se corta con S^n; cada punto de S^n permanece fijo durante esta deformación.

La Figura 58.1 ilustra, en el caso $n = 1$, cómo la deformación H nos da una homotopía de caminos $H(f(s), t)$ entre el lazo f en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ y el lazo $g = f/\|f\|$ en S^1.

Estos comentarios nos conducen a formular una situación más general en la cual se aplica el mismo procedimiento.

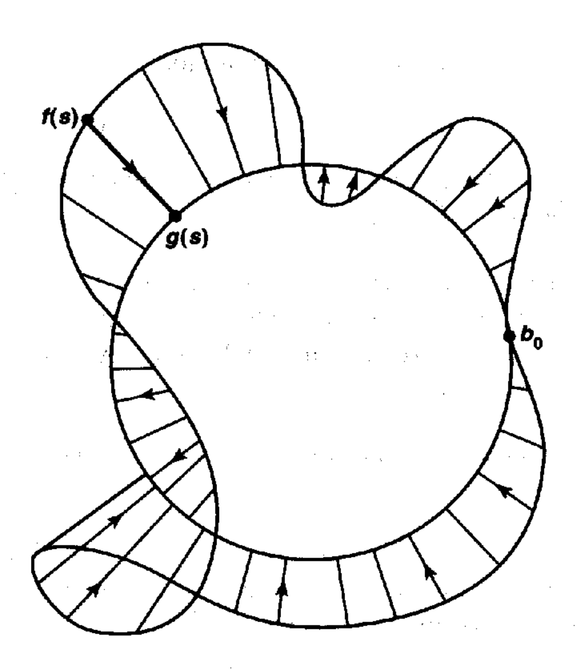


Figura 58.1

Definición. Sea A un subespacio de X. Decimos que A es un ***retracto de deformación*** de X si la aplicación identidad de X es homotópica a una aplicación que lleva todo X en A y tal que cada punto de A permanece fijo durante la homotopía. Esto significa que existe una aplicación continua $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) \in A$, para todo $x \in X$, y $H(a, t) = a$, para todo $a \in A$. La homotopía H se llama ***retracción de deformación*** de X en A. La aplicación $r : X \to A$ definida por la ecuación $r(x) = H(x, 1)$ es una retracción de X en A y H es una homotopía entre la aplicación identidad de X y la aplicación $j \circ r$, donde $j : A \to X$ es la inclusión.

La demostración del teorema anterior se generaliza inmediatamente para probar el siguiente:

Teorema 58.3. *Sea A un retracto de deformación de X y $x_0 \in A$. Entonces la aplicación inclusión*

$$j : (A, x_0) \to (X, x_0)$$

induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

EJEMPLO 1. Denotemos por B el eje z de $\mathbb{R}^3$ y consideremos el espacio $\mathbb{R}^3 - B$. Éste tiene, como un retracto de deformación, al plano xy agujereado $(\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}) \times 0$. La aplicación H definida por la ecuación

$$H(x, y, z, t) = (x, y, (1 - t)z)$$

es un retracto de deformación; éste colapsa gradualmente cada recta paralela al eje z en el punto donde la recta interseca al plano xy. Concluimos que el espacio $\mathbb{R}^3 - B$ tiene grupo fundamental cíclico infinito.

EJEMPLO 2. Consideremos el ***plano doblemente agujereado*** $\mathbb{R}^2 - p - q$. Aseguramos que tiene al espacio "figura ocho" como un retracto de deformación. Más que escribir las ecuaciones, simplemente esbozamos el retracto de deformación; es la deformación en tres fases indicada en la Figura 58.2.

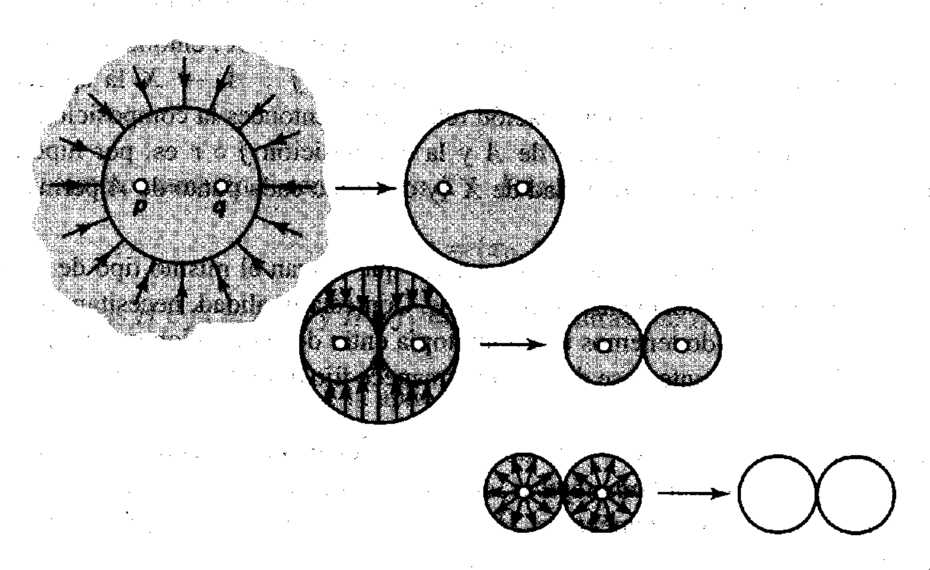


Figura 58.2

EJEMPLO 3. Otro retracto de deformación de $\mathbb{R}^2 - p - q$ es el "espacio theta"

$$\theta = S^1 \cup (0 \times [-1, 1]);$$

dejamos al lector esbozar las aplicaciones involucradas. Como resultado, la figura ocho y el espacio theta tienen grupos fundamentales isomorfos, si bien ninguno es un retracto de deformación del otro.

Desde luego, no sabemos todavía nada acerca del grupo fundamental de la figura ocho, pero ya lo estudiaremos.

El ejemplo de la figura ocho y el espacio theta sugiere la posibilidad de que podría haber una forma más general de demostrar que dos espacios tienen grupos fundamentales isomorfos que probando que uno de ellos es homeomorfo a un retracto de deformación del otro. Formulamos dicha noción ahora.

Definición. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que la aplicación $g \circ f : X \to X$ es homotópica a la aplicación identidad de X y que la aplicación $f \circ g : Y \to Y$ es homotópica a la aplicación identidad de

Y. Entonces las aplicaciones f y g se denominan ***equivalencias homotópicas*** y cada una de ellas se dice que es una ***inversa homotópica*** de la otra.

Es directo comprobar que si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica de X con Y y $h : Y \to Z$ es una equivalencia homotópica de Y con Z, entonces $h \circ f : X \to Z$ es una equivalencia homotópica de X con Z. Se sigue que la relación de equivalencia homotópica es una relación de equivalencia. Dos espacios que son homotópicamente equivalentes se dice que tienen el mismo ***tipo de homotopía***.

Observemos que si A es un retracto de deformación de X, entonces A tiene el mismo tipo de homotopía que X. Efectivamente, sea $j : A \to X$ la aplicación inclusión y sea $r : X \to A$ la aplicación retracción. Entonces la composición $r \circ j$ es *igual* a la aplicación identidad de A y la composición $j \circ r$ es, por hipótesis, homotópica a la aplicación identidad de X (y de hecho cada punto de A permanece fijo durante la homotopía).

Vamos a demostrar ahora que dos espacios que tengan el mismo tipo de homotopía tienen grupos fundamentales isomorfos. Con esta finalidad, necesitamos estudiar qué sucede cuando tenemos una homotopía entre dos aplicaciones continuas de X en Y tales que el punto base de X *no* permanece fijo durante la homotopía.

Lema 58.4. *Sean $h, k : X \to Y$ dos aplicaciones continuas con $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si h y k son homotópicas, entonces existe un camino α en Y de y_0 a y_1 tal que $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$. Ciertamente, si $H : X \times I \to Y$ es la homotopía entre h y k, entonces α es el camino $\alpha(t) = H(x_0, t)$.*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow^{k_*} & \downarrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Demostración. Sea $f : I \to X$ un lazo en X basado en x_0. Debemos probar que

$$k_*([f]) = \hat{\alpha}(h_*([f])).$$

Esta ecuación afirma que $[k \circ f] = [\bar{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$ o, equivalentemente, que

$$[\alpha] * [k \circ f] = [h \circ f] * [\alpha].$$

Ésta es la ecuación que vamos a comprobar.

Para empezar, consideremos los lazos f_0 y f_1 en el espacio $X \times I$ dados por las ecuaciones

$$f_0(s) = (f(s), 0) \quad \text{y} \quad f_1(s) = (f(s), 1).$$

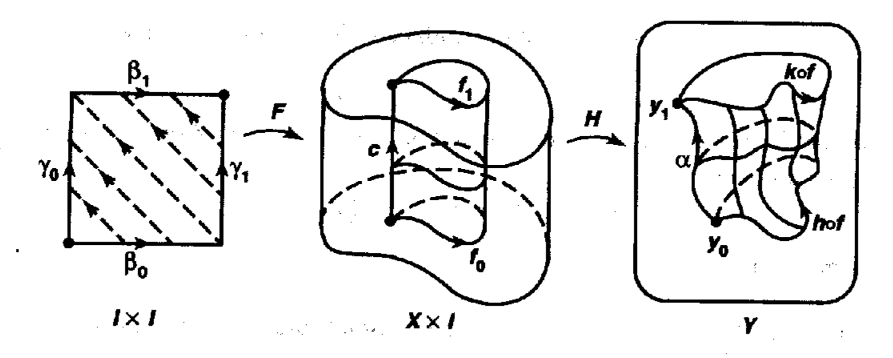


Figura 58.3

Consideremos también el camino c en $X \times I$ dado por la ecuación

$$c(t) = (x_0, t).$$

Entonces $H \circ f_0 = h \circ f$ y $H \circ f_1 = k \circ f$, mientras que $H \circ c$ es igual al camino α (véase la Figura 58.3).

Sea $F : I \times I \to X \times I$ la aplicación $F(s,t) = (f(s), t)$. Consideremos los siguientes caminos en $I \times I$, los cuales se mueven a lo largo de los cuatro lados de $I \times I$:

$$\beta_0(s) = (s, 0) \quad \text{y} \quad \beta_1(s) = (s, 1),$$
$$\gamma_0(s) = (0, t) \quad \text{y} \quad \gamma_1(s) = (1, t).$$

Entonces $F \circ \beta_0 = f_0$ y $F \circ \beta_1 = f_1$, mientras que $F \circ \gamma_0 = F \circ \gamma_1 = c$.

Las caminos rectos a trozos $\beta_0 * \gamma_1$ y $\gamma_0 * \beta_1$ son caminos en $I \times I$ de $(0,0)$ a $(1,1)$; como $I \times I$ es convexo, existe una homotopía de caminos G entre ellos. Entonces $F \circ G$ es una homotopía de caminos en $X \times I$ entre $f_0 * c$ y $c * f_1$. Y $H \circ (F \circ G)$ es una homotopía de caminos en Y entre

$$(H \circ f_0) * (H \circ c) = (h \circ f) * \alpha \quad \text{y}$$
$$(H \circ c) * (H \circ f_1) = \alpha * (k \circ f),$$

como deseábamos. ■

Corolario 58.5. *Sean $h, k : X \to Y$ aplicaciones continuas homotópicas satisfaciendo $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si h_* es inyectiva, sobreyectiva o trivial, entonces también lo es k_*.*

Corolario 58.6. *Sea $h : X \to Y$ una aplicación. Si h es homotópicamente nula, entonces h_* es el homomorfismo trivial.*

Demostración. La aplicación constante induce el homomorfismo trivial. ■

Teorema 58.7. *Sea $f : X \to Y$ continua con $f(x_0) = y_0$. Si f es una equivalencia homotópica entonces*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $g : Y \to X$ una inversa homotópica para f. Consideremos las aplicaciones

$$(X, x_0) \xrightarrow{\ f\ } (Y, y_0) \xrightarrow{\ g\ } (X, x_1) \xrightarrow{\ f\ } (Y, y_1),$$

donde $x_1 = g(y_0)$ e $y_1 = f(x_1)$. Tenemos los correspondientes homomorfismos inducidos:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(f_{x_0})_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \swarrow_{g_*} & \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{(f_{x_1})_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

[Aquí tenemos que distinguir entre los homomorfismos inducidos por f relativos a dos puntos base diferentes.] Ahora bien

$$g \circ f : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_1)$$

es, por hipótesis, homotópica a la aplicación identidad, de manera que existe un camino α en X tal que

$$(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (i_X)_* = \hat{\alpha}.$$

Se sigue que $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$ es un isomorfismo.

Análogamente, dado que $f \circ g$ es homotópica a la aplicación identidad i_Y, el homomorfismo $(f \circ g)_* = (f_{x_1})_* \circ g_*$ es un isomorfismo.

Lo primero implica que g_* es sobreyectiva y lo segundo implica que g_* es inyectiva. Por lo tanto, g_* es un isomorfismo. Aplicando la primera ecuación una vez más, concluimos que

$$(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \hat{\alpha},$$

de forma que $(f_{x_0})_*$ es también un isomorfismo.

Observemos que, aunque g es una inversa homotópica para f, el homomorfismo g_* no es un inverso para el homomorfismo $(f_{x_0})_*$. ■

La relación de equivalencia homotópica es claramente más general que el concepto de retracto de deformación. El espacio theta y la figura ocho son ambos retractos de

deformación del plano doblemente agujereado. De manera que son equivalentes homotópicos al plano doblemente agujereado y, por tanto, equivalentes entre ellos. Pero ninguno es homeomorfo a un retracto de deformación del otro; de hecho, ninguno de ellos puede ni siquiera embeberse en el otro.

Es un hecho llamativo que la situación que se tiene para estos dos espacios es una situación estándar en relación con las equivalencias homotópicas. Martin Fuchs demostró un teorema en el sentido de que dos espacios X e Y tienen el mismo tipo de homotopía si, y sólo si, los dos son homeomorfos a retractos de deformación de un mismo espacio Z. La demostración, aunque utiliza sólo herramientas elementales, es difícil [F].

Ejercicios

1. Demuestre que si A es un retracto de deformación de X y B es un retracto de deformación de A, entonces B es un retracto de deformación de X.

2. Para cada uno de los siguientes espacios, el grupo fundamental es trivial, o cíclico infinito, o isomorfo al grupo fundamental de la figura ocho. Determine para cada espacio cuál de las tres alternativas se da.

(a) El "toro sólido", $B^2 \times S^1$.
(b) El toro T menos un punto.
(c) El cilindro $S^1 \times I$.
(d) El cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$.
(e) $\mathbb{R}^3$ con los ejes no negativos x, y, z suprimidos.

Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(f) $\{x \mid \|x\| > 1\}$.
(g) $\{x \mid \|x\| \geq 1\}$.
(h) $\{x \mid \|x\| < 1\}$.
(i) $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times 0)$.
(j) $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.
(k) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times 0)$.
(l) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_+ \times 0)$.

3. Demuestre que, dada una colección $\mathcal{C}$ de espacios, la relación de equivalencia homotópica es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$.

4. Sea X la figura ocho y sea Y el espacio theta. Describa aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ que sean inversas homotópicas una de otra.

5. Recordemos que un espacio X se dice que es *contractible* si la aplicación identidad de X en sí mismo es homotópicamente nula. Demuestre que X es contractible si, y sólo si, X tiene el tipo de homotopía de un espacio unipuntual.

6. Pruebe que un retracto de un espacio contractible es contractible.

7. Sea A un subespacio de X; sean $j : A \to X$ la aplicación inclusión y $f : X \to A$ una aplicación continua. Suponga que existe una homotopía $H : X \times I \to X$ entre la aplicación $j \circ f$ y la aplicación identidad de X.

(a) Demuestre que si f es una retracción, entonces j_* es un isomorfismo.

(b) Pruebe que si H aplica $A \times I$ en A, entonces j_* es un isomorfismo.

(c) Dé un ejemplo en el cual j_* no sea un isomorfismo.

***8.** Encuentre un espacio X y un punto x_0 de X tal que la inclusión $\{x_0\} \to X$ sea una equivalencia homotópica, pero $\{x_0\}$ no sea un retracto de deformación de X. [*Indicación:* sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos de recta $(1/n) \times I$, para $n \in \mathbb{Z}_+$, el segmento de recta $0 \times I$ y el segmento de recta $I \times 0$; sea x_0 el punto $(0, 1)$. Si $\{x_0\}$ es un retracto de deformación de X, pruebe que, para cualquier entorno U de x_0, la componente por caminos de U en la que está x_0 contiene un entorno de x_0.]

9. Definimos el *grado* de una aplicación continua $h : S^1 \to S^1$ como sigue:

Sea b_0 el punto $(1, 0)$ de S^1; elijamos un generador γ para el grupo cíclico infinito $\pi_1(S^1, b_0)$. Si x_0 es cualquier punto de S^1, escojamos un camino α en S^1 de b_0 a x_0, y definamos $\gamma(x_0) = \hat{\alpha}(\gamma)$. Entonces $\gamma(x_0)$ genera $\pi_1(S^1, x_0)$. El elemento $\gamma(x_0)$ es independiente de la elección del camino α ya que el grupo fundamental de S^1 es abeliano.

Dada ahora $h : S^1 \to S^1$, elijamos $x_0 \in S^1$ y pongamos $h(x_0) = x_1$. Consideremos el homomorfismo

$$h_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_1).$$

Como ambos grupos son cíclicos infinitos, tenemos

$$(*) \qquad h_*(\gamma(x_0)) = d \cdot \gamma(x_1)$$

para algún entero d, si el grupo lo escribimos aditivamente. El entero d se llama ***grado*** de h y se denota por $\deg h$.[†]

El grado de h es independiente de la elección del generador γ; eligiendo el otro generador simplemente cambiaría el signo de ambos lados de $(*)$.

(a) Demuestre que d es independiente de la elección de x_0.

(b) Pruebe que si $h, k : S^1 \to S^1$ son homotópicas entonces tienen el mismo grado.

(c) Demuestre que $\deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$.

[†] N.T.: La razón de esta terminología reside en que *grado* es, en inglés, *degree*.

(d) Calcule los grados de la aplicación constante, la aplicación identidad, la aplicación reflexión $\rho(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ y la aplicación $h(z) = z^n$, donde z es un número complejo.

*(e) Pruebe que si $h, k : S^1 \to S^1$ tienen el mismo grado entonces son homotópicas.

10. Suponga que a toda aplicación $h : S^n \to S^n$ le hemos asignado un entero, denotado por $\deg h$ y denominado ***grado*** de h, tal que:

(i) Las aplicaciones homotópicas tienen el mismo grado.

(ii) $\deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$.

(iii) La aplicación identidad tiene grado 1, cualquier aplicación constante tiene grado 0 y la aplicación reflexión $\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1})$ tiene grado -1.

[Se puede construir una de estas funciones utilizando las herramientas de topología algebraica. Intuitivamente, $\deg h$ mide las veces que h enrolla S^n en sí misma; el signo nos dice si h conserva la orientación o no.] Pruebe lo siguiente:

(a) No existe una retracción $r : B^{n+1} \to S^n$.

(b) Si $h : S^n \to S^n$ tiene grado distinto de $(-1)^{n+1}$, entonces h tiene un punto fijo. [*Indicación:* demuestre que si h no tiene puntos fijos, entonces h es homotópica a la aplicación antípoda $a(x) = -x$.]

(c) Si $h : S^n \to S^n$ tiene grado distinto de 1, entonces h aplica algún punto x en su antípoda $-x$.

(d) Si S^n tiene un campo de vectores tangentes v que no se anula, entonces n es impar. [*Indicación:* si existe v, pruebe que la aplicación identidad es homotópica a la aplicación antípoda.]

§59 El grupo fundamental de S^n

Retornamos ahora al problema comentado al comienzo del capítulo: el problema de probar que la esfera, el toro y el doble toro son superficies topológicamente distintas. Comenzamos con la esfera; vamos a demostrar que S^n es simplemente conexa, para $n \geq 2$. El resultado clave que necesitamos queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 59.1. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X. Supongamos que $U \cap V$ es conexo por caminos y que $x_0 \in U \cap V$. Sean i y j las aplicaciones inclusión de U y V, respectivamente, en X. Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \qquad \text{y} \qquad j_* : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

generan $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Este teorema establece que, dado un lazo f en X basado en x_0, éste es homotópico por caminos a un producto de la forma $(g_1 * (g_2 * (\cdots * g_n)))$, donde cada g_i es un lazo en X basado en x_0 enteramente contenido en U o en V.

Paso 1. Probemos que existe una subdivisión $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ del intervalo unidad tal que $f(a_i) \in U \cap V$ y $f([a_{i-1}, a_i])$ está contenido en U o V, para cada i.

Para comenzar, elijamos una subdivisión $b_0, \ldots, b_m$ de $[0, 1]$ tal que, para cada i, el conjunto $f([b_{i-1}, b_i])$ esté contenido en U o V (utilizando el teorema del número de Lebesgue). Si $f(b_i)$ pertenece a $U \cap V$, para cada i, habremos terminado. Si no es así, sea i un índice tal que $f(b_i) \notin U \cap V$. Cada uno de los conjuntos $f([b_{i-1}, b_i])$ y $f([b_i, b_{i+1}])$ está contenido en U o en V. Si $f(b_i) \in U$, entonces ambos conjuntos deben estar en U; si $f(b_i) \in V$, ambos conjuntos deben estar en V. En cualquier caso, podemos suprimir b_i, obteniendo una nueva subdivisión $c_0, \ldots, c_{m-1}$ que sigue satisfaciendo la condición de que $f([c_{i-1}, c_i])$ esté contenido en U o en V, para cada i.

Un número finito de repeticiones de este proceso nos permite conseguir la subdivisión deseada.

Paso 2. Probemos el teorema. Dado f, sea $a_0, \ldots, a_n$ la subdivisión construida en el Paso 1. Definamos f_i como el camino en X igual a la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f. Entonces f_i es un camino que está contenido en U o en V, y por el Teorema 51.3,

$$[f] = [f_1] * [f_2] * \cdots * [f_n].$$

Para cada i, elijamos un camino α_i en $U \cap V$ de x_0 a $f(a_i)$ (aquí utilizamos el hecho de que $U \cap V$ es conexo por caminos). Dado que $f(a_0) = f(a_n) = x_0$, podemos escoger que α_0 y α_n sean ambos el camino constante en x_0 (véase la Figura 59.1).

Ponemos ahora

$$g_i = (\alpha_{i-1} * f_i) * \overline{\alpha_i}$$

para cada i. Entonces g_i es un *lazo* en X basado en x_0 cuya imagen está contenida en U o en V. Mediante un cálculo directo se comprueba que

$$[g_1] * [g_2] * \cdots * [g_n] = [f_1] * [f_2] * \cdots * [f_n]. \qquad \blacksquare$$

El teorema precedente en un caso especial de un teorema famoso de topología conocido por *teorema de Seifert-van Kampen*, el cual expresa el grupo fundamental del espacio $X = U \cup V$ de manera bastante más general, cuando $U \cap V$ es conexo, en términos de los grupos fundamentales de U y V. Estudiaremos este teorema en el Capítulo 11.

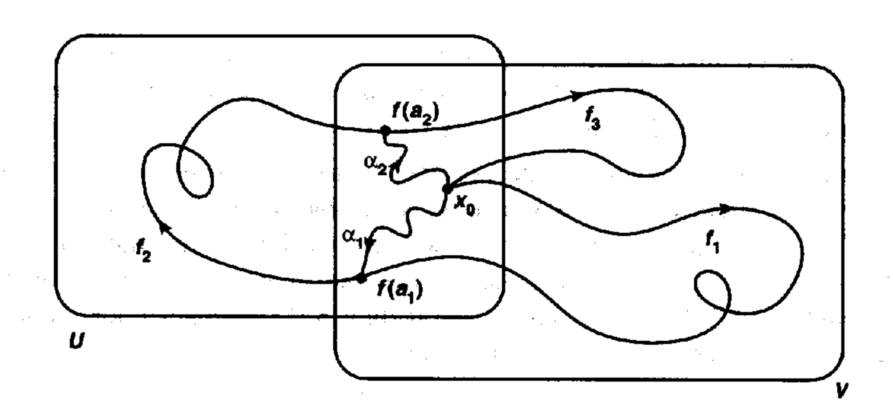


Figura 59.1

Corolario 59.2. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X y que $U \cap V$ es conexo por caminos y no vacío. Si U y V son simplemente conexos entonces X es simplemente conexo.*

Teorema 59.3. *Si $n \geq 2$, la n-esfera S^n es simplemente conexa.*

Demostración. Sean $p = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $q = (0, 0, \ldots, -1)$ el "polo norte" y el "polo sur" de S^n, respectivamente.

Paso 1. Probemos que, para $n \geq 1$, la *esfera agujereada* $S^n - p$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Definamos $f : (S^n - p) \to \mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

La aplicación f se denomina ***proyección estereográfica***. (Si cogemos la recta en $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasa por el polo norte p y el punto x de $S^n - p$, entonces esta recta interseca al n-plano $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $f(x) \times 0$.) Se comprueba que f es un homeomorfismo viendo que la aplicación $g : \mathbb{R}^n \to (S^n - p)$ dada por

$$g(y) = g(y_1, \ldots, y_n) = (t(y) \cdot y_1, \ldots, t(y) \cdot y_n, 1 - t(y)),$$

donde $t(y) = 2/(1 + \|y\|^2)$, es la inversa por la derecha y por la izquierda de f.

Observemos que la aplicación reflexión $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1})$ define un homeomorfismo entre $S^n - p$ y $S^n - q$, de manera que el último espacio también es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Paso 2. Probemos el teorema. Sean U y V los conjuntos abiertos $U = S^n - p$ y $V = S^n - q$ de S^n.

Observemos primero que, para $n \geq 1$, la esfera S^n es conexa por caminos. Esto se deduce del hecho de que U y V son conexos por caminos (al ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$) y tienen en común el punto $(1, 0, \ldots, 0)$ de S^n.

Probemos ahora que, para $n \geq 2$, la esfera S^n es simplemente conexa. Los espacios U y V son simplemente conexos, al ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$. Su intersección es igual a $S^n - p - q$, que es homeomorfo bajo la proyección estereográfica a $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$. El último espacio es conexo por caminos, ya que todo punto de $\mathbb{R}^n - \mathbf{0}$ puede unirse con un punto de S^{n-1} por un segmento de recta y S^{n-1} es conexo por caminos si $n \geq 2$. Entonces se aplica el corolario anterior. ∎

Ejercicios

1. Sea X la unión de dos copias de S^2 teniendo un punto en común. ¿Cuál es el grupo fundamental de X? Pruebe que su respuesta es correcta. Tenga en cuenta que la unión de dos espacios simplemente conexos con un punto en común no es necesariamente simplemente conexa (véase [S], pág. 59).

2. Juzgue la siguiente “prueba” de que S^2 es simplemente conexa: sea f un lazo en S^2 basado en x_0. Elijamos un punto p de S^2 que no esté en la imagen de f. Dado que $S^2 - p$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, el lazo f es homotópico por caminos al lazo constante.

3. (a) Demuestre que $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $n > 1$.
(b) Demuestre que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $n > 2$.

De hecho, es cierto que $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $n \neq m$, pero la demostración requiere herramientas más avanzadas de topología algebraica.

4. Suponga la hipótesis del Teorema 59.1.

(a) ¿Qué puede decir acerca del grupo fundamental de X si j_* es el homomorfismo trivial? ¿Y si ambos i_* y j_* son triviales?
(b) Dé un ejemplo donde i_* y j_* sean triviales pero ni U ni V tengan grupos fundamentales triviales.

§60 Los grupos fundamentales de algunas superficies

Recordemos que una *superficie* es un espacio de Hausdorff con una base numerable y tal que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Las superficies tienen interés en diferentes partes de las matemáticas, incluyendo geometría, topología y análisis complejo. Consideramos aquí varias superficies, incluyendo el toro y el doble toro, y probamos, comparando sus grupos fundamentales,

que no son homeomorfas. En un capítulo posterior, clasificaremos salvo homeomorfismos todas las superficies compactas.

Consideramos primero el toro. En un ejercicio anterior, se le pidió al lector calcular su grupo fundamental utilizando la teoría de espacios recubridores. Aquí, calculamos su grupo fundamental utilizando un teorema acerca del grupo fundamental de un espacio producto.

Recordemos que si A y B son grupos con operación $\cdot$, entonces el producto cartesiano $A \times B$ tiene estructura de grupo con la operación

$$(a \times b) \cdot (a' \times b') = (a \cdot a') \times (b \cdot b').$$

Recordemos también que si $h : C \to A$ y $k : C \to B$ son homomorfismos de grupos, entonces la aplicación $\Phi : C \to A \times B$ definida por $\Phi(c) = h(c) \times k(c)$ es un homomorfismo de grupos.

Teorema 60.1. *$\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Demostración. Sean $p : X \times Y \to X$ y $q : X \times Y \to Y$ las aplicaciones proyección. Si utilizamos los puntos base indicados en el enunciado del teorema, tenemos los homomorfismos inducidos

$$p_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0),$$
$$q_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Definimos un homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación

$$\Phi([f]) = p_*([f]) \times q_*([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f].$$

Probemos que Φ es un isomorfismo.

La aplicación Φ es sobreyectiva. Sea $g : I \to X$ un lazo basado en x_0 y sea $h : I \to Y$ un lazo basado en y_0. Queremos probar que el elemento $[g] \times [h]$ está en la imagen de Φ. Definamos $f : I \to X \times Y$ por la ecuación

$$f(s) = g(s) \times h(s).$$

Entonces f es un lazo en $X \times Y$ basado en $x_0 \times y_0$ y

$$\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] = [g] \times [h],$$

como deseábamos.

El núcleo de Φ es cero. Supongamos que $f : I \to X \times Y$ es un lazo en $X \times Y$ basado en $x_0 \times y_0$ y tal que $\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f]$ es el elemento neutro. Esto significa que $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ y $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$; sean G y H las respectivas homotopías de caminos. Entonces la aplicación $F : I \times I \to X \times Y$ definida por

$$F(s,t) = G(s,t) \times H(s,t)$$

es una homotopía de caminos entre f y el lazo constante basado en $x_0 \times y_0$. ■

Corolario 60.2. *El grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Definimos ahora una superficie llamada el plano proyectivo y calculamos su grupo fundamental.

Definición. El ***plano proyectivo*** P^2 es el espacio cociente obtenido de S^2 identificando cada punto x de S^2 con su punto antípoda $-x$.

Puede que el plano proyectivo no sea un espacio con el que esté familiarizado el lector; éste no puede embeberse en $\mathbb{R}^3$ y es, por tanto, difícil de visualizar. Sin embargo, es el objeto fundamental de estudio en geometría proyectiva, igual que el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ lo es en la geometría euclídea ordinaria. Los topólogos están principalmente interesados en éste como ejemplo de una superficie.

Teorema 60.3. *El plano proyectivo P^2 es una superficie compacta y la aplicación cociente $p : S^2 \to P^2$ es una aplicación recubridora.*

Demostración. Probemos primero que p es una aplicación abierta. Sea U un abierto en S^2. La aplicación antípoda $a : S^2 \to S^2$ dada por $a(x) = -x$ es un homeomorfismo de S^2, por tanto $a(U)$ es abierto en S^2. Dado que

$$p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U),$$

este conjunto también es abierto en S^2. De manera que, por definición, $p(U)$ es abierto en P^2. Un razonamiento similar demuestra que p es una aplicación cerrada.

Probemos ahora que p es una aplicación recubridora. Dado un punto y de P^2, elijamos $x \in p^{-1}(y)$. Entonces escojamos un ϵ-entorno U de x en S^2 para algún $\epsilon < 1$, utilizando la distancia euclídea d de $\mathbb{R}^3$. Se tiene que U no contiene ningún par $\{z, a(z)\}$ de puntos antípodas de S^2 dado que $d(z, a(z)) = 2$. Como resultado, la aplicación

$$p : U \longrightarrow p(U)$$

es biyectiva. Como es continua y abierta, es un homeomorfismo. Análogamente

$$p : a(U) \to p(a(U)) = p(U)$$

es un homeomorfismo. El conjunto $p^{-1}(p(U))$ es, por tanto, la unión de los dos conjuntos abiertos y disjuntos U y $a(U)$, cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente mediante p sobre $p(U)$. Entonces $p(U)$ es un entorno de $p(x) = y$ que está regularmente cubierto por p.

Dado que S^2 tiene una base numerable $\{U_n\}$, el espacio P^2 tiene una base numerable $\{p(U_n)\}$.

El hecho de que P^2 sea de Hausdorff se sigue del hecho de que S^2 es normal y p es una aplicación cerrada (véase el Ejercicio 6 de §31). Como alternativa, podemos dar una prueba directa: sean y_1 e y_2 dos puntos de P^2. El conjunto $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2)$ consiste en cuatro puntos; sea 2ϵ la mínima distancia entre ellos. Sean U_1 el ϵ-entorno de uno de los puntos de $p^{-1}(y_1)$ y U_2 el ϵ-entorno de uno de los puntos de $p^{-1}(y_2)$. Entonces

$$U_1 \cup a(U_1) \qquad \text{y} \qquad U_2 \cup a(U_2)$$

son disjuntos. Se sigue que $p(U_1)$ y $p(U_2)$ son entornos disjuntos de y_1 e y_2, respectivamente, en P^2.

Dado que S^2 es una superficie y todo punto de P^2 tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de S^2, el espacio P^2 es también una superficie. ■

Corolario 60.4. *$\pi_1(P^2, y)$ es un grupo de orden 2.*

Demostración. La proyección $p : S^2 \to P^2$ es una aplicación recubridora. Como S^2 es simplemente conexa, podemos aplicar el Teorema 54.4, el cual nos dice que existe una correspondencia biyectiva entre $\pi_1(P^2, y)$ y el conjunto $p^{-1}(y)$. Dado que este conjunto tiene dos elementos, $\pi_1(P^2, y)$ es un grupo de orden 2.

Cualquier grupo de orden 2 es, desde luego, isomorfo a $\mathbb{Z}/2$, los enteros mod 2. ■

Podemos proceder análogamente para definir P^n, para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$, como el espacio obtenido de S^n identificando cada punto x con su antípoda $-x$; se llama ***n*-espacio proyectivo**. La demostración del Teorema 60.3 vale, sin cambio alguno, para probar que la proyección $p : S^n \to P^n$ es una aplicación recubridora. Entonces como S^n es simplemente conexa, para $n \geq 2$, deducimos que $\pi_1(P^n, y)$ es un grupo de dos elementos, para $n \geq 2$. Dejamos al lector investigar lo que sucede cuando $n = 1$.

Estudiamos ahora el doble toro. Comenzamos con un lema acerca de la figura ocho.

Lema 60.5. *El grupo fundamental de la figura ocho es no abeliano.*

Demostración. Sea X la unión de dos círculos A y B en $\mathbb{R}^2$ cuya intersección consiste en un solo punto x_0. Describimos cierto espacio recubridor E de X.

El espacio E es el subespacio del plano consistente en el eje x y el eje y, y pequeños círculos tangentes a lo largo de estos ejes, un círculo tangente al eje x en cada punto entero no nulo y un círculo tangente al eje y en cada punto entero no nulo.

La aplicación proyección $p : E \to X$ enrolla el eje x alrededor del círculo A y enrolla el eje y alrededor del círculo B; en cada caso, los puntos enteros son aplicados por p en el punto base x_0. Cada círculo tangente en un punto entero del eje x se aplica homeomórficamente mediante p sobre B, mientras que cada círculo tangente en un punto entero del eje y se aplica homeomórficamente mediante p sobre A; en cada caso, el punto de tangencia se aplica en el punto x_0. Dejamos al lector comprobar mentalmente que efectivamente la aplicación p es una aplicación recubridora.

Podríamos escribir esta descripción en ecuaciones si lo deseáramos, pero la descripción informal nos parece más fácil de seguir.

Sea ahora $\tilde{f} : I \to E$ el camino $\tilde{f}(s) = s \times 0$, el cual va del origen al punto 1×0 a lo largo del eje x. Sea $\tilde{g} : I \to E$ el camino $\tilde{g}(s) = 0 \times s$, que va desde el origen al punto 0×1 a lo largo del eje y. Sean $f = p \circ \tilde{f}$ y $g = p \circ \tilde{g}$; entonces f y g son lazos en la figura ocho basados en x_0 y dispuestos alrededor de los círculos A y B, respectivamente (véase la Figura 60.1).

Aseguramos que $f * g$ y $g * f$ no son homotópicos por caminos, de manera que el grupo fundamental de la figura ocho no es abeliano.

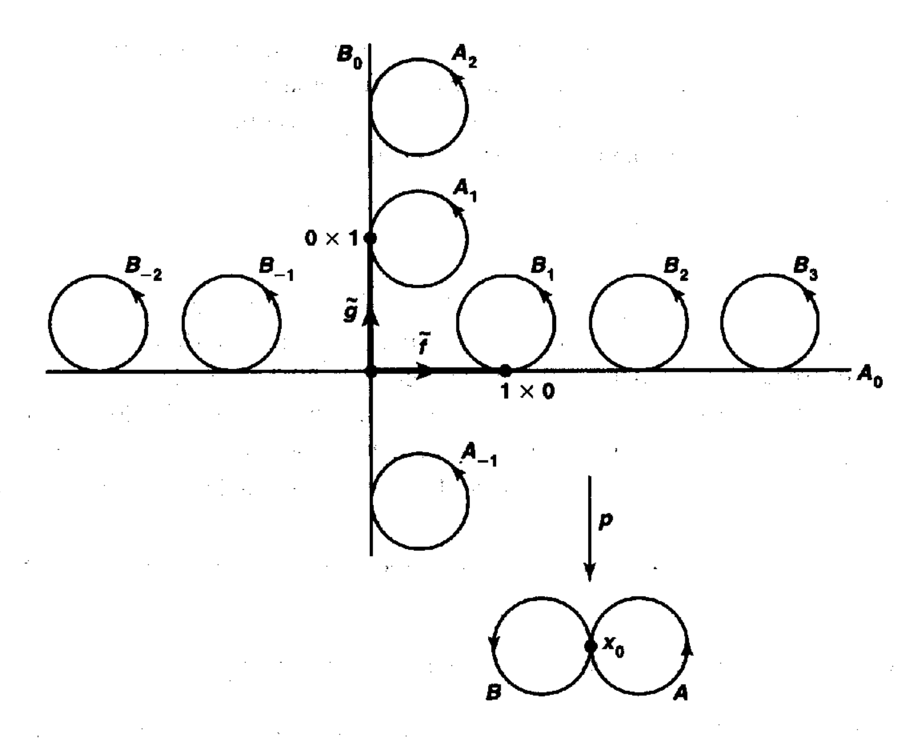


Figura 60.1

Para probar esta afirmación, levantemos cada uno de estos caminos en E comenzando en el origen. El camino $f * g$ se levanta a un camino que va desde el origen al punto 1×0 a lo largo del eje x y entonces da una vuelta alrededor del círculo tangente al eje x en el punto 1×0. Por otro lado, el camino $g * f$ se levanta a un camino en E que va desde el origen al punto 0×1 a lo largo del eje y, y entonces, da una vuelta alrededor del círculo tangente al eje y en el punto 0×1. Dado que los levantamientos no acaban en el mismo punto, $f * g$ y $g * f$ no pueden ser homotópicos por caminos. ■

Probaremos más adelante que el grupo fundamental de la figura ocho es, de hecho, el grupo que los algebristas llaman "grupo libre de dos generadores".

Teorema 60.6. *El grupo fundamental del doble toro es no abeliano.*

Demostración. El doble toro $T\#T$ es la superficie obtenida tomando dos copias del toro, quitando un pequeño disco abierto a cada uno de ellos, y uniendo los objetos resultantes a lo largo de sus bordes. Aseguramos que la figura ocho X es un retracto de $T\#T$. Este hecho implica que la inclusión $j : X \to T\#T$ induce un monomorfismo j_*, de manera que $\pi_1(T\#T, x_0)$ no es abeliano.

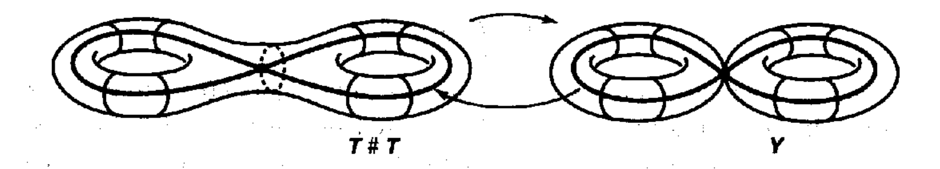


Figura 60.2

Podemos escribir las ecuaciones para la retracción $r : T\#T \to X$, pero es más sencillo indicarla con un dibujo, como hemos hecho en la Figura 60.2. Sea Y la unión de dos toros teniendo un punto en común. Llevamos primero $T\#T$ sobre Y mediante una aplicación que colapsa el círculo agujereado en un punto pero que es inyectiva en el resto; esta aplicación define un homeomorfismo h entre la figura ocho en $T\#T$ y la figura ocho en Y. Entonces hacemos un retracto de Y sobre su figura ocho aplicando cada círculo transversal en el punto donde éste interseca a la figura ocho. Finalmente, aplicamos la figura ocho en Y sobre la figura ocho en $T\#T$ mediante la aplicación h^{-1}. ■

Corolario 60.7. *La 2-esfera, el toro, el plano proyectivo y el doble toro son topológicamente distintos.*

Ejercicios

1. Calcule los grupos fundamentales del "toro sólido" $S^1 \times B^2$ y el espacio producto $S^1 \times S^2$.

2. Sea X el espacio cociente obtenido de B^2 identificando cada punto x de S^1 con su antípoda $-x$. Demuestre que X es homeomorfo al plano proyectivo P^2.

3. Sea $p : E \to X$ la aplicación construida en la demostración del Lema 60.5. Sea E' el subespacio de E dado por la unión del eje x y el eje y. Demuestre que $p|E'$ no es una aplicación recubridora.

4. El espacio P^1 y la aplicación recubridora $p : S^1 \to P^1$ nos resultan familiares. ¿Qué son?

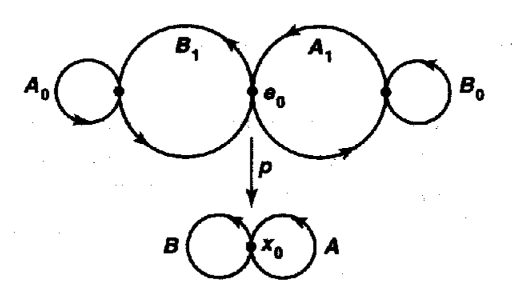


Figura 60.3

5. Considere la aplicación recubridora indicada en la Figura 60.3. Aquí, p enrolla A_1 alrededor de A dos veces y enrolla B_1 alrededor de B también dos veces; p aplica A_0 y B_0 homeomórficamente sobre A y B, respectivamente. Utilice este espacio recubridor para demostrar que el grupo fundamental de la figura ocho es no abeliano.

Capítulo 10

Teoremas de separación en el plano

Existen algunas cuestiones difíciles acerca de la topología del plano que surgen de modo natural en el estudio del análisis. Las respuestas a estas preguntas parecen bastante obvias geométricamente, pero sorprendentemente son bastante difíciles de probar. Entre estas cuestiones se encuentra el teorema de la curva de Jordan, el teorema de Brouwer sobre la invariancia del dominio y el clásico teorema que afirma que el número de rotación de una curva simple cerrada es cero ó ± 1. Obtendremos dichos teoremas en este capítulo como consecuencia de nuestro estudio sobre los espacios recubridores y el grupo fundamental.

§61 El teorema de separación de Jordan

En primer lugar consideramos uno de los teoremas clásicos de matemáticas, el teorema de la curva de Jordan. Dicho teorema establece un hecho que geométricamente es bastante plausible, como es que una curva simple cerrada en el plano siempre divide al plano en dos partes, su "interior" y su "exterior". Originalmente fue conjeturado en 1892 por Camile Jordan, proporcionándose varias demostraciones incorrectas, una de ellas del propio Jordan. La primera prueba correcta del resultado fue proporcionada por Oswald Veblen en 1905. Las demostraciones iniciales eran complicadas, y con el paso de los años se han encontrado demostraciones más sencillas. Si utilizamos las herramientas de la topología algebraica moderna, y en particular la teoría de la homología singular, entonces la demostración es bastante directa. La prueba que presentamos en este libro es la más sencilla que conocemos, entre las que utilizan únicamente resultados de la teoría de espacios recubridores y el grupo fundamental.

Nuestra demostración del teorema de la curva de Jordan se divide en tres partes. La primera, que denominaremos *teorema de separación de Jordan*, establece que

una curva simple cerrada en el plano lo separa en, al menos, dos componentes. La segunda afirma que un arco en el plano no lo divide. Y la tercera parte, el *teorema de la curva de Jordan* propiamente dicho, afirma que una curva simple cerrada C en el plano lo divide precisamente en dos componentes, siendo C la frontera común de ambas. El primero de estos teoremas será probado en esta sección.

En el estudio de los teoremas de separación es a menudo conveniente reformularlos como teoremas de separación para subconjuntos de la esfera S^2 en lugar de considerarlos en el plano $\mathbb{R}^2$. Los teoremas de separación en $\mathbb{R}^2$ se obtendrán como una consecuencia. La conexión entre los dos conjuntos de teoremas nos la proporciona el siguiente lema.

Recordemos que si b es un punto de S^2, entonces existe un homeomorfismo h de $S^2 - b$ en $\mathbb{R}^2$; basta considerar una rotación que aplica el punto b en el polo norte y componerla con la proyección estereográfica.

Lema 61.1. *Sean C un subespacio compacto de S^2, b un punto de $S^2 - C$ y h el homeomorfismo de $S^2 - b$ en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que U es una componente de $S^2 - C$. Si U no contiene a b, entonces $h(U)$ es una componente acotada de $\mathbb{R}^2 - h(C)$. Si U contiene a b, entonces $h(U - b)$ es la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - h(C)$.*

En particular, si $S^2 - C$ tiene n componentes, entonces $\mathbb{R}^2 - h(C)$ también tiene n componentes.

Demostración. Probaremos primero que si U es una componente de $S^2 - C$ entonces $U - b$ es conexo. Este resultado es trivial si $b \notin U$, por lo que podemos suponer que $b \in U$ y que tenemos conjuntos A y B que constituyen una separación de $U - b$. Escojamos un entorno W de b disjunto con C tal que W sea homeomorfo a una bola abierta de $\mathbb{R}^2$. Como W es conexo está contenido en U; como $W - b$ es conexo entonces está contenido enteramente en A o en B. Digamos que $W - b \subset A$. Entonces b no es un punto límite de B, ya que W es un entorno de b disjunto con B. Se deduce entonces que los conjuntos $A \cup \{b\}$ y B forman una separación de U, lo que contradice la hipótesis.

Sea $\{U_\alpha\}$ la familia de componentes de $S^2 - C$; sea $V_\alpha = h(U_\alpha - b)$. Como $S^2 - C$ es localmente conexo, los conjuntos U_α son subconjuntos de S^2 conexos, disjuntos y abiertos. Por tanto, los conjuntos V_α son subconjuntos conexos, disjuntos y abiertos en $\mathbb{R}^2 - h(C)$, por lo que son las componentes de $\mathbb{R}^2 - h(C)$.

Ahora el homeomorfismo h de $S^2 - b$ en $\mathbb{R}^2$ puede extenderse a un homeomorfismo H de S^2 en la compactificación por un punto $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ del plano $\mathbb{R}^2$, concretamente haciendo $H(b) = \infty$. Si U_β es la componente de $S^2 - C$ que contiene a b, entonces $H(U_\beta)$ es un entorno de ∞ en $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Por tanto, V_β no está acotado; como el complementario $\mathbb{R}^2 - V_\beta$ es compacto, entonces todas las componentes restantes de $\mathbb{R}^2 - h(C)$ están acotadas (véase la Figura 61.1). ■

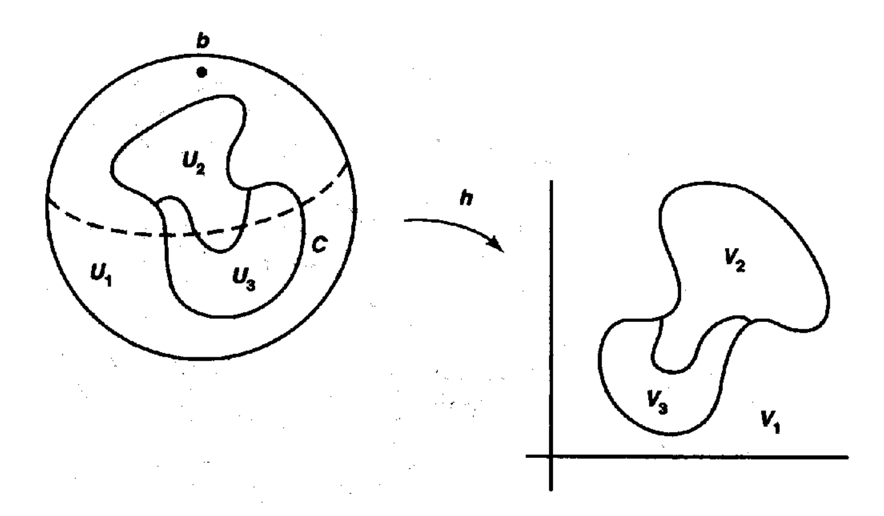


Figura 61.1

Lema 61.2 (Lema de la homotopía nula). *Sean a y b puntos en S^2, A un espacio compacto y*

$$f : A \to S^2 - a - b$$

una aplicación continua. Si a y b pertenecen a la misma componente de $S^2 - f(A)$, entonces f es homotópicamente nula.

Demostración. Podemos reemplazar S^2 por la compactificación por un punto $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{R}^2$, haciendo corresponder a y b con los puntos $\mathbf{0}$ e ∞. Entonces el lema se reduce a lo siguiente:

Sean A un espacio compacto y $g : A \to \mathbb{R} - \mathbf{0}$ una aplicación continua. Si $\mathbf{0}$ está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - g(A)$, entonces g es homotópicamente nula.

Esta afirmación es fácil de probar. Escojamos una bola B centrada en el origen, de radio suficientemente grande para que contenga a $g(A)$. Escojamos un punto p de $\mathbb{R}^2$ que no pertenezca a B. Entonces $\mathbf{0}$ y p pertenecen ambos a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - g(A)$.

Como $\mathbb{R}^2$ es localmente conexo por caminos, también lo es el abierto $\mathbb{R}^2 - g(A)$. Por tanto, las componentes y las componentes por caminos de $\mathbb{R}^2 - g(A)$ coinciden. Escojamos pues un camino α en $\mathbb{R}^2 - g(A)$ conectando $\mathbf{0}$ con p. Definimos una homotopía $G : A \times I \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ mediante la ecuación

$$G(x,t) = g(x) - \alpha(t)$$

que está representada en la Figura 61.2. La homotopía G es una homotopía entre la aplicación g y la aplicación k definida por $k(x) = g(x) - p$. Observemos que $G(x,t) \neq \mathbf{0}$ ya que el camino α no corta al conjunto $g(A)$.

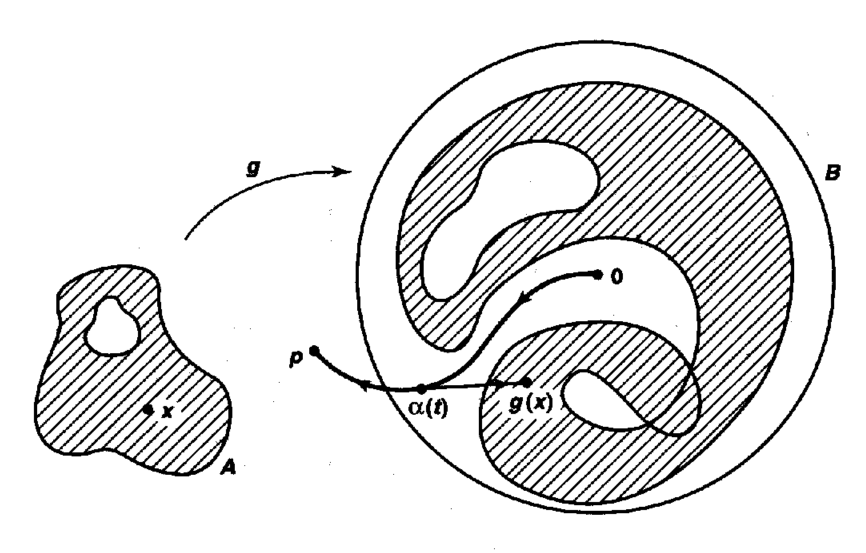


Figura 61.2

Ahora definimos una homotopía $H : A \times I \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ por la ecuación

$$H(x,t) = tg(x) - p.$$

Dicha aplicación es una homotopía entre la aplicación k y una aplicación constante. Observemos que $H(x,t) \neq \mathbf{0}$ ya que $tg(x)$ está dentro de la bola B y p está fuera.

Por tanto, hemos probado que g es homotópicamente nula. ■

Ahora vamos a probar el teorema de separación de Jordan. En general, si X es un espacio conexo y $A \subset X$, diremos que A ***separa*** X si $X - A$ no es conexo; si $X - A$ tiene n componentes, diremos que A ***separa X en n componentes***.

Un ***arco*** A es un espacio homeomorfo al intervalo unidad $[0,1]$. Los ***extremos*** de A son los dos puntos p y q de A tales que $A - p$ y $A - q$ son conexos; los otros puntos de A se denominan ***puntos interiores*** de A.

Una ***curva simple cerrada*** es un espacio homeomorfo al círculo unidad S^1.

Teorema 61.3 (Teorema de separación de Jordan). *Sea C una curva simple cerrada en S^2. Entonces C separa S^2.*

Demostración. Como $S^2 - C$ es localmente conexo por caminos, sus componentes y sus componentes por caminos son las mismas. Supondremos que $S^2 - C$ es conexo por caminos y obtendremos una contradicción.

Escribamos C como la unión de dos arcos A_1 y A_2 que tienen en común sólo los extremos a y b. Sea X el espacio $S^2 - a - b$. Sea U el conjunto abierto $S^2 - A_1$ y sea V el conjunto abierto $S^2 - A_2$. Entonces X es la unión de los conjuntos U y V,

y se verifica

$$U \cap V = S^2 - (A_1 \cup A_2) = S^2 - C$$

que, por hipótesis, es conexo por caminos. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 59.1.

Sea x_0 un punto de $U \cap V$. Vamos a probar que las inclusiones

$$i : (U, x_0) \to (X, x_0) \qquad \text{y} \qquad j : (V, x_0) \to (X, x_0)$$

inducen homomorfismos triviales entre los grupos fundamentales respectivos. Se deduce entonces del Teorema 59.1 que el grupo $\pi_1(X, x_0)$ es trivial. Pero $X = S^2 - a - b$ es homeomorfo al plano agujereado $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, por lo que su grupo fundamental *no es* trivial.

Probemos que i_* es el homomorfismo trivial; dado un lazo $f : I \to U$ basado en x_0, vamos a demostrar que $i_*([f])$ es trivial. Para probarlo, sea $p : I \to S^1$ el lazo estándar que genera $\pi_1(S^1, b_0)$. La aplicación $f : I \to U$ induce una aplicación continua $h : S^1 \to U$ tal que $h \circ p = f$ (véase la Figura 61.3).

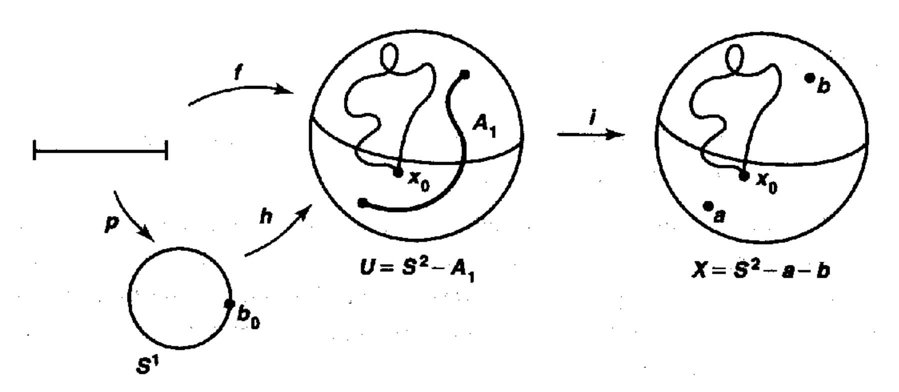


Figura 61.3

Consideremos la aplicación $i \circ h : S^1 \to S^2 - a - b$. Por hipótesis, el conjunto $i(h(S^1)) = h(S^1)$ no corta al conjunto conexo A_1, que contiene los puntos a y b. Por tanto, los puntos a y b están en la misma componente de $S^2 - i(h(S^1))$. Por el lema precedente, la aplicación $i \circ h$ es homotópicamente nula. Se sigue del Lema 55.3 que $(i \circ h)_*$ es el homomorfismo trivial entre los respectivos grupos fundamentales. Pero

$$(i \circ h)_*([p]) = [i \circ h \circ p] = [i \circ f] = i_*([f]).$$

Por tanto, $i_*([f])$ es trivial, como se esperaba. ■

Examinemos la demostración previa. ¿Qué propiedades de la curva simple cerrada C han sido utilizadas? Todo lo que hemos necesitado ha sido que C puede

escribirse como la unión de dos conjuntos cerrados conexos A_1 y A_2, cuya intersección consiste exactamente en dos puntos a y b. Esta observación nos conduce a la siguiente generalización del teorema de separación, que posteriormente nos será de mucha utilidad.

Teorema 61.4 (Teorema de separación general). *Sean A_1 y A_2 subconjuntos cerrados y conexos de S^2 cuya intersección consiste exactamente en dos puntos a y b. Entonces el conjunto $C = A_1 \cup A_2$ separa S^2.*

Demostración. Debemos probar en primer lugar que C no puede coincidir con todo S^2. Este hecho era obvio en la demostración anterior. En este caso, podemos probar que $C \neq S^2$ debido a que $S^2 - a - b$ es conexo mientras que $C - a - b$ no lo es (los conjuntos $A_i - a - b$ constituyen una separación de $C - a - b$).

El resto de la demostración es una copia de la demostración del teorema anterior. ∎

Ejercicios

1. Proporcione ejemplos que demuestren que una curva simple cerrada en el toro puede o no separar el toro.
2. Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de la curva seno del topólogo y la poligonal entre los puntos $(0, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -2)$ y $(1, \operatorname{sen} 1)$. Véase la Figura 61.4. Diremos que A es la ***curva seno del topólogo cerrada***. Pruebe que si C es un subespacio de S^2 homeomorfo a la curva seno del topólogo cerrada entonces C separa S^2.

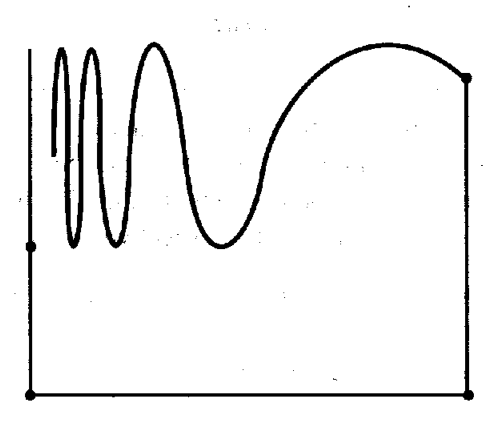


Figura 61.4

*§62 Invariancia del dominio†

Uno de los teoremas de topología que es realmente fundamental, porque expresa una propiedad intrínseca del espacio euclídeo, es el teorema de "invariancia del dominio", probado por L. E. J. Brouwer en 1912. Dicho teorema establece que para cualquier conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y cualquier aplicación continua e inyectiva $f : U \to \mathbb{R}^n$, el conjunto imagen $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y la función inversa es continua. El teorema de la función inversa del análisis también implica este resultado con la hipótesis adicional de que la aplicación f sea diferenciable continuamente con matriz jacobiana no singular. Probaremos este teorema en el caso $n = 2$.

Lema 62.1 (Lema de la extensión homotópica). *Sea X un espacio tal que $X \times I$ es normal. Sean A un subespacio cerrado de X y $f : A \to Y$ una aplicación continua, donde Y es un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$. Si f es homotópicamente nula, entonces f puede extenderse a una aplicación continua $g : X \to Y$ que también es homotópicamente nula.*

Demostración. Sea $F : A \times I \to Y$ una homotopía entre f y una aplicación constante. Entonces $F(a, 0) = f(a)$ y $F(a, 1) = y_0$ para todo a. Extendamos F al espacio $X \times 1$ mediante $F(x, 1) = y_0$ para $x \in X$. Entonces F es una aplicación continua del subespacio cerrado $(A \times I) \cup (X \times 1)$ de $X \times I$ en $\mathbb{R}^n$; por el teorema de extensión de Tietze, dicha función puede extenderse a una aplicación continua $G : X \times I \to \mathbb{R}^n$.

La aplicación $x \to G(x, 0)$ es una extensión de f, pero aplica X en $\mathbb{R}^n$ en lugar de hacerlo en el subespacio Y. Para obtener la aplicación que buscamos, procederemos como se indica a continuación. Sea U el subconjunto abierto $U = G^{-1}(Y)$ de $X \times I$. Entonces U contiene a $(A \times I) \cup (X \times 1)$ (véase la Figura 62.1). Como I es compacto, el lema del tubo implica que existe un conjunto abierto W de X que contiene a A tal que $W \times I \subset U$. Además el espacio X es normal, ya que es homeomorfo al subespacio cerrado $X \times 0$ de $X \times I$. Por tanto, podemos elegir una función continua $\phi : X \to [0, 1]$ tal que $\phi(x) = 0$ para $x \in A$ y $\phi(x) = 1$ para $x \in X - W$. La aplicación $x \to x \times \phi(x)$ transforma X en el subespacio $(W \times I) \cup (X \times 1)$ de $X \times I$, que está contenido en U. Entonces la aplicación continua $g(x) = G(x, \phi(x))$ aplica X en Y. Y para $x \in A$ se tiene $\phi(x) = 0$, de modo que $g(x) = G(x, 0) = f(x)$. Por tanto, g es la extensión deseada de f. La aplicación $H : X \times I \to Y$ dada por

$$H(x, t) = G(x, (1 - t)\phi(x) + t)$$

es una homotopía entre g y una aplicación constante. ■

---

†En esta sección haremos uso del teorema de extensión de Tietze (§35).

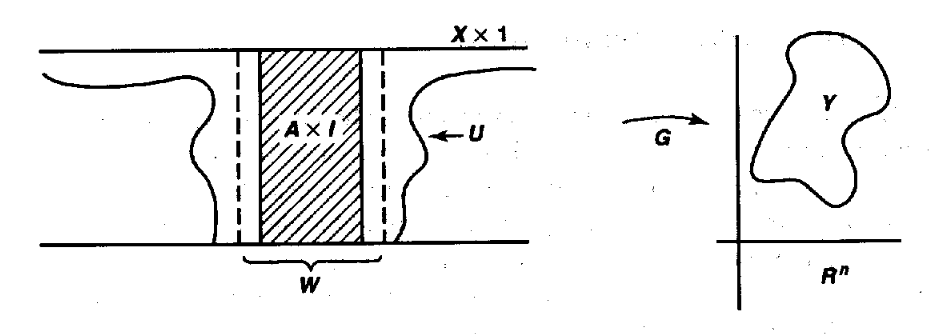


Figura 62.1

El siguiente lema es un recíproco parcial del lema de la homotopía nula de la sección anterior.

Lema 62.2 (Lema de Borsuk). *Sean a y b puntos de S^2. Sean A un espacio compacto y $f : A \to S^2 - a - b$ una aplicación continua e inyectiva. Si f es homotópicamente nula entonces a y b están en la misma componente de $S^2 - f(A)$.*

Demostración. Como A es compacto y S^2 es de Hausdorff, $f(A)$ es un subespacio compacto de S^2 que es homeomorfo a A. Como f es homotópicamente nula, también lo es la aplicación inclusión de $f(A)$ en $S^2 - a - b$. Por tanto, es suficiente probar el lema en el caso especial en que f es simplemente la aplicación inclusión. Además, podemos reemplazar S^2 por $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, haciendo corresponder a con $\mathbf{0}$ y b con ∞. Entonces el lema se reduce a la siguiente afirmación:

Sea A un subespacio compacto de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Si la aplicación inclusión $j : A \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ es homotópicamente nula, entonces $\mathbf{0}$ está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - A$.

Vamos a probarlo. Sea C la componente de $\mathbb{R}^2 - A$ que contiene a $\mathbf{0}$; supongamos que C está acotada y obtengamos una contradicción. Sea D la unión de las otras componentes de $\mathbb{R}^2 - A$, incluyendo la componente no acotada. Entonces C y D son conjuntos abiertos y disjuntos de $\mathbb{R}^2$, y $\mathbb{R}^2 - A = C \cup D$ (véase la Figura 62.2).

Definiremos una aplicación continua $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ que coincide con la identidad fuera de C.

Comenzamos con la aplicación inclusión $j : A \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Como j es homotópicamente nula por hipótesis, el lema precedente implica que j puede extenderse a una aplicación continua k de $C \cup A$ en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Entonces k coincide con la identidad en los puntos de A. Extendemos k a una aplicación $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ haciendo $h(x) = x$ en los puntos $x \in D \cup A$; entonces h es continua por el lema del pegamiento.

Ahora vamos a obtener una contradicción. Sea B la bola cerrada en $\mathbb{R}^2$ de radio M y centrada en el origen, donde M es lo suficientemente grande como para que Int B contenga a $C \cup A$. Aquí utilizamos el hecho que C está acotada. Si restringimos h

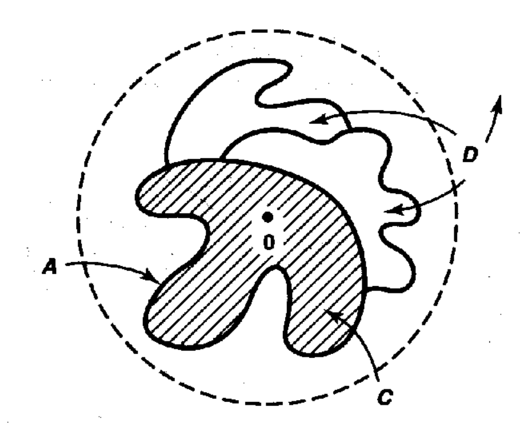


Figura 62.2

a B obtenemos una aplicación $g : B \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ tal que $g(x) = x$ para $x \in \operatorname{Fr} B$. Si componemos g con la retracción estándar $x \to Mx/||x||$ de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ sobre $\operatorname{Fr} B$, obtenemos una retracción de B sobre $\operatorname{Fr} B$. Sin embargo, tal retracción no existe. ■

Teorema 62.3 (Invariancia del dominio). *Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua e inyectiva, entonces $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$ y la función inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ es continua.*

Demostración. Como es usual, podemos reemplazar $\mathbb{R}^2$ por S^2. Probaremos que si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to S^2$ es continua e inyectiva, entonces $f(U)$ es abierto en S^2 y la función inversa es continua.

Paso 1. Probaremos que si B es cualquier bola cerrada de $\mathbb{R}^2$ contenida en U, entonces $f(B)$ no separa S^2.

Sean a y b dos puntos en $S^2 - f(B)$. Como la aplicación identidad $i : B \to B$ es homotópicamente nula, la aplicación $h : B \to S^2 - a - b$ obtenida al restringir f es también homotópicamente nula. El lema de Borsuk implica entonces que a y b están en la misma componente de $S^2 - h(B) = S^2 - f(B)$.

Paso 2. Probaremos que si B es una bola cerrada de $\mathbb{R}^2$ contenida en U, entonces $f(\operatorname{Int} B)$ es abierto en S^2.

El espacio $C = f(\operatorname{Fr} B)$ es una curva simple cerrada en S^2, por lo que separa S^2. Sea V la componente de $S^2 - C$ que contiene al conjunto conexo $f(\operatorname{Int} B)$ y sea W la unión de las otras componentes. Como S^2 es localmente conexo, V y W son abiertos en S^2. Veamos que $V = f(\operatorname{Int} B)$.

Supongamos que a es un punto de V que no está en $f(\operatorname{Int} B)$ y obtengamos una contradicción. Sea b un punto de W. Como el conjunto $D = f(B)$ no separa S^2, el conjunto $S^2 - D$ es un conjunto conexo que contiene los puntos a y b. Este conjunto

está contenido en $S^2 - C$ (ya que $D \supset C$); se deduce que a y b están en la misma componente de $S^2 - C$, lo cual no puede ocurrir por construcción (véase la Figura 62.3).

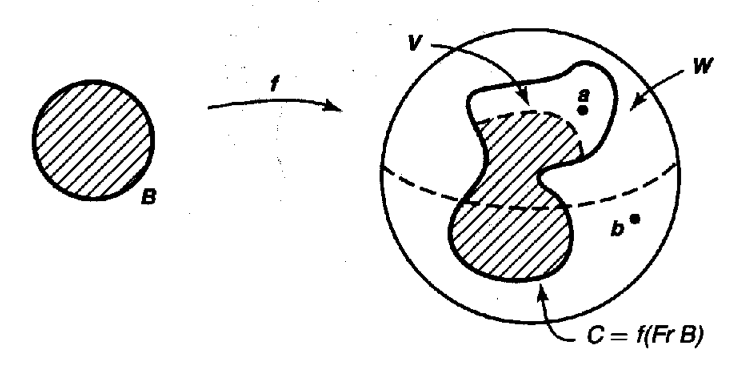


Figura 62.3

Paso 3. Probemos finalmente el teorema. Como para cualquier bola B contenida en U el conjunto $f(\text{Int}\, B)$ es abierto en S^2, la aplicación $f : U \to S^2$ es una aplicación abierta. Se concluye que $f(U)$ es abierto en S^2 y la aplicación f^{-1} es continua. ∎

Ejercicios

1. Proporcione un ejemplo que pruebe que la conclusión del lema de Borsuk puede no cumplirse si f no es inyectiva.
2. Sea A un subespacio compacto y contractible de S^2. Pruebe que A no separa S^2.
3. Sea X un espacio tal que $X \times I$ es normal. Sean A un subespacio cerrado de X y $f : A \to Y$ una aplicación continua, donde Y es un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$. Si f es homotópica a una aplicación que es extensible a una aplicación continua $h : X \to Y$, entonces f es también extensible a una aplicación continua $g : X \to Y$ tal que $g \simeq h$.
4. Sea C una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$; sea $j : C \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ la aplicación inclusión. Pruebe que j_* es trivial si $\mathbf{0}$ está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, y es no trivial en caso contrario. De hecho, j_* es un *isomorfismo* en el último caso, como probaremos en §65.
5. *Teorema. Sea U un conjunto abierto y simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$. Si C es una curva simple cerrada dentro de U, entonces cada componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$ también está incluida en U.*

Esta condición caracteriza los conjuntos abiertos y simplemente conexos de $\mathbb{R}^2$. Véase [RW]. El espacio $\mathbb{R}^2 - C$ tiene, desde luego, una única componente acotada, como probaremos en la siguiente sección.

6. Suponga que conoce que no existe ninguna retracción de B^n en la esfera S^{n-1}.

(a) Pruebe que el lema de Borsuk se satisface en S^n.

(b) Pruebe que ningún subespacio contractible y no compacto de S^n separa S^n.

(c) Suponga que también conoce que ningún subespacio de S^n homeomorfo a S^{n-1} separa S^n. Pruebe el teorema de invariancia del dominio en dimensión n.

§63 El teorema de la curva de Jordan

El caso especial del teorema de Seifert-van Kampen, que fue utilizado en la demostración del teorema de separación de Jordan, nos proporciona información sobre el grupo fundamental de un espacio $X = U \cup V$ cuando la intersección $U \cap V$ es conexa por caminos. En el siguiente teorema examinamos qué ocurre cuando $U \cap V$ no es conexo por caminos. Este resultado nos permitirá completar la demostración del teorema de la curva de Jordan.

Teorema 63.1. *Sea X la unión de dos conjuntos abiertos U y V, tales que $U \cap V$ puede escribirse a su vez como la unión de dos conjuntos abiertos y disjuntos A y B. Supongamos que existe un camino α en U conectando el punto a de A con el punto b de B, y que existe un camino β en V de b hasta a. Sea f el lazo $f = \alpha * \beta$.*

(a) La clase de homotopía de caminos $[f]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$.

**(b) Si $\pi_1(X, a)$ es cíclico infinito, entonces está generado por $[f]$.*[†]

(c) Supongamos que existe un camino γ en U desde el punto a hasta el punto a' de A, y que existe un camino δ en V desde a' hasta a. Sea g el lazo $g = \gamma * \delta$. Entonces los subgrupos de $\pi_1(X, a)$ generados por $[f]$ y $[g]$ sólo tienen en común el elemento neutro.

Demostración. La prueba es, en muchos momentos, una copia de la demostración dada en §54 para probar que el grupo fundamental del círculo es cíclico infinito. Como en dicha demostración, el paso crucial es encontrar un espacio recubridor E adecuado para X.

[†]Este resultado utiliza el Teorema 54.6, y será usado sólo cuando trabajemos con los números de rotación en §65.

Paso 1 (construcción de E). Vamos a construir E pegando copias de los subespacios U y V. Tomemos una cantidad numerable de copias de U y también una cantidad numerable de copias de V, todas disjuntas, por ejemplo

$$U \times (2n) \qquad \text{y} \qquad V \times (2n+1)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los número enteros. Sea Y la unión de estos espacios; Y es un subespacio de $X \times \mathbb{Z}$. Construimos un nuevo espacio E como el cociente de Y al identificar los puntos

$$x \times (2n) \qquad \text{y} \qquad x \times (2n-1) \qquad \text{para } x \in A$$

y también al identificar

$$x \times (2n) \qquad \text{y} \qquad x \times (2n+1) \qquad \text{para } x \in B.$$

Consideremos $\pi : Y \to E$ la aplicación cociente.

La aplicación $\rho : Y \to X$ definida por $\rho(x \times m) = x$ induce una aplicación $p : E \to X$; la aplicación p es continua porque E está dotado de la topología cociente. La aplicación p también es sobreyectiva. Vamos a probar que p es una aplicación recubridora (véase la Figura 63.1).

En primer lugar probaremos que la aplicación π es una aplicación abierta. Como Y es la unión de los conjuntos abiertos y disjuntos $\{U \times (2n)\}$ y $\{V \times (2n+1)\}$, es suficiente probar que las aplicaciones $\pi|(U \times 2n)$ y $\pi|(V \times (2n+1))$ son abiertas. Y esto es fácil. Tomemos un conjunto abierto en $U \times 2n$, por ejemplo; será de la forma $W \times 2n$, donde W es abierto en U. Entonces

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(W \times 2n)) \;=\; & [W \times 2n] \cup [(W \cap B) \times (2n+1)] \\ & \cup [(W \cap A) \times (2n-1)]\end{aligned}$$

que es la unión de tres conjuntos abiertos de Y, por lo que es abierto en Y. Por definición de la topología cociente, $\pi(W \times 2n)$ es abierto en E, como se deseaba.

Ahora vamos a demostrar que p es una aplicación recubridora; probaremos que los conjuntos abiertos U y V están cubiertos por p. Consideremos U, por ejemplo. El conjunto $p^{-1}(U)$ es la unión de los conjuntos disjuntos $\pi(U \times 2n)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Cada uno de estos conjuntos es abierto en E ya que π es una aplicación abierta. Sea π_{2n} la restricción de π al conjunto abierto $U \times 2n$, que lo transforma en el conjunto $\pi(U \times 2n)$. Es un homeomorfismo ya que es biyectiva, continua y abierta. Entonces la aplicación p, cuando se restringe a $\pi(U \times 2n)$, es la composición de dos homeomorfismos

$$\pi(U \times 2n) \xrightarrow{\pi_{2n}^{-1}} U \times 2n \xrightarrow{\rho} U$$

y es, por tanto, un homeomorfismo. Entonces $p|\pi(U \times 2n)$ aplica este conjunto homeomórficamente en U, como buscábamos.

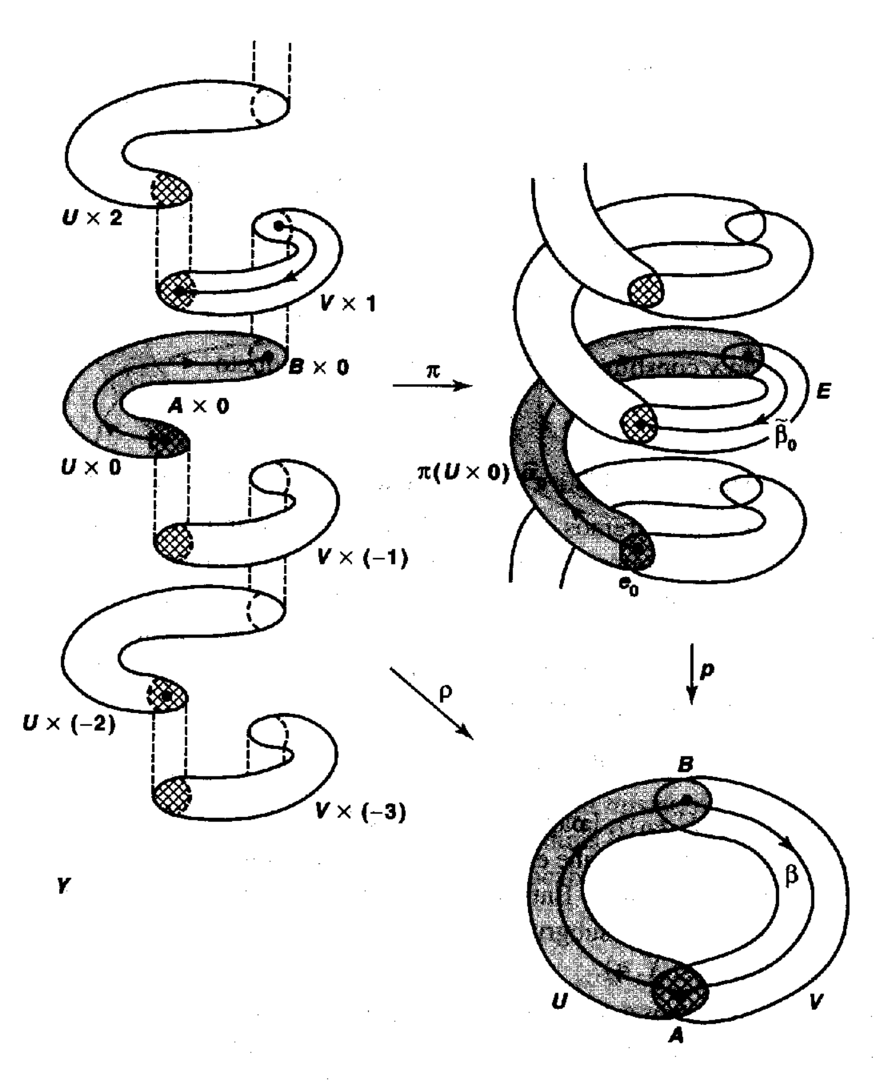


Figura 63.1

Paso 2. Ahora vamos a definir una familia de levantamientos del lazo $f = \alpha * \beta$.

Para cada entero n, sea e_n el punto $\pi(a \times 2n)$ de E. Entonces los puntos e_n son distintos, y constituyen el conjunto $p^{-1}(a)$. Definimos un levantamiento $\tilde{f}_n$ de f que empieza en e_n y finaliza en e_{n+1}.

Como los caminos α y β están en U y V, respectivamente, podemos definir

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_n(s) &= \pi(\alpha(s) \times 2n),\\ \tilde{\beta}_n(s) &= \pi(\beta(s) \times (2n+1));\end{aligned}$$

entonces $\tilde{\alpha}_n$ y $\tilde{\beta}_n$ son levantamientos de α y β, respectivamente. El caso $n = 0$ se ilustra en la Figura 63.1. El producto $\tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$ está bien definido, ya que $\tilde{\alpha}_n$ finaliza en

$\pi(b \times 2n)$ y $\tilde{\beta}_n$ comienza en $\pi(b \times (2n+1))$. Escribimos $\tilde{f}_n = \tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$; observemos que $\tilde{f}_n$ comienza en $\tilde{\alpha}_n(0) = \pi(a \times 2n) = e_n$ y finaliza en $\tilde{\beta}_n(1) = \pi(a \times (2n+1)) = \pi(a \times (2n+2)) = e_{n+1}$.

Paso 3. Probaremos que $[f]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$. Es suficiente con demostrar que si m es un entero positivo, entonces $[f]^m$ no es el elemento neutro. Pero esto es fácil. En efecto, el producto

$$\tilde{h} = \tilde{f}_0 * (\tilde{f}_1 * (\cdots * \tilde{f}_{m-1}))$$

está bien definido y constituye un levantamiento del producto

$$h = f * (f * (\cdots * f)).$$

Como $\tilde{h}$ comienza en e_0 y finaliza en e_m, la clase $[h] = [f]^m$ no es trivial.

**Paso 4*. Ahora probaremos que si $\pi_1(X, a)$ es cíclico infinito, entonces está generado por $[f]$. Consideremos la correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(X, a) \to p^{-1}(a)$. Hemos probado en el Paso 3 que para cada entero positivo m, la correspondencia ϕ transforma $[f]^m$ en el punto e_m de $p^{-1}(a)$. Un argumento similar prueba que aplica $[f]^{-m}$ en e_{-m}. Por tanto, ϕ es sobreyectiva. Ahora aplicando el Teorema 54.6, ϕ induce una aplicación inyectiva

$$\Phi : \pi_1(X, a)/H \longrightarrow p^{-1}(a)$$

donde $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$; la aplicación Φ es sobreyectiva porque ϕ lo es. Se sigue que H es el grupo trivial, ya que el cociente de un grupo cíclico infinito por cualquier subgrupo no trivial es finito. Entonces la correspondencia del levantamiento ϕ es biyectiva; como ϕ aplica el subgrupo generado por $[f]$ en $p^{-1}(a)$, este subgrupo debe coincidir con todo $\pi_1(X, a)$.

Paso 5. Ahora vamos a probar (c). El dibujo de la Figura 63.1 puede hacerle creer que el elemento $[g]$ de $\pi_1(X, a)$ considerado en la parte (c) es de hecho trivial. Pero dicha figura es bastante especial. La Figura 63.2 ilustra qué puede ocurrir cuando A es la unión de dos conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos. En este caso (que pronto nos será muy útil), tanto $[f]$ como $[g]$ generan subgrupos cíclicos infinitos de $\pi_1(X, a)$.

Dado $g = \gamma * \delta$, definimos un levantamiento de g a E como sigue: como γ es un camino en U, podemos definir

$$\tilde{\gamma}(s) = \pi(\gamma(s) \times 0)$$

y como δ es un camino en V, podemos definir

$$\tilde{\delta}(s) = \pi(\delta(s) \times (-1)).$$

Entonces $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\delta}$ son levantamientos de γ y δ. El producto $\tilde{g} = \tilde{\gamma} * \tilde{\delta}$ está bien definido, ya que $\tilde{\delta}$ finaliza en $\pi(a' \times 0)$ y $\tilde{\delta}$ comienza en $\pi(a' \times (-1))$, y es un levantamiento de

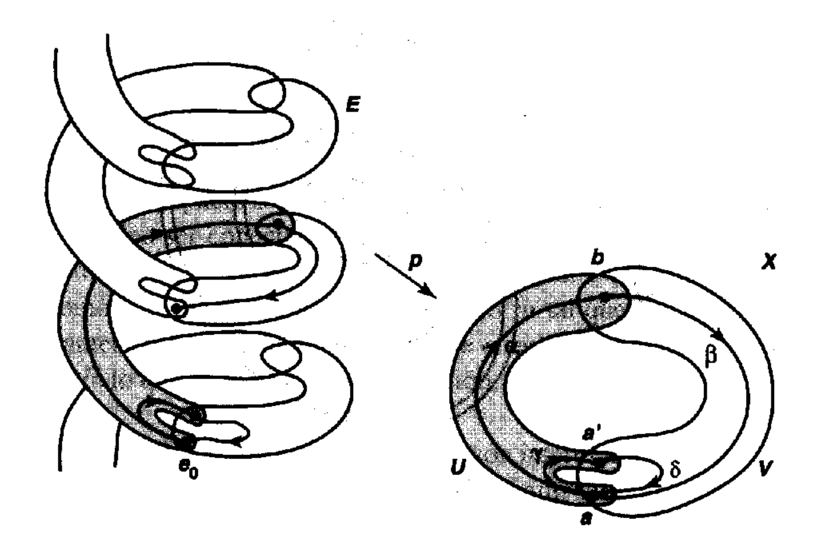


Figura 63.2

g. Observemos que $\tilde{g}$ es un lazo en E, ya que empieza y acaba en el punto $\pi(a \times 0) = \pi(a \times (-1)) = e_0$.

Se sigue que los subgrupos generados por $[f]$ y $[g]$ sólo tienen en común el elemento neutro, ya que el m-ciclo producto de f consigo mismo m veces se levanta a un camino que empieza en e_0 y finaliza en e_m, mientras que todo producto de g consigo mismo se levanta a un camino que empieza y acaba en e_0. Por tanto, $[f]^m \neq [g]^k$ para cualesquiera enteros no nulos m y k. ∎

Teorema 63.2 (Teorema de no separación). *Sea D un arco en S^2. Entonces D no separa S^2.*

Demostración. Vamos a proporcionar dos demostraciones de este teorema. La primera utiliza los resultados de la sección anterior, mientras que la segunda sigue una vía distinta.

Primera demostración. Como D es contractible, la aplicación identidad $i : D \to D$ es homotópicamente nula. Entonces si a y b son dos puntos de S^2 que no están en D, la aplicación inclusión $j : D \to S^2 - a - b$ es homotópicamente nula. El lema de Borsuk implica entonces que a y b están en la misma componente de $S^2 - D$.

Segunda demostración. Escribamos D como la unión de dos arcos D_1 y D_2 que tienen un único punto en común d. Sean a y b dos puntos que no están en D. Vamos a probar que si a y b pueden ser conectados por caminos en $S^2 - D_1$ y en $S^2 - D_2$, entonces se pueden unir mediante un camino en $S^2 - D$. La Figura 63.3 ilustra el hecho de que esta afirmación no es nada trivial.

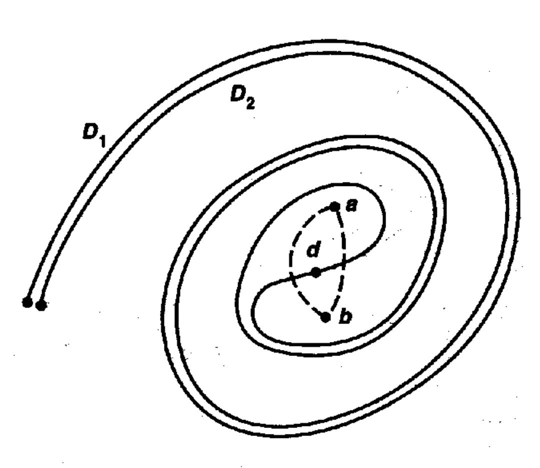


Figura 63.3

Supongamos que a y b no se pueden unir mediante un camino en $S^2 - D$. Vamos a utilizar el Teorema 63.1 para obtener una contradicción. Sea X el espacio $S^2 - d$; sean U y V los conjuntos abiertos

$$U = S^2 - D_1 \qquad \text{y} \qquad V = S^2 - D_2.$$

Entonces $X = U \cup V$ y $U \cap V = S^2 - D$. Por hipótesis, a y b son puntos en $S^2 - D$ que no pueden ser conectados por un camino en $S^2 - D$. Por tanto, $U \cap V$ no es conexo por caminos. Sea A la componente conexa por caminos de $U \cap V$ que contiene a a; sea B la unión de las otras componentes de $U \cap V$. Como $U \cap V$ es localmente conexo por caminos (al ser abierto en S^2), las componentes conexas por caminos de $U \cap V$ son abiertas y, por tanto, A y B son abiertos en X. Sabemos que a y b pueden conectarse mediante caminos en $U = S^2 - D_1$ y $V = S^2 - D_2$. Concluimos, a partir del Teorema 63.1, que $\pi_1(X, a)$ no es trivial. Pero $X = S^2 - d$, por lo que su grupo fundamental *es* trivial.

Probemos ahora el teorema. Dado un arco D y los puntos a y b de $S^2 - D$, supongamos que a y b no pueden unirse mediante un camino en $S^2 - D$ y obtengamos una contradicción. Escogemos un homeomorfismo $h : [0, 1] \to D$; sea $D_1 = h([0, 1/2])$ y $D_2 = h([1/2, 1])$. El resultado del párrafo precedente prueba que puesto que a y b no pueden conectarse mediante un camino en $S^2 - D$, entonces tampoco pueden conectarse mediante dos caminos en $S^2 - D_1$ y $S^2 - D_2$. Supongamos, por ejemplo, que a y b no pueden conectarse en $S^2 - D_1$.

Ahora repetimos el argumento, dividiendo D_1 en dos arcos $E_1 = h([0, 1/4])$ y $E_2 = h([1/4, 1/2])$. Concluimos, como antes, que los puntos a y b no pueden conectarse mediante dos caminos en $S^2 - E_1$ y $S^2 - E_2$.

Si continuamos indefinidamente este razonamiento, entonces encontramos una sucesión

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

de intervalos cerrados tal que I_n tiene longitud $(1/2)^n$ y tal que, para cada n, los puntos a y b no pueden conectarse mediante un camino en $S^2 - h(I_n)$. La compacidad del intervalo unidad garantiza que existe un punto x en $\bigcap I_n$; como las longitudes de los intervalos convergen a cero, sólo existe un punto en la intersección.

Consideremos el espacio $S^2 - h(x)$. Como este espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, los puntos a y b pueden ser conectados por un camino α en $S^2 - h(x)$. Como $\alpha(I)$ es compacto, entonces es cerrado, por lo que existe algún ϵ-entorno de $h(x)$ disjunto con $\alpha(I)$. Como h es continua, existe un número m tal que $h(I_m)$ está incluido en el ϵ-entorno anterior. Se concluye entonces que α es un camino en $S^2 - h(I_m)$ que conecta a con b, lo que supone una contradicción. ■

Ambas demostraciones del teorema anterior son interesantes. Como ya indicamos en §62, la primera se generaliza para probar que ningún subespacio compacto y contractible de S^2 separa S^2. La segunda se puede generalizar en otra dirección. Examinemos la segunda demostración y preguntémonos: ¿qué propiedades de los conjuntos D_1 y D_2 hacen que la prueba funcione? Enseguida nos damos cuenta que sólo se utilizó el hecho que D_1 y D_2 son subconjuntos cerrados de S^2 y $S^2 - (D_1 \cap D_2)$ es simplemente conexo. Por tanto, podemos deducir el siguiente resultado, que será utilizado posteriormente.

Teorema 63.3 (Teorema general de no separación). *Sean D_1 y D_2 subconjuntos cerrados de S^2 tales que $S^2 - D_1 \cap D_2$ es simplemente conexo. Si ni D_1 ni D_2 separan S^2, entonces $D_1 \cup D_2$ tampoco separa S^2.*

Ahora vamos a demostrar el teorema de la curva de Jordan.

Teorema 63.4 (Teorema de la curva de Jordan). *Sea C una curva simple cerrada en S^2. Entonces C separa S^2 en exactamente dos componentes W_1 y W_2. Cada uno de los conjuntos W_1 y W_2 tiene a C como su frontera, esto es, $C = \overline{W}_i - W_i$ para $i = 1, 2$.*

Demostración. *Paso 1.* Probaremos en primer lugar que $S^2 - C$ tiene exactamente dos componentes. Escribamos C como la unión de dos arcos C_1 y C_2 que intersecan en el conjunto de dos puntos $\{p, q\}$. Sea X el espacio $S^2 - p - q$, y sean U y V los conjuntos abiertos

$$U = S^2 - C_1 \qquad \text{y} \qquad V = S^2 - C_2.$$

Entonces $X = U \cup V$ y $U \cap V = S^2 - C$. El espacio $U \cap V$ tiene al menos dos componentes, por el teorema de separación de Jordan.

Supongamos que $U \cap V$ tiene más de dos componentes y obtengamos una contradicción. Sean A_1 y A_2 dos de las componentes de $U \cap V$, y sea B la unión del resto. Como $S^2 - C$ es localmente conexo, cada uno de estos conjuntos es abierto. Sean

$a \in A_1$, $a' \in A_2$ y $b \in B$. Como los arcos C_1 y C_2 no separan S^2, existen caminos α y γ en U que conectan a con b y a con a', respectivamente, y existen caminos β y δ en V que conectan b con a y a' con a, respectivamente. Consideremos los lazos $f = \alpha * \beta$ y $g = \gamma * \delta$. Escribiendo $U \cap V$ como la unión de los conjuntos abiertos $A_1 \cup A_2$ y B, el Teorema 63.1 implica que $[f]$ es un elemento no trivial de $\pi_1(X, a)$. Escribiendo $U \cap V$ como la unión de los abiertos disjuntos A_1 y $A_2 \cup B$, vemos que $[g]$ también es un elemento no trivial de $\pi_1(X, a)$. Como $\pi_1(X, a)$ es cíclico infinito, debe verificarse $[f]^m = [g]^k$ para ciertos enteros no nulos m y k, lo que contradice el apartado (c) del Teorema 63.1.

Paso 2. Ahora vamos a probar que C es la frontera común de los conjuntos W_1 y W_2.

Como S^2 es localmente conexo, cada una de las componentes W_1 y W_2 de $S^2 - C$ es abierta en S^2. En particular, ninguna de ellas contiene puntos límite de la otra, por lo que los conjuntos $\overline{W}_1 - W_1$ y $\overline{W}_2 - W_2$ deben estar contenidos en C.

Para probar la inclusión contraria, demostraremos que si x es un punto de C entonces cualquier entorno U de x corta al conjunto cerrado $\overline{W}_1 - W_1$. Se seguirá que x pertenece al conjunto $\overline{W}_1 - W_1$.

Sea U un entorno de x. Como C es homeomorfo al círculo S^1, podemos dividir C en dos arcos C_1 y C_2 que sólo tienen en común sus extremos y tal que C_1 es lo suficientemente pequeño como para que esté contenido en U. Véase la Figura 63.4.

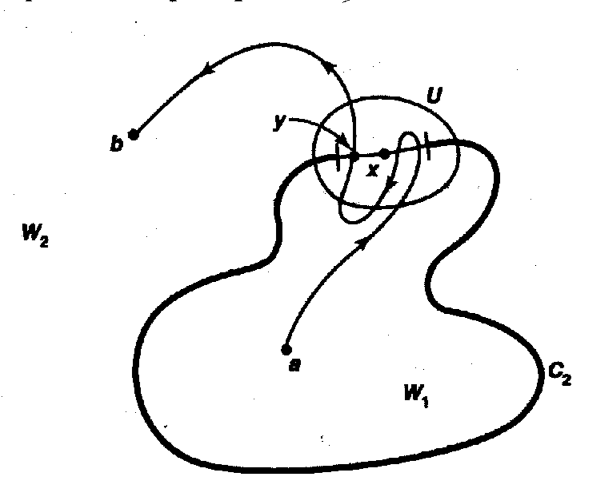


Figura 63.4

Sean a y b puntos de W_1 y W_2, respectivamente. Como C_2 no separa S^2, podemos encontrar un camino α en $S^2 - C_2$ que conecta a con b. El conjunto $\alpha(I)$ debe contener un punto y de $\overline{W}_1 - W_1$, pues de lo contrario $\alpha(I)$ sería un conjunto conexo contenido en la unión de los conjuntos abiertos y disjuntos W_1 y $S^2 - \overline{W}_1$, e intersecando a ambos. El punto y pertenece a la curva cerrada C, ya que $(\overline{W}_1 - W_1) \subset C$.

Como el camino α no corta al arco C_2, el punto y debe, por tanto, pertenecer al arco C_1, que está contenido en el conjunto abierto U. Entonces, U interseca a $\overline{W}_1 - W_1$ en el punto y, como queríamos probar. ■

Igual que con los teoremas anteriores, nos preguntaremos ahora cuáles son las propiedades que hacen funcionar la demostración anterior. Examinando el Paso 1 de la demostración vemos que sólo se ha utilizado que C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados y conexos, que $C_1 \cap C_2$ está formado sólo por dos puntos, y que ni C_1 ni C_2 separan S^2. Las dos primeras propiedades demuestran que $C_1 \cup C_2$ separa S^2 en al menos dos componentes; la tercera implica que *exactamente* hay dos componentes. Por tanto uno puede deducir, sin mucho más esfuerzo, el siguiente resultado.

Teorema 63.5. *Sean C_1 y C_2 subconjuntos cerrados y conexos de S^2 cuya intersección está formada por dos puntos. Si ni C_1 ni C_2 separan S^2, entonces $C_1 \cup C_2$ separa S^2 en exactamente dos componentes.*

EJEMPLO 1. La segunda parte del teorema de la curva de Jordan, junto con el hecho de que C es la frontera común de W_1 y de W_2, pueden parecer resultados tan obvios que no requieran ningún comentario adicional. Sin embargo, dichos resultados dependen fuertemente del hecho que C es homeomorfo a S^1.

Por ejemplo, consideremos el espacio indicado en la Figura 63.5. Es la unión de dos arcos cuya intersección está formada por exactamente dos puntos, por lo que separa S^2 en dos componentes W_1 y W_2, igual que hace el círculo, según el Teorema 63.5. Pero en este caso C no es igual a la frontera común de W_1 y W_2.

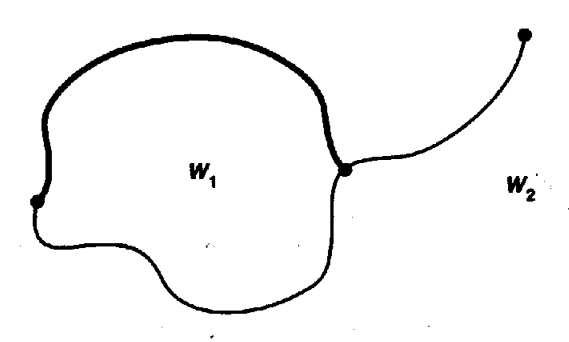


Figura 63.5

Existe un cuarto teorema que en ocasiones también es considerado, junto con los tres anteriores, un teorema de separación. Se trata del *teorema de Schoenflies*, que establece que si C es una curva simple cerrada en S^2 y las componentes de $S^2 - C$ son U y V, entonces $\bar{U}$ y $\bar{V}$ son homeomorfos a la bola cerrada unidad B^2. Una demostración puede encontrarse en [H-S].

Los teoremas de separación pueden generalizarse a dimensiones superiores como sigue:

(1) Cualquier subespacio C de S^n homeomorfo a S^{n-1} separa S^n.

(2) Ningún subespacio A de S^n homeomorfo a $[0, 1]$ o a alguna bola B^m separa S^n.

(3) Cualquier subespacio C de S^n homeomorfo a S^{n-1} separa S^n en dos componentes, siendo C la frontera común de ambas.

Estos teoremas pueden ser demostrados de forma bastante sencilla después de estudiar grupos de homología singular en topología algebraica (véase [Mu], pág. 202). El teorema de Brouwer sobre la invariancia del dominio en $\mathbb{R}^n$ se deduce como un corolario.

El teorema de Schoenflies, sin embargo, no puede generalizarse a dimensiones superiores sin algunas restricciones adicionales sobre la forma en que el espacio C está embebida en S^n. Esto puede comprobarse con el famoso ejemplo de la "esfera con cuernos de Alexandrov", una imagen homeomorfa de S^2 en S^3 pero con un dominio complementario que no es simplemente conexo (véase [H-Y], pág. 176).

Los teoremas de separación pueden ser generalizados todavía más. El teorema definitivo en esta dirección es el famoso *teorema de dualidad de Alexander-Pontryagin*, un teorema muy profundo de topología algebraica que ni siquiera enunciaremos aquí (véase [Mu]). Dicho teorema implica que si el subespacio cerrado C separa S^n en k componentes, lo mismo se verifica para cualquier subespacio de S^n que sea homeomorfo a C (o incluso homotópicamente equivalente a C). Los teoremas de separación (1)–(3) son corolarios inmediatos de este teorema.

Ejercicios

1. Sean C_1 y C_2 curvas simples cerradas y disjuntas en S^2.

(a) Pruebe que $S^2 - C_1 - C_2$ tiene exactamente tres componentes. [*Indicación:* si W_1 es la componente de $S^2 - C_1$ disjunta con C_2, y si W_2 es la componente de $S^2 - C_2$ disjunta con C_1, pruebe que $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$ no separa S^2.]

(b) Demuestre que estas tres componentes tienen fronteras C_1, C_2 y $C_1 \cup C_2$, respectivamente.

2. Sea D un subespacio cerrado y conexo de S^2 que separa S^2 en n componentes.

(a) Si A es un arco en S^2 cuya intersección con D sólo está formada por uno de sus extremos, demuestre que $A \cup D$ separa S^2 en n componentes.

(b) Si A es un arco en S^2 cuya intersección con D está formada por sus extremos, demuestre que $A \cup D$ separa S^2 en $n + 1$ componentes.

(c) Si C es una curva simple cerrada en S^2 que interseca D en un único punto, demuestre que $C \cup D$ separa S^2 en $n + 1$ componentes.

***3.** (a) Sea D un subespacio de S^2 homeomorfo a la curva seno del topólogo $\bar{S}$ (véase §24). Demuestre que D no separa S^2. [*Indicación:* sea $h : \bar{S} \to D$ un homeomorfismo. Dado $0 < c < 1$, sea $\bar{S}_c$ igual a la intersección de $\bar{S}$ con el conjunto $\{(x, y) \mid x \leq c\}$. Demuestre que dados $a, b \in S^2 - D$, para algún valor de c existe un camino en $S^2 - h(\bar{S}_c)$ desde a hasta b. Concluya que existe un camino en $S^2 - D$ entre a y b.]

(b) Sea C un subespacio en S^2 homeomorfo a la curva seno del topólogo cerrada. Demuestre que C separa S^2 en exactamente dos componentes, que tienen a C como frontera común. [*Indicación:* sea h el homeomorfismo entre la curva seno del topólogo cerrada y C. Sea $C_0 = h(0 \times [-1, 1])$. Demuestre en primer lugar, usando el argumento del Teorema 63.4, que cada punto de $C - C_0$ está en la frontera de cada componente de $S^2 - C$.]

§64 Grafos embebidos en el plano

Un ***grafo lineal*** (finito) G es un espacio de Hausdorff que se escribe como una unión finita de arcos, de manera que dos de ellos tienen como máximo un extremo en común. Los arcos se denominan ***aristas*** del grafo y los extremos de los arcos se denominan ***vértices*** del grafo.

Los grafos lineales son utilizados en matemáticas como modelos de muchos fenómenos reales; sin embargo, nosotros los estudiaremos únicamente como interesantes espacios que generalizan, en cierto sentido, las curvas simples cerradas.

Observemos que cualquier grafo está determinado completamente (salvo un homeomorfismo) por sus vértices, junto con las parejas de éstos que tienen una arista en común.

EJEMPLO 1. Si G contiene exactamente n vértices y si para cada pareja de vértices de G existe una arista de G que los conecta, entonces G se dice que es un ***grafo completo de n vértices***, y se denota por G_n. Algunos ejemplos de este tipo de grafos se representan en la Figura 64.1. Observe que los primeros tres grafos se dibujan como subespacios del plano $\mathbb{R}^2$, mientras que el cuarto se supone dibujado en $\mathbb{R}^3$. Un poco de experimentación le convencerá que dicho grafo *no puede* embeberse en $\mathbb{R}^3$. Probaremos esta propiedad en breve.

EJEMPLO 2. Otro grafo interesante surge al considerar el puzzle clásico: "Dadas tres casas, c_1, c_2 y c_3, y tres servicios, g (para el gas), a (para el agua), y e (para la electricidad), ¿puede usted conectar cada casa con cada servicio sin que se corten las distintas líneas?" Formulado matemáticamente, la cuestión se reduce a determinar si el grafo dibujado en la Figura 64.2, conocido como ***grafo de servicios***, puede ser embebido en $\mathbb{R}^2$. Otra vez más, un poco de experimentación le convencerá de que no es posible, como muy pronto demostraremos.

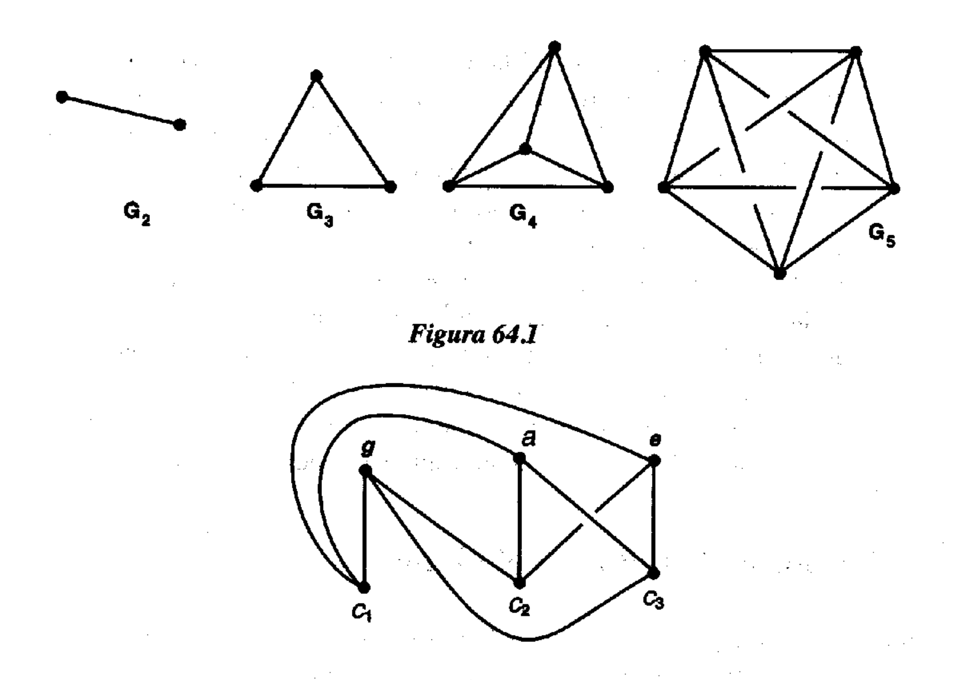


Figura 64.1

Figura 64.2

Definición. Un ***espacio theta*** X es un espacio de Hausdorff que se descompone como unión de tres arcos A, B y C tal que cada dos de ellos tienen en común sus extremos. El espacio X es, desde luego, homeomorfo a la letra griega theta.

Observe que un espacio theta X no es un grafo lineal, ya que los arcos en cuestión intersecan en más de un extremo. Sin embargo, un espacio theta puede escribirse como un grafo descomponiendo cada arco A, B y C en dos nuevos arcos con un punto en común.

Lema 64.1. *Sea X un espacio theta que es un subespacio de S^2; sean A, B y C los arcos cuya unión es X. Entonces X separa S^2 en tres componentes, cuyas fronteras son $A \cup B$, $B \cup C$ y $A \cup C$, respectivamente. La componente que tiene $A \cup B$ como su frontera coincide con una de las componentes de $S^2 - A \cup B$.*

Demostración. Sean a y b los extremos de los arcos A, B y C. Consideremos la curva simple cerrada $A \cup B$, que separa S^2 en dos componentes U y U', cada una de las cuales es abierta en S^2 y tiene como frontera $A \cup B$ (véase la Figura 64.3).

El espacio $C - a - b$ es conexo, por lo que está contenido en una de estas componentes, digamos U'. Entonces podemos considerar los espacios $\bar{U} = U \cup A \cup B$ y C, que son ambos conexos. Ninguno de los dos separa S^2, ya que C es un arco, y el complemento de $\bar{U}$ es el conjunto conexo U'. Como la intersección de estos dos conjuntos está formada por los puntos a y b, su unión separa S^2 en dos componentes

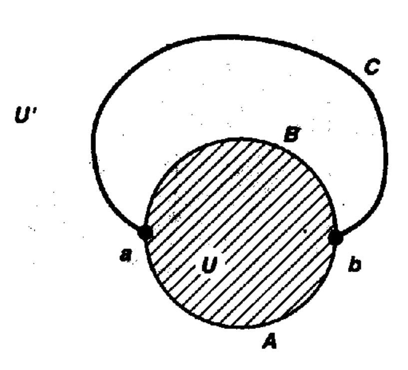


Figura 64.3

V y W, de acuerdo con el Teorema 63.5. Se sigue que $S^2 - (A \cup B \cup C)$ es la unión de tres conjuntos conexos y disjuntos U, V y W; como son conjuntos abiertos en S^2, son las componentes de $S^2 - (A \cup B \cup C)$. La componente U tiene $A \cup B$ como frontera. La simetría del problema implica que los otros dos conjuntos tienen $B \cup C$ y $A \cup C$ como fronteras, respectivamente. ■

Teorema 64.2. *Sea X el grafo de servicios. Entonces X no puede embeberse en el plano.*

Demostración. Si X pudiera ser embebido en el plano, entonces podría ser embebido en la esfera S^2. Por tanto, supongamos que X está embebido en S^2 y derivemos una contradicción.

Utilizaremos la notación del Ejemplo 2, donde g, a, e, c_1, c_2 y c_3 son los vértices de X. Sean A, B y C los siguientes arcos en X:

$$\begin{aligned} A &= gc_1a, \\ B &= gc_2a, \\ C &= gc_3a. \end{aligned}$$

Cada pareja de estos arcos sólo tienen en común sus extremos g y a por lo que $Y = A \cup B \cup C$ es un espacio theta. El espacio Y separa S^2 en tres componentes U, V y W, cuyas fronteras son $A \cup B$, $B \cup C$ y $A \cup C$, respectivamente (véase la Figura 64.4).

El vértice e de X está en una de estas tres componentes, de modo que los arcos ec_1, ec_2 y ec_3 de X están en la clausura de dicha componente. Ésta no puede ser U, ya que $\bar{U}$ está contenida en $U \cup A \cup B$, un conjunto que no contiene el punto c_3. De forma similar, la componente de e no puede ser V ni W, ya que $\bar{V}$ no contiene el punto c_1 y $\overline{W}$ no contiene el punto c_2. Entonces hemos alcanzado una contradicción. ■

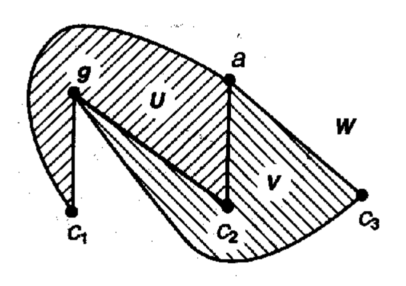


Figura 64.4

Lema 64.3. *Sea X un subespacio de S^2 que es un grafo completo de cuatro vértices a_1, a_2, a_3 y a_4. Entonces X separa S^2 en cuatro componentes. Las fronteras de estas componentes son los conjuntos X_1, X_2, X_3 y X_4, donde X_i es la unión de las aristas de X que no tienen el punto a_i como vértice.*

Demostración. Sea Y la unión de todos los arcos de X diferentes del arco a_2a_4. Entonces podemos escribir Y como un espacio theta tomando

$$\begin{aligned} A &= a_1a_2a_3, \\ B &= a_1a_3, \\ C &= a_1a_4a_3. \end{aligned}$$

(Véase la Figura 64.5.) Los arcos A, B y C sólo tienen en común sus extremos a_1 y a_3, y su unión es el espacio Y.

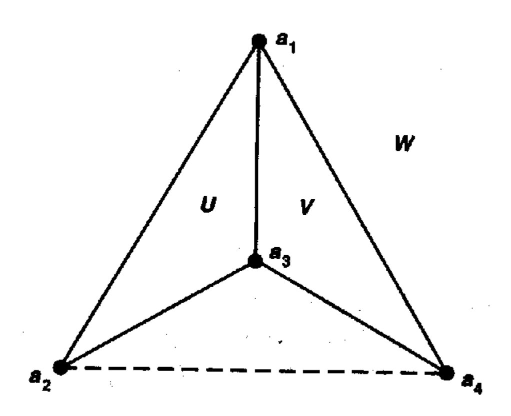


Figura 64.5

El espacio Y separa S^2 en tres componentes U, V y W, cuyas fronteras son los conjuntos $A \cup B$, $B \cup C$ y $A \cup C$, respectivamente. El espacio $a_2a_4 - a_2 - a_4$, al ser conexo, debe estar contenido en una de ellas. Pero no puede estar en U, ya que $A \cup B$ no contiene a_4. Y tampoco puede ser V, porque $B \cup C$ no contiene a_2. Por tanto, debe estar en W.

La unión $\bar{U} \cup \bar{V}$ es conexa, ya que tanto $\bar{U}$ como $\bar{V}$ lo son y tienen intersección no vacía B. Además, el conjunto $\bar{U} \cup \bar{V}$ no separa S^2, pues su complementario es W. De forma similar, el arco a_2a_4 es conexo y no separa S^2. Y los conjuntos a_2a_4 y $\bar{U} \cup \bar{V}$ sólo tienen en común los puntos a_2 y a_4. Se sigue del Teorema 63.5 que $a_2a_4 \cup \bar{U} \cup \bar{V}$ separa S^2 en dos componentes W_1 y W_2. Entonces $S^2 - Y$ es la unión de cuatro conjuntos conexos y disjuntos U, V, W_1 y W_2. Como estos conjuntos son abiertos, necesariamente son las componentes de $S^2 - Y$.

Pero una de estas componentes, digamos U, tiene el grafo $A \cup B = X_4$ como su frontera. La simetría implica que las otras tres tienen a X_1, X_2 y X_3 como sus respectivas fronteras. ∎

Teorema 64.4. *El grafo completo de cinco vértices no puede ser embebido en el plano.*

Demostración. Supongamos que G es un subespacio de S^2 que es un grafo completo de cinco vértices a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5. Sea X la unión de las aristas de G que no tienen como vértice al punto a_5; entonces X es un grafo completo de cuatro vértices. El espacio X separa S^2 en cuatro componentes, cuyas respectivas fronteras son $X_1, \ldots, X_4$, donde X_i está formado por las aristas de X que no tienen como vértice el punto a_i. Ahora el punto a_5 debe pertenecer a alguna de estas cuatro componentes. Se deduce que el espacio conexo

$$a_1a_5 \cup a_2a_5 \cup a_3a_5 \cup a_4a_5,$$

que es la unión de las aristas de G que tienen como vértice al punto a_5, debe estar en la clausura de dicha componente. Entonces los vértices $a_1, \ldots, a_4$ están también en la frontera de esa componente. Pero esto es imposible, ya que ninguno de los grafos X_i contiene los cuatro vértices $a_1, \ldots, a_4$. Hemos obtenido, pues, una contradicción. ∎

Se deduce de estos teoremas que si un grafo G contiene un subgrafo que es un grafo de servicios o un grafo completo de cinco vértices, entonces G no puede ser embebido en el plano. Un teorema importante, debido a Kuratowski, afirma que el recíproco también es cierto. La demostración no es nada sencilla.

Ejercicios

1. Sea X un espacio que puede escribirse como la unión finita de arcos $A_1, \ldots, A_n$, donde cada pareja de arcos tiene como máximo un extremo en común.
   (a) Pruebe que X es de Hausdorff si, y sólo si, cada arco A_i es cerrado en X.
   (b) Encuentre un ejemplo que demuestre que X puede no ser de Hausdorff. [*Indicación:* véase el Ejercicio 5 de §36.]

§65 El número de rotación de una curva simple cerrada

Si $h : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ es una aplicación continua, entonces el homomorfismo inducido h_* transforma un generador del grupo fundamental de S^1 en alguna potencia entera de un generador del grupo fundamental de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$. Esta potencia entera n se denomina *número de rotación* de h con respecto a $\mathbf{0}$. Mide cuántas veces h "se enrolla sobre S^1 alrededor del origen"; su signo depende desde luego de la elección de los generadores (véase la Figura 65.1). Lo introduciremos más formalmente en la siguiente sección.

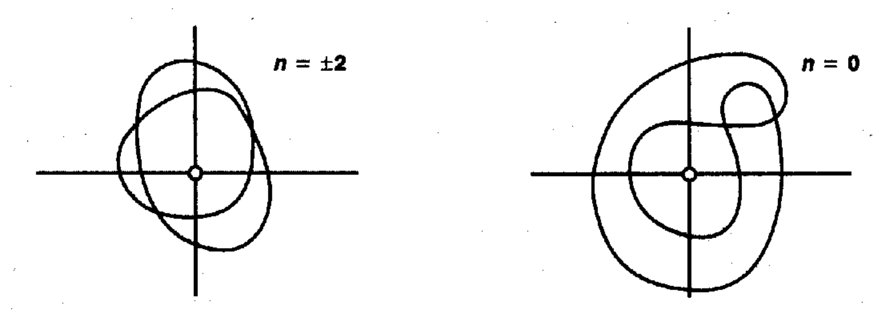


Figura 65.1

De momento, sólo nos plantearemos la siguiente cuestión: ¿qué podemos decir del número de rotación de h cuando h es inyectiva, es decir, si h es un homeomorfismo de S^1 en una curva simple cerrada C de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$? Los dibujos de la Figura 65.2 sugieren una conjetura obvia: si $\mathbf{0}$ pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces $n = 0$, mientras que si $\mathbf{0}$ está en la componente acotada entonces $n = \pm 1$.

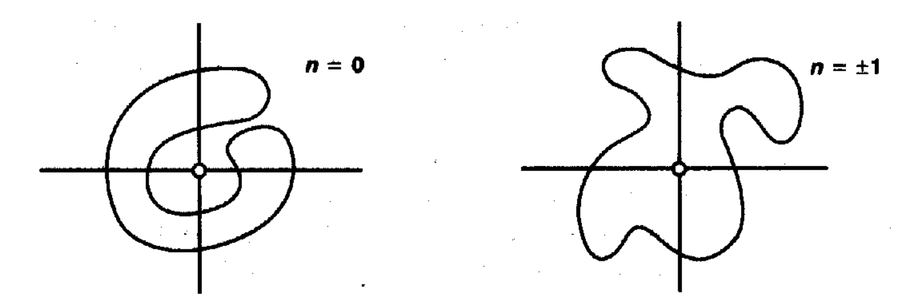


Figura 65.2

La primera conjetura es fácil de probar, ya que el Lema 61.2 nos dice que h es homotópicamente nula si $\mathbf{0}$ pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Por otra parte, la segunda conjetura es sorprendentemente difícil; es, de hecho, un resultado muy profundo, que probaremos en esta sección.

Como es frecuente, reemplazaremos $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ por S^2, haciendo corresponder $\mathbf{0}$ con el punto p e ∞ con el punto q. Entonces nuestra conjetura puede ser reformulada

como sigue: si C es una curva simple cerrada en S^2, y si p y q pertenecen a diferentes componentes de $S^2 - C$, entonces la aplicación inclusión $j : C \to S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Esto es lo que probaremos.

En primer lugar, demostraremos el resultado en el caso en que la curva simple cerrada C esté contenida en un grafo completo de cuatro vértices. A continuación probaremos el caso general.

Lema 65.1. *Sea G un subespacio de S^2 que es un grafo completo de cuatro vértices $a_1, \ldots, a_4$. Sea C el subgrafo $a_1a_2a_3a_4a_1$, que es una curva simple cerrada. Sean p y q puntos interiores de las aristas a_1a_3 y a_2a_4, respectivamente. Entonces:*

(a) Los puntos p y q están en diferentes componentes de $S^2 - C$.

(b) La inclusión $j : C \to S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales.

Demostración. (a) Como veíamos en la demostración del Lema 64.3, el espacio theta $C \cup a_1a_3$ separa S^2 en tres componentes U, V y W. Una de éstas, digamos W, tiene a C como su frontera; es la única componente que contiene a los puntos a_2 y a_4. Por tanto, $a_2a_4 - a_2 - a_4$ debe estar en W, y en particular q debe pertenecer a W. Desde luego, p no está en W ya que p está en el espacio theta $C \cup a_1a_3$. Ahora el Lema 64.1 nos garantiza que W es una de las componentes de $S^2 - C$; por tanto, p y q pertenecen a diferentes componentes de $S^2 - C$.

(b) Sea $X = S^2 - p - q$. La idea de la demostración es la siguiente. Elegimos un punto x interior al arco a_1a_2, y un punto y interior al arco a_3a_4. Sean α y β los caminos siguientes:

$$\alpha = xa_1a_4y \qquad \text{y} \qquad \beta = ya_3a_2x.$$

Entonces $\alpha * \beta$ es un lazo en la curva simple cerrada C. Vamos a probar que $\alpha * \beta$ constituye un generador del grupo fundamental de X. Se sigue que el homomorfismo $j_* : \pi_1(C, x) \to \pi_1(X, x)$ es sobreyectivo, por lo que j_* debe ser un isomorfismo (ya que los grupos involucrados son cíclicos infinitos). Véase la Figura 65.3.

Sean D_1 y D_2 los arcos

$$D_1 = pa_3a_2q \qquad \text{y} \qquad D_2 = qa_4a_1p$$

y sean $U = S^2 - D_1$ y $V = S^2 - D_2$ (véase la Figura 65.4). Entonces $X = U \cup V$ y $U \cap V$ es igual a $S^2 - D$, donde D es la curva simple cerrada $D = D_1 \cup D_2$. Por tanto, $U \cap V$ tiene dos componentes, aplicando el teorema de la curva de Jordan. Además, como D es igual a la curva simple cerrada $a_1a_3a_2a_4a_1$, la parte (a) implica que los puntos x e y, que están en el interior de las otras dos aristas del grafo G, pertenecen a diferentes componentes de $S^2 - D$.

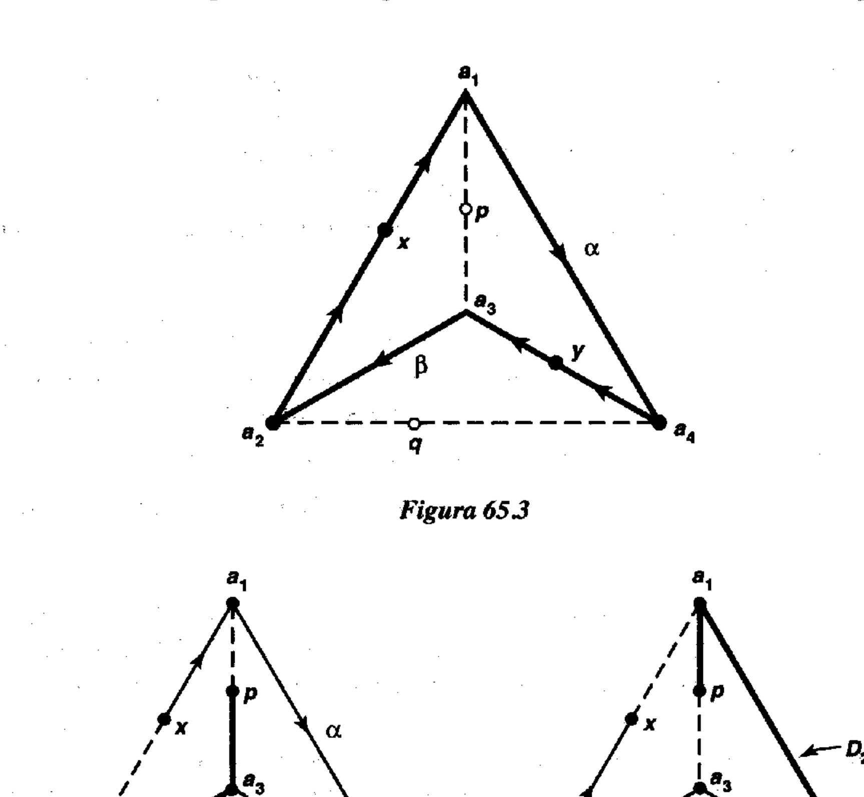


Figura 65.3

Figura 65.4

Las hipótesis del Teorema 63.1 se cumplen. El camino α es un camino en U entre x e y, mientras que β es un camino en V que conecta y con x. Como el grupo fundamental de X es cíclico infinito, el lazo $\alpha * \beta$ constituye un generador de este grupo. ∎

Ahora vamos a probar nuestro teorema principal.

Teorema 65.2. *Sea C una curva simple cerrada en S^2; sean p y q dos puntos que están en distintas componentes de $S^2 - C$. Entonces la aplicación inclusión $j : C \to S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales.*

Demostración. La prueba consiste en construir un grafo completo de cuatro vértices que contenga a C como un subgrafo.

Paso 1. Sean a, b y c tres puntos distintos de $\mathbb{R}^2$. Si A es un arco con extremos a y b, y si B es un arco con extremos b y c, entonces existe un arco contenido en $A \cup B$ con extremos a y c.

Escojamos caminos $f : I \to A$ desde a hasta b, y $g : I \to B$ desde b hasta c, tales que f y g sean homeomorfismos. Sea t_0 el valor más pequeño de I tal que $f(t_0) \in B$ y sea t_1 el punto de I tal que $g(t_1) = f(t_0)$. Entonces el conjunto $f([0, t_0]) \cup g([t_1, 1])$ es el arco requerido. Si $t_0 = 0$ o $t_1 = 1$, uno de dichos arcos está formado por un único punto (véase la Figura 65.5).

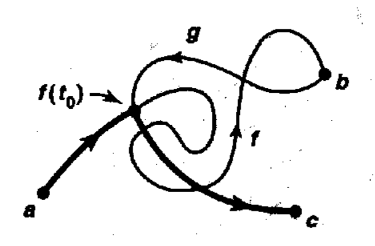


Figura 65.5

Paso 2. Probaremos que si U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, entonces dos puntos cualesquiera de U que puedan conectarse mediante un camino en U serán los extremos de un arco contenido en U.

Si $x, y \in U$, establecemos que $x \sim y$ si $x = y$ o si existe un arco en U con extremos x e y. El Paso 1 demuestra que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son abiertas, ya que si un ϵ-entorno de x está incluido en U, está formado por puntos equivalentes a x. Como U es conexo, sólo existe una clase de equivalencia.

Paso 3. Sea C una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$. Construiremos un subespacio G de $\mathbb{R}^2$ que será un grafo completo de cuatro vértices $a_1 \ldots, a_4$ y tal que C es el subgrafo $a_1a_2a_3a_4a_1$.

Por comodidad, supondremos que $\mathbf{0}$ está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Consideremos $\mathbb{R} \times 0$ el eje x en $\mathbb{R}^2$, sea a_1 el mayor número en el eje x negativo que pertenece a C, y sea a_3 el menor número en el eje x positivo que pertenece a C. Entonces el segmento de recta a_1a_3 pertenece a la clausura de la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$.

Escribamos C como la unión de dos arcos C_1 y C_2 con extremos a_1 y a_3. Sea a un punto de la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Como C_1 y C_2 no separan $\mathbb{R}^2$, podemos elegir caminos $\alpha : I \to \mathbb{R}^2 - C_1$ y $\beta : I \to \mathbb{R}^2 - C_2$ desde a hasta $\mathbf{0}$; teniendo en cuenta el Paso 2, podemos suponer que tanto α como β son inyectivos. Sea $a_2 = \alpha(t_0)$, donde t_0 es el menor número tal que $\alpha(t_0) \in C$; entonces a_2 es un punto del interior de C_2. De forma similar, sea $a_4 = \beta(t_1)$, donde t_1 es el menor valor tal que $\beta(t_1) \in C$; entonces a_4 es un punto del interior de C_1. Por tanto, $\alpha([0, t_0])$ y $\beta([0, t_1])$ son arcos que conectan a con a_2 y a_4, respectivamente; según

lo obtenido en el Paso 2, su unión contiene un arco cuyos extremos son a_2 y a_4; este arco interseca a C únicamente en estos dos puntos. Dicho arco, junto con el segmento a_1a_3 y la curva C, constituye el grafo deseado (véase la Figura 65.6).

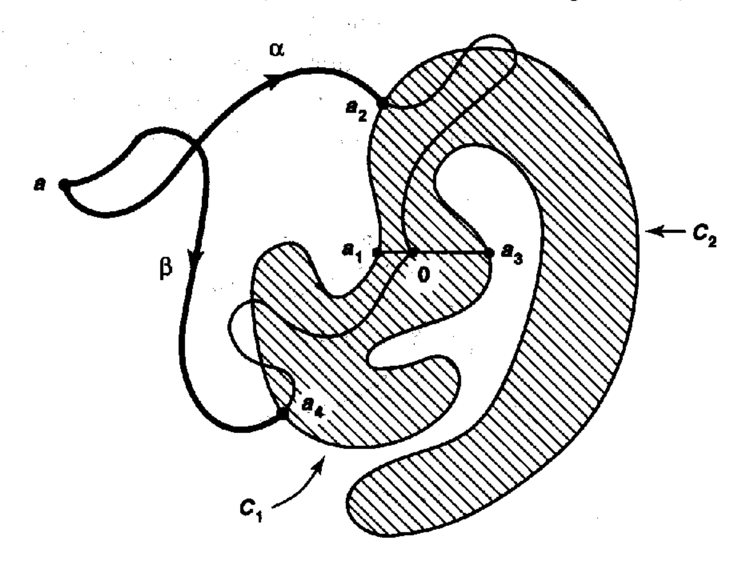


Figura 65.6

Paso 4. Se deduce del resultado del Paso 3 y del lema previo que para *alguna* pareja de puntos p y q pertenecientes a diferentes componentes de S^2-C, la inclusión $j : C \to S^2 - p - q$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Para completar la demostración sólo necesitamos probar que lo mismo se cumple para *cualquier* pareja de puntos p y q pertenecientes a diferentes componentes de $S^2 - C$. Para conseguir esto, sólo es necesario probar lo siguiente:

Sea D una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$; supongamos que $\mathbf{0}$ está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - D$. Sea p cualquier otro punto de esta componente. Si la inclusión $j : D \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales, entonces también lo induce la inclusión $k : D \to \mathbb{R}^2 - p$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 - p \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ el homeomorfismo $f(x) = x - p$. Es suficiente probar que la aplicación

$$D \xrightarrow{k} \mathbb{R}^2 - p \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$$

induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Sea α un camino en $\mathbb{R}^2 - D$ desde $\mathbf{0}$ hasta p, y sea $F : D \times I \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ la aplicación dada por $F(x,t) = x - \alpha(t)$. Entonces F es una homotopía entre j y $f \circ k$; como j induce un isomorfismo, lo mismo verifica $f \circ k$ (véase el Corolario 58.5). ∎

Este teorema es un caso especial de un teorema muy profundo de topología algebraica, relativo al "número de enlace" de dos subespacios disjuntos de S^{m+n+1}, uno

homeomorfo a una m-esfera y el otro homeomorfo a una n-esfera; está relacionado con el teorema de la dualidad de Alexandrov (véase [Mu], pág. 433). El caso especial de nuestro teorema se obtiene al considerar una 0-esfera (es decir, un espacio de dos puntos) y una 1-esfera (es decir, una curva simple cerrada) en S^2.

§66 La fórmula integral de Cauchy

Uno de los teoremas centrales en el estudio de las funciones de una variable compleja se refiere a la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas. Para la versión clásica de este teorema se necesita, además del teorema de la curva de Jordan, el teorema del número de rotación probado en la última sección. Existe, sin embargo, una reformulación del teorema integral de Cauchy que evita usar estos resultados; esta versión del teorema, aunque es menos natural, aparece frecuentemente en los textos sobre este tema.

Como el teorema de la curva de Jordan está a nuestra disposición, nos proponemos obtener la fórmula integral de Cauchy en su versión clásica a partir de la versión reformulada.

Comenzaremos introduciendo la noción de "número de rotación" más formalmente.

Definición. Sea f un lazo en $\mathbb{R}^2$ y sea a un punto que no está en la imagen de f. Si

$$g(s) = \frac{f(s) - a}{||f(s) - a||}$$

entonces g es un lazo en S^1. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ la aplicación recubridora estándar, y sea $\tilde{g}$ un levantamiento de g a S^1. Como g es un lazo, la diferencia $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$ es un número entero. Este número se denomina ***número de rotación de f respecto de a***, y se denota por $n(f, a)$.

Observemos que $n(f, a)$ es independiente de la elección del levantamiento de g. Si $\tilde{g}$ es un levantamiento de g, la unicidad de los levantamientos implica que cualquier otro levantamiento de g tendría la forma $\tilde{g}(s) + m$, para algún entero m.

Definición. Sea $F : I \times I \to X$ una aplicación continua tal que $F(0, t) = F(1, t)$ para todo t. Entonces para cada t, la aplicación $f_t(s) = F(s, t)$ es un lazo de X. La aplicación F se dice que es una ***homotopía libre*** entre los lazos f_0 y f_1. Es una homotopía de lazos en la que se permite que el punto base del lazo se desplace durante la homotopía.

Lema 66.1. *Sea f un lazo en $\mathbb{R}^2 - a$.*

(a) *Si $\bar{f}$ es el inverso de f, entonces $n(\bar{f}, a) = -n(f, a)$.*

(b) *Si f es libremente homotópico a f', a través de lazos contenidos en $\mathbb{R}^2 - a$, entonces $n(f, a) = n(f', a)$.*

(c) *Si a y b están en la misma componente de $\mathbb{R}^2 - f(I)$, entonces $n(f, a) = n(f, b)$.*

Demostración. (a) Para calcular $n(\bar{f}, a)$ reemplazamos s por $1 - s$ en la definición. Este cambio provoca un cambio de signo en la expresión $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$.

(b) Sea F una homotopía libre entre f y f'. Definamos $G : I \times I \to S^1$ por la ecuación

$$G(s, t) = \frac{F(s, t) - a}{||F(s, t) - a||}.$$

Sea $\tilde{G}$ un levantamiento de G a $\mathbb{R}$. Entonces $\tilde{G}(1, t) - \tilde{G}(0, t)$ es un número entero para cada t; al ser una aplicación continua, necesariamente ha de ser constante.

(c) Sea α un camino en $\mathbb{R}^2 - f(I)$ desde a hasta b. Observemos que, por definición, $n(f, a) = n(f - a, \mathbf{0})$. Como $f(s) - \alpha(t)$ es una homotopía libre en $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ entre $f - a$ y $f - b$, el resultado se obtiene fácilmente. ■

Definición. Sea f un lazo en X. Diremos que f es un ***lazo simple*** siempre que $f(s) = f(s')$ sólo para $s = s'$ o si uno de los puntos s, s' es 0 y el otro es 1. Si f es un lazo simple, el conjunto imagen es una curva simple cerrada en X.

Teorema 66.2. *Sea f un lazo simple en $\mathbb{R}^2$. Si a está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - f(I)$, entonces $n(f, a) = 0$; sin embargo, si a está en la componente acotada, entonces $n(f, a) = \pm 1$.*

Demostración. Como $n(f, a) = n(f - a, \mathbf{0})$ nos podemos restringir al caso $a = \mathbf{0}$. Además, podemos suponer que el punto base de f se encuentra en el eje x. Como siempre es posible rotar gradualmente $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ para que el punto base de f satisfaga dicha condición, y como dicha rotación modifica f por una homotopía libre, no se altera la conclusión del teorema.

Por tanto, sea f un lazo simple en $X = \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ con base un punto x_0 en el semieje positivo de las abcisas x. Sea C la curva simple cerrada $f(I)$. Probaremos que si $\mathbf{0}$ está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces $[f]$ genera $\pi_1(X, x_0)$, mientras que si $\mathbf{0}$ está en la componente no acotada, entonces $[f]$ es trivial.

La aplicación f induce, *vía* la aplicación cociente estándar $p : I \to S^1$, un homeomorfismo $h : S^1 \to C$. El elemento $[p]$ genera el grupo fundamental de S^1, de modo que $h_*[p]$ genera el grupo fundamental de C. Si $\mathbf{0}$ está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, el Teorema 65.2 nos asegura que $j_* h_*[p] = [f]$ genera el grupo

fundamental de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$, donde $j : C \to \mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ es la inclusión. Por otra parte, si $\mathbf{0}$ está en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces $j \circ h$ es homotópicamente nula por el Lema 61.2, de modo que $[f]$ es trivial.

A continuación probaremos que si $[f]$ genera $\pi_1(X, x_0)$ entonces $n(f, \mathbf{0}) = \pm 1$, mientras que si $[f]$ es trivial, entonces $n(f, \mathbf{0}) = 0$. Como la retracción $x \to x/||x||$ de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{0}$ en S^1 induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales, el lazo $g(s) = f(s)/||f(s)||$ representa un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$ en el primer caso, y el elemento neutro en el segundo caso. Al examinar el isomorfismo $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$ construido en la demostración del Teorema 54.5 observamos que cuando levantamos g a un camino $\tilde{g}$ en $\mathbb{R}$ comenzando en 0, el camino $\tilde{g}$ finaliza en ± 1 en el primer caso, y en 0 en el segundo. ∎

Definición. Sea f un lazo simple en $\mathbb{R}^2$. Diremos que f es un lazo ***en sentido contrario a las agujas del reloj*** si $n(f, a) = +1$ para algún a (y, por tanto, para todo a) en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - f(I)$. Diremos que f es un lazo ***en el sentido de las agujas del reloj*** si $n(f, a) = -1$. El lazo estándar $p(s) = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s)$ es un lazo en sentido contrario a las agujas del reloj.

Aplicaciones a variables complejas

En este apartado relacionaremos el número de rotación con las integrales complejas a lo largo de caminos.

Lema 66.3. *Sea f un lazo diferenciable a trozos en el plano complejo; sea a un punto que no está en la imagen de f. Entonces*

$$n(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{dz}{z - a}.$$

La ecuación anterior se toma en ocasiones como la *definición* del número de rotación de f.

Demostración. La demostración es un simple ejercicio de cálculo. Sean $p : \mathbb{R} \to S^1$ la aplicación recubridora estándar. Sea $r(s) = ||f(s) - a||$ y $g(s) = [f(s) - a]/r(s)$. Sea $\tilde{g}(s)$ un levantamiento de g a $\mathbb{R}$. Sea $\theta(s) = 2\pi\tilde{g}(s)$. Entonces $f(s) - a = r(s)\exp(i\theta(s))$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_f \frac{dz}{z-a} &= \int_0^1 [r' e^{i\theta} + i r \theta' e^{i\theta} / r e^{i\theta}] ds \\ &= [\log r(s) + i\theta(s)]_0^1 \\ &= i[\theta(1) - \theta(0)] \\ &= 2\pi i [\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)]. \end{aligned}$$

∎

Teorema 66.4 (Versión clásica de la fórmula integral de Cauchy). *Sea C una curva simple cerrada diferenciable a trozos en el plano complejo. Sea B la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Si $F(z)$ es analítica en un conjunto abierto Ω que contiene a B y C, entonces para cada punto a de B se satisface*

$$F(a) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-a}dz.$$

El signo es $+$ si C está orientada en sentido contrario a las agujas del reloj, y $-$ en caso contrario.

Demostración. Obtendremos esta fórmula a partir de la versión que puede encontrarse en Ahlfors [A], que es la siguiente:

Sea F analítica en una región Ω. Sea f un lazo diferenciable a trozos en Ω. Supongamos que $n(f, b) = 0$ para cada punto b que no esté en Ω. Si $a \in \Omega$ y a no está en la imagen de f, entonces

$$n(f, a) \cdot F(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_f \frac{F(z)}{z-a}dz.$$

Aplicaremos este resultado a una parametrización diferenciable a trozos f de nuestra curva simple cerrada. La condición $n(f, b) = 0$ se satisface para cada punto b que no esté en Ω, ya que tales puntos están en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Además, $n(f, a) = \pm 1$ si a está en B, donde el signo depende de la orientación de C, según el Teorema 66.2. Esto concluye la demostración. ∎

Obsérvese que no se puede enunciar ni siquiera la versión clásica del teorema integral de Cauchy sin conocer el teorema de la curva de Jordan. Para demostrarlo se requiere incluso más, concretamente el conocimiento del número de rotación de una curva simple cerrada. Es interesante observar que este último resultado puede ser probado (al menos en el caso diferenciable) mediante un método completamente diferente, utilizando la versión general del *teorema de Green*, probada en análisis. La demostración se indica en el Ejercicio 2.

Ejercicios

1. Sea f un lazo en $\mathbb{R}^2 - a$; sea $g(s) = [f(s) - a]/\|f(s) - a\|$. La aplicación g induce, *vía* la aplicación cociente estándar $p : I \to S^1$, una aplicación continua $h : S^1 \to S^1$. Demuestre que $n(f, a)$ coincide con el *grado* de h, tal y como se definió en el Ejercicio 9 de §58.

2. Este ejercicio presupone cierta familiaridad con el análisis en variedades.
Teorema. *Sea C una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$ que es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^2$; sea $f : I \to C$ un lazo simple parametrizando diferenciablemente C. Si $\mathbf{0}$ es un punto de la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$, entonces*

$n(f, \mathbf{0}) = \pm 1$.

Demostración. Sea U la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Sea B una ϵ-bola cerrada centrada en $\mathbf{0}$ y contenida en U; sea $S = \operatorname{Fr} B$. Sea M la clausura de $U - B$.

(a) Demuestre que M es una variedad diferenciable 2-dimensional con frontera $C \cup S$.

(b) Aplique el teorema de Green y pruebe que $\int_C dz/z = \pm \int_S dz/z$, donde el signo depende de las orientaciones de C y S. [*Indicación:* sea $P = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q = x/(x^2 + y^2)$.]

(c) Demuestre que la segunda integral vale $\pm 2\pi i$.

Capítulo 11

El teorema de Seifert-van Kampen

§67 Sumas directas de grupos abelianos

En esta sección sólo vamos a considerar grupos que sean abelianos. Como suele ser habitual, escribiremos tales grupos aditivamente, de modo que 0 denota el elemento neutro del grupo, $-x$ representa el inverso de x y nx denota la suma de n copias de x, $x + \cdots + x$.

Supongamos que G es un grupo abeliano y sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de subgrupos de G. Diremos que los grupos G_α ***generan*** G si cada elemento x de G puede escribirse como una suma finita de elementos de los grupos G_α. Como G es abeliano, siempre podemos reorganizar la suma para agrupar los términos que pertenezcan al mismo G_α, de modo que x siempre puede ser escrito en la forma

$$x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n}$$

donde los índices α_i son distintos. En este caso, a menudo escribiremos x como la suma formal $x = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha$, donde se sobrentiende que $x_\alpha = 0$ si α no es uno de los índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Si los grupos G_α generan G, a menudo diremos que G es la ***suma*** de los grupos G_α, escribiendo $G = \sum_{\alpha \in J} G_\alpha$ en general, o $G = G_1 + \cdots + G_n$ en el caso del conjunto finito de índices $\{1, \ldots, n\}$.

Supongamos ahora que los grupos G_α generan G y que, para cada $x \in G$, la expresión $x = \sum x_\alpha$ es *única* para x. Esto es, supongamos que para cada $x \in G$ sólo existe una J-upla $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, con $x_\alpha = 0$ siempre, excepto para una cantidad finita de índices α, tal que $x = \sum x_\alpha$. Entonces se dice que G es la ***suma directa*** de los grupos G_α y se escribe

$$G = \bigoplus_{\alpha \in J} G_\alpha$$

o bien, en el caso finito, $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$.

EJEMPLO 1. El producto cartesiano $\mathbb{R}^\omega$ es un grupo abeliano con la operación suma componente a componente. El conjunto G_n consistente en los elementos (x_i) tales que $x_i = 0$ para $i \neq n$ es un subgrupo isomorfo a $\mathbb{R}$. Los grupos G_n generan el subgrupo $\mathbb{R}^\infty$ de $\mathbb{R}^\omega$; de hecho, $\mathbb{R}^\infty$ es su suma directa.

Una caracterización útil de las sumas directas nos la proporciona el siguiente lema, que denominaremos ***condición de extensión*** para las sumas directas.

Lema 67.1. *Sea G un grupo abeliano y $\{G_\alpha\}$ una familia de subgrupos de G. Si G es la suma directa de los grupos G_α entonces G satisface la siguiente condición:*

(∗) *Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \to H$, existe un homomorfismo $h : G \to H$ cuya restricción a G_α coincide con h_α para cada α.*

Además, h es única. Recíprocamente, si los grupos G_α generan G y la condición de extensión (∗) se satisface, entonces G es la suma directa de los grupos G_α.

Demostración. Probaremos primero que si G posee la propiedad de extensión enunciada, entonces G es la suma directa de los grupos G_α. Supongamos que $x = \sum x_\alpha = \sum y_\alpha$; vamos a probar que para cualquier índice β se satisface que $x_\beta = y_\beta$. Sea H el grupo G_β y consideremos $h_\alpha : G_\alpha \to H$ el homomorfismo trivial si $\alpha \neq \beta$ y el homomorfismo identidad si $\alpha = \beta$. Sea $h : G \to H$ la hipotética extensión de los homomorfismos h_α. Entonces

$$h(x) = \sum h_\alpha(x_\alpha) = x_\beta,$$
$$h(x) = \sum h_\alpha(y_\alpha) = y_\beta,$$

de modo que $x_\beta = y_\beta$.

Ahora vamos a demostrar que si G es la suma directa de los grupos G_α, entonces se satisface la condición de extensión. Dados los homomorfismos h_α, definimos $h(x)$ como sigue: si $x = \sum x_\alpha$, sea $h(x) = \sum h_\alpha(x_\alpha)$. Como esta suma es finita y la expresión para x es única, h está bien definida. Puede comprobarse inmediatamente que h es el homomorfismo deseado. La unicidad se sigue porque h *debe* satisfacer esta ecuación si es un homomorfismo que coincide con h_α sobre G_α para cada α. ∎

De este lema se deducen numerosos resultados acerca de sumas directas que son muy fáciles de demostrar:

Corolario 67.2. *Sea $G = G_1 \oplus G_2$. Supongamos que G_1 es la suma directa de los subgrupos H_α para $\alpha \in J$ y que G_2 es la suma directa de los subgrupos H_β para $\beta \in K$, donde los conjuntos de índices J y K son disjuntos. Entonces G es la suma directa de los subgrupos H_γ para $\gamma \in J \cup K$.*

Demostración. Si $h_\alpha : H_\alpha \to H$ y $h_\beta : H_\beta \to H$ son familias de homomorfismos, entonces se extienden a homomorfismos $h_1 : G_1 \to H$ y $h_2 : G_2 \to H$ por el lema anterior. Entonces h_1 y h_2 se extienden a un homomorfismo $h : G \to H$. ■

Este corolario implica, por ejemplo, que

$$(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3).$$

Corolario 67.3. *Si $G = G_1 \oplus G_2$, entonces G/G_2 es isomorfo a G_1.*

Demostración. Sea $H = G_1$, $h_1 : G_1 \to H$ el homomorfismo identidad y $h_2 : G_2 \to H$ el homomorfismo trivial. Sea $h : G \to H$ su extensión al grupo G. Entonces h es sobreyectiva y su núcleo es G_2. ■

En muchas situaciones, disponemos de una familia de grupos abelianos $\{G_\alpha\}$ y deseamos encontrar un grupo G que contenga subgrupos G'_α isomorfos a los grupos G_α tales que G sea la suma directa de estos subgrupos. Esto puede conseguirse siempre, y este hecho nos conduce al concepto de *suma directa externa*.

Definición. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de grupos abelianos. Supongamos que G es un grupo abeliano y que $i_\alpha : G_\alpha \to G$ es una familia de monomorfismos tales que G es la suma directa de los subgrupos $i_\alpha(G_\alpha)$. Entonces se dice que G es la ***suma directa externa*** de los grupos G_α, relativa a los monomorfismos i_α.

El grupo G no es único, desde luego; probaremos posteriormente que es único salvo isomorfismos. A continuación presentamos el método para construir G.

Teorema 67.4. *Dada una familia de grupos abelianos $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$, existe un grupo abeliano G y una familia de monomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \to G$ tal que G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.*

Demostración. Consideremos, en primer lugar, el producto cartesiano

$$\prod_{\alpha\in J} G_\alpha$$

que es un grupo abeliano si consideramos como operación la suma componente a componente. Sea G el subgrupo del producto cartesiano consistente en los elementos $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ tales que $x_\alpha = 0_\alpha$, el elemento neutro de G_α, para todos los índices α excepto para una cantidad finita. Dado un índice β, definimos $i_\beta : G_\beta \to G$ asignando a $i_\beta(x)$ el único elemento que tiene x como coordenada β-ésima y el resto de coordenadas igual a 0_α, para $\alpha \neq \beta$. Es inmediato comprobar que i_β es un monomorfismo. Asimismo, es inmediato verificar que, dado que cada elemento $\mathbf{x}$ de G sólo tiene un

número finito de coordenadas no nulas, entonces $\mathbf{x}$ puede escribirse de forma única como una suma finita de elementos de los grupos $i_\beta(G_\beta)$. ■

La condición de extensión que caracteriza las sumas directas ordinarias se traslada inmediatamente a una condición de extensión para sumas directas externas:

Lema 67.5. *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de grupos abelianos, G un grupo abeliano y sea $i_\alpha : G_\alpha \to G$ una familia de homomorfismos. Si cada i_α es un monomorfismo y G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$, entonces G satisface la siguiente condición de extensión:*

(∗) *Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \to H$, existe un homomorfismo $h : G \to H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo α.*

Además, h es única. Recíprocamente, supongamos que los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$ generan G y se satisface la condición de extensión $(*)$. Entonces cada i_α es un monomorfismo y G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.

Demostración. La única implicación que requiere demostración es la afirmación de que si se satisface la condición de extensión, entonces cada i_α es un monomorfismo, lo cual puede probarse como sigue. Dado un índice β, sea $H = G_\beta$ y sea $h_\alpha : G_\alpha \to H$ el homomorfismo identidad si $\alpha = \beta$, y el homomorfismo trivial si $\alpha \neq \beta$. Sea $h : G \to H$ la hipotética extensión. Entonces, en particular, $h \circ i_\beta = h_\beta$; se sigue entonces que i_β es inyectiva. ■

Una consecuencia inmediata es el teorema de unicidad para las sumas directas:

Teorema 67.6 (Unicidad de sumas directas). *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de grupos abelianos. Supongamos que G y G' son grupos abelianos y sean $i_\alpha : G_\alpha \to G$ e $i'_\alpha : G_\alpha \to G'$ familias de monomorfismos tales que G es la suma directa de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$ y G' es la suma directa de los grupos $i'_\alpha(G_\alpha)$. Entonces existe un único isomorfismo $\phi : G \to G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α.*

Demostración. Aplicaremos cuatro veces el lema previo. Como G es la suma directa externa de los grupos G_α e $\{i'_\alpha\}$ es una familia de homomorfismos, existe un único homomorfismo $\phi : G \to G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α. De manera similar, como G' es la suma directa externa de los grupos G_α e $\{i_\alpha\}$ es una familia de homomorfismos, existe un único homomorfismo $\psi : G' \to G$ tal que $\psi \circ i'_\alpha = i_\alpha$ para cada α. Entonces $\psi \circ \phi : G \to G$ satisface que $\psi \circ \phi \circ i_\alpha = i_\alpha$ para todo α; como el elemento neutro de G tiene la misma propiedad, la unicidad que nos proporciona el lema nos permite asegurar que $\psi \circ \phi$ debe coincidir con el elemento neutro de G. De manera similar, $\phi \circ \psi$ debe coincidir con el elemento neutro de G'. ■

Si G es la suma directa externa de los grupos G_α, relativa a los monomorfismos i_α, en ocasiones haremos un abuso de notación y escribiremos $G = \oplus G_\alpha$, incluso aunque los grupos G_α no sean subgrupos de G. Esto es, identificaremos cada grupo G_α con su imagen bajo i_α, y trataremos G como una suma directa ordinaria en lugar de considerarlo como una suma directa externa. En cada caso, el contexto aclarará el significado preciso.

Ahora vamos a centrarnos en los grupos abelianos libres.

Definición. Sea G un grupo abeliano y sea $\{a_\alpha\}$ una familia indexada de elementos de G; sea G_α el subgrupo de G generado por a_α. Si los grupos G_α generan G diremos que los *elementos* a_α generan G. Si cada subgrupo G_α es cíclico infinito, y si G es la suma directa de los grupos G_α, entonces se dice que G es un ***grupo abeliano libre*** con ***base*** $\{a_\alpha\}$.

La condición de extensión en las sumas directas implica la siguiente condición de extensión para grupos abelianos libres:

Lema 67.7. *Sean G un grupo abeliano y $\{a_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de elementos de G que generan G. Entonces G es un grupo abeliano libre con base $\{a_\alpha\}$ si, y sólo si, para cada grupo abeliano H y cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de H existe un homomorfismo h de G en H tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para todo α. En este caso, h es única.*

Demostración. Sea G_α el subgrupo de G generado por a_α. Supongamos primero que la propiedad de extensión se satisface. Vamos a probar que cada grupo G_α es cíclico infinito. Supongamos que para algún índice β el elemento a_β genera un subgrupo cíclico finito de G. Entonces si hacemos $H = \mathbb{Z}$ no puede existir un homomorfismo $h : G \to H$ que haga corresponder cada elemento a_α con el número 1, ya que el elemento a_β tiene orden finito y el 1 no. Para probar que G es la suma directa de los grupos G_α simplemente aplicamos el Lema 67.1.

Recíprocamente, si G es un grupo abeliano libre con base $\{a_\alpha\}$, entonces dados los elementos $\{y_\alpha\}$ de H existen homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \to H$ tales que $h_\alpha(a_\alpha) = y_\alpha$, ya que G_α es cíclico infinito. Entonces basta aplicar el Lema 67.1. ■

Teorema 67.8. *Si G es un grupo abeliano libre con base $\{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces n está unívocamente determinado por G.*

Demostración. El grupo G es isomorfo al producto de n copias $\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$; el subgrupo $2G$ se corresponde con el subgrupo $(2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (2\mathbb{Z})$. Entonces el grupo cociente $G/2G$ se aplica biyectivamente en el conjunto $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, de modo que $G/2G$ tienen cardinal 2^n. Por tanto, n está unívocamente determinado por G. ■

Si G es un grupo abeliano libre con una base finita, el número de elementos de una base para G se denomina ***rango*** de G.

Ejercicios

1. Supongamos que $G = \sum G_\alpha$. Demuestre que esta suma es directa si, y sólo si, la ecuación

$$x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n} = 0$$

implica que cada x_{α_i} es cero (se supone que $x_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ y los índices α_i son distintos).

2. Pruebe que si G_1 es un subgrupo de G, puede que no exista ningún subgrupo G_2 de G tal que $G = G_1 \oplus G_2$. [*Indicación:* sea $G = \mathbb{Z}$ y $G_1 = 2\mathbb{Z}$.]

3. Si G es un grupo abeliano libre con base $\{x, y\}$, demuestre que $\{2x+3y, x-y\}$ es también una base de G.

4. El ***orden*** de un elemento a de un grupo abeliano G es el menor entero positivo m tal que $ma = 0$, si existe; en otro caso, a se dice que es de orden infinito. El orden de a equivale, por tanto, al orden del subgrupo generado por a.

(a) Pruebe que los elementos de orden finito de G forman un subgrupo de G, denominado ***subgrupo de torsión***.

(b) Pruebe que si G es abeliano libre, entonces no posee elementos de orden finito.

(c) Pruebe que el grupo aditivo de los racionales no tiene elementos de orden finito, pero no es un grupo abeliano libre. [*Indicación:* si $\{a_\alpha\}$ es una base, exprese $\frac{1}{2}a_\alpha$ en términos de esta base.]

5. Proporcione un ejemplo de un grupo abeliano libre G de rango n que posea un subgrupo H de rango n tal que $H \neq G$.

6. Demuestre el siguiente resultado:
Teorema. *Si A es un grupo abeliano libre de rango n, entonces cualquier subgrupo B de A es un grupo abeliano libre de rango no superior a n.*
Demostración. Podemos asumir que $A = \mathbb{Z}^n$, el producto de n copias de $\mathbb{Z}$. Sea $\pi_i : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ la proyección en la i-ésima coordenada. Dado $m \leq n$, sea B_m el subconjunto formado por todos los elementos $\mathbf{x}$ de B tales que $\pi_i(\mathbf{x}) = 0$ para $i > m$. Entonces B_m es un subgrupo de B.

Consideremos el subgrupo $\pi_m(B_m)$ de $\mathbb{Z}$. Si este subgrupo no es trivial, escojamos $\mathbf{x}_m \in B_m$ de modo que $\pi_m(\mathbf{x}_m)$ sea un generador de este subgrupo. En otro caso, hagamos $\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$.

(a) Pruebe que $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ genera B_m para todo m.

(b) Pruebe que los elementos no nulos de $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ forman una base de B_m para todo m.

(c) Pruebe que $B_n = B$ es abeliano libre con rango no superior a n.

§68 Productos libres de grupos

Ahora vamos a considerar grupos G que no tienen que ser necesariamente abelianos. En este caso, vamos a escribir G de forma multiplicativa. Denotaremos el elemento neutro de G por 1, y el inverso del elemento x será representado por x^{-1}. El símbolo x^n denotará el producto de n copias de x, x^{-n} el producto de n copias de x^{-1} y x^0 el elemento neutro.

En esta sección estudiaremos un concepto que desempeña un papel, en el caso de grupos arbitrarios, similar al que juega la suma directa para los grupos abelianos. Se denomina *producto libre* de grupos.

Sea G un grupo. Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia de subgrupos de G, diremos (como antes) que estos grupos *generan* G si todo elemento de G puede escribirse como un producto finito de elementos de los grupos G_α. Esto significa que existe una sucesión finita $(x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de los grupos G_α tal que $x = x_1 \cdots x_n$. Tal sucesión se denomina ***palabra*** (de longitud n) en los grupos G_α; se dice que ***representa*** el elemento x de G.

Observe que al perder la conmutatividad no podemos reorganizar los factores en la expresión de x para agrupar los que pertenecen al mismo grupo G_α. Sin embargo, si x_i y x_{i+1} pertenecen al mismo grupo G_α podemos agruparlos para obtener la palabra

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$

de longitud $n-1$ y que también representa a x. Además, si cualquiera de los x_i es igual a 1, entonces podemos suprimir x_i de la sucesión, obteniendo de nuevo una palabra más corta que también representa a x.

Aplicando estas operaciones de reducción repetidamente, podemos obtener en general una palabra representando a x de la forma $(y_1, \ldots, y_m)$, donde no existe ningún grupo G_α que contenga a dos elementos consecutivos y_i e y_{i+1} y donde $y_i \neq 1$ para todo índice i. Tal palabra se denomina ***palabra reducida***. Esta discusión no se aplica, sin embargo, si x es el elemento neutro de G, ya que en este caso se podría representar x por una palabra de la forma (a, a^{-1}) que se reduciría a la palabra (aa^{-1}) de longitud uno y entonces desaparecería. Consecuentemente, utilizaremos el convenio de que el conjunto vacío es una palabra reducida (de longitud cero) que representa el elemento neutro de G. Con este convenio es cierto que si los grupos G_α generan G entonces todo elemento de G puede ser representado por una palabra reducida en los elementos de los grupos G_α.

Observe que si $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_m)$ son palabras que representan a x e y, respectivamente, entonces $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ es una palabra que representa a xy. Incluso si las dos primeras son palabras reducidas, la tercera puede no ser una palabra reducida, a menos que ningún grupo G_α contenga a los elementos x_n e y_1.

Definición. Sea G un grupo, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subgrupos de G que generan G. Supongamos que $G_\alpha \cap G_\beta$ está formado sólo por el elemento neutro cuando $\alpha \neq \beta$. Diremos que G es el ***producto libre*** de los grupos G_α si para cada $x \in G$ existe una única palabra reducida en los grupos G_α que representa a x. En este caso escribiremos

$$G = \prod_{\alpha \in J}^{*} G_\alpha$$

o, en el caso finito, $G = G_1 * \cdots * G_n$.

Sea G el producto de los grupos G_α y sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una palabra en los grupos G_α que satisface la condición $x_i \neq 1$ para todo i. Entonces, para cada i, existe un único índice α_i tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$; decir que la palabra es una palabra reducida significa simplemente que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ para todo i.

Supongamos que los grupos G_α generan G, donde $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$ siempre que $\alpha \neq \beta$. Para que G sea el producto libre de estos grupos, es suficiente con saber que la representación de 1 por la palabra vacía es única. En efecto, si se satisface esta última condición y suponemos que $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_m)$ son dos palabras reducidas que representan al mismo elemento x de G, podemos elegir los índices α_i y β_i tales que $x_i \in G_{\alpha_i}$ e $y_i \in G_{\beta_i}$. Como

$$x_1 \cdots x_n = x = y_1 \cdots y_m$$

la palabra

$$(y_m^{-1}, \ldots, y_1^{-1}, x_1, \ldots, x_n)$$

representa el 1. Por tanto debe ser posible reducir esta palabra, de modo que tenemos $\alpha_1 = \beta_1$; la palabra se reduce entonces a

$$(y_m^{-1}, \ldots, y_1^{-1} x_1, \ldots, x_n).$$

De nuevo podemos afirmar que es posible reducir esta palabra, por lo que $y_1^{-1} x_1 = 1$ y así $x_1 = y_1$ de modo que 1 está representado por la palabra

$$(y_m^{-1}, \ldots, y_2^{-1}, x_2, \ldots, x_n).$$

Continuando con este argumento concluimos que $m = n$ y que $x_i = y_i$ para todo i.

EJEMPLO 1. Consideremos el grupo P de las aplicaciones biyectivas del conjunto $\{0,1,2\}$ en sí mismo. Para $i = 1, 2$ definimos un elemento π_i de P haciendo $\pi_i(i) = i-1$, $\pi_i(i-1) = i$ y $\pi_i(j) = j$ en otro caso. Entonces π_i genera un subgrupo G_i de P de orden 2. Los grupos G_1 y G_2 generan P, como fácilmente puede comprobarse. Pero P no es su producto libre. Las palabras reducidas (π_1, π_2, π_1) y (π_2, π_1, π_2), por ejemplo, representan el mismo elemento de P.

El producto libre verifica una ***condición de extensión*** análoga a la que satisface la suma directa:

Lema 68.1. *Sea G un grupo y $\{G_\alpha\}$ una familia de subgrupos de G. Si G es el producto libre de los grupos G_α, entonces G satisface la siguiente condición:*

(∗) *Dado cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \to H$, existe un homomorfismo $h : G \to H$ cuya restricción a G_α coincide con h_α para cada α.*

Además, h es único.

El recíproco de este lema también se satisface, pero la demostración no es tan sencilla como en el caso de las sumas directas, por lo que la posponemos para más adelante.

Demostración. Dado $x \in G$ distinto de 1, sea $(x_1, \dots, x_n)$ la palabra reducida que lo representa. Si h existe, entonces debe satisfacer la ecuación

$$(*) \qquad h(x) = h(x_1) \cdots h(x_n) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$. Por tanto, h es única.

Para probar que h existe, la definimos por la ecuación (∗) si $x \neq 1$, y asignamos $h(1) = 1$. Como la representación de x por una palabra reducida es única, h está bien definida. Debemos probar que h es un homomorfismo.

Primero probaremos un resultado preliminar. Dada una palabra $w = (x_1, \dots, x_n)$ de longitud positiva en los elementos de los grupos G_α, definimos $\phi(w)$ como el elemento de H dado por la ecuación

$$(**) \qquad \phi(w) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n)$$

donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$. Pero α_i es único excepto si $x_i = 1$; por tanto, ϕ está bien definida. Si w es la palabra vacía, hacemos $\phi(w)$ igual al elemento neutro de H. Vamos a probar que si w' es una palabra obtenida de w aplicando una de nuestras operaciones de reducción, entonces $\phi(w') = \phi(w)$.

Supongamos primero que w' se obtiene eliminando el factor $x_i = 1$ de la palabra w. Entonces la ecuación $\phi(w') = \phi(w)$ es consecuencia del hecho que $h_{\alpha_i}(x_i) = 1$. En segundo lugar, supongamos que $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, y que

$$w' = (x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dado que

$$h_\alpha(x_i)h_\alpha(x_{i+1}) = h_\alpha(x_i x_{i+1})$$

donde $\alpha = \alpha_i = \alpha_{i+1}$, se tiene que $\phi(w') = \phi(w)$.

Se deduce asimismo que si w es cualquier palabra en los grupos G_α que representa a x, entonces $h(x) = \phi(w)$. Por la definición de h esta ecuación se satisface para cualquier palabra reducida y el proceso de reducción no cambia el valor de ϕ.

Supongamos ahora que h es un homomorfismo y que $w = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w' = (y_1, \ldots, y_m)$ son palabras que representan a x e y, respectivamente. Sea (w, w') la palabra $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ que representa a xy. Se obtiene de la ecuación (**) que $\phi(w, w') = \phi(w)\phi(w')$. En consecuencia, $h(xy) = h(x)h(y)$. ■

Ahora vamos a considerar el problema de tomar una familia arbitraria de grupos $\{G_\alpha\}$ y encontrar un grupo G que contenga subgrupos G'_α isomorfos a los grupos G_α y tal que G sea el producto libre de los grupos G'_α. Esta cuestión tiene, de hecho, una solución y nos conduce a la noción de *producto libre externo*.

Definición. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de grupos. Supongamos que G es un grupo y que $i_\alpha : G_\alpha \to G$ es una familia de monomorfismos, tales que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$. Entonces se dice que G es el ***producto libre externo*** de los grupos G_α, relativo a los monomorfismos i_α.

El grupo G no es único, desde luego; probaremos, no obstante, que es único salvo isomorfismos. La construcción de G es mucho más difícil que la construcción de la suma directa externa.

Teorema 68.2. *Dada una familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de grupos, existe un grupo G y una familia de monomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \to G$ tal que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.*

Demostración. Por comodidad, supondremos que los grupos G_α son disjuntos como conjuntos. Esto puede conseguirse reemplazando G_α por $G_\alpha \times \{\alpha\}$, si fuese necesario.

Entonces podemos definir, como antes, una ***palabra*** (de longitud n) en los elementos de los grupos G_α como una n-upla $w = (x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de $\bigcup G_\alpha$. Se dice que es una *palabra reducida* si $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ para todo i, donde α_i es el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$ para todo i, y x_i no es el elemento neutro de G_{α_i}. Definimos el conjunto vacío como la única palabra reducida de longitud cero. Observemos que no estamos proporcionando un grupo G que contiene todos los grupos G_α como subgrupos, por lo que no podemos decir que una palabra "representa" un elemento de G.

Sea W el conjunto de todas las palabras reducidas en los elementos de los grupos G_α. Sea $P(W)$ el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas $\pi : W \to W$. Entonces $P(W)$ es también un grupo, considerando la composición de funciones como la operación del grupo. Vamos a obtener el grupo G como un subgrupo de $P(W)$.

Paso 1. Para cada índice α y cada $x \in G_\alpha$, sea $\pi_x : W \to W$ la aplicación definida como sigue:

(1) Si $x = 1_\alpha$, el elemento neutro de G_α, entonces π_x es la aplicación identidad de W.

(2) Si $x, y \in G_\alpha$ y $z = xy$ entonces $\pi_z = \pi_x \circ \pi_y$.

Ahora procederemos como se indica a continuación. Sea $x \in G_\alpha$, $w = (x_1, \ldots, x_n)$ un elemento genérico y no vacío de W y sea α_1 el índice tal que $x_1 \in G_{\alpha_1}$. Si $x \neq 1_\alpha$, definimos π_x como sigue:

(i) $\pi_x(\varnothing) = (x)$,

(ii) $\pi_x(w) = (x, x_1, \ldots, x_n)$, si $\alpha_1 \neq \alpha$,

(iii) $\pi_x(w) = (xx_1, \ldots, x_n)$, si $\alpha_1 = \alpha$ y $x_1 \neq x^{-1}$,

(iv) $\pi_x(w) = (x_2, \ldots, x_n)$, si $\alpha_1 = \alpha$ y $x_1 = x^{-1}$.

Si $x = 1_\alpha$, definimos π_x como la aplicación identidad de W.

Observemos que los valores de π_x son en cada caso una palabra reducida, esto es, un elemento de W. En los casos (i) y (ii), la acción de π_x incrementa la longitud de la palabra; en el caso (iii) la longitud no se modifica, mientras que en el caso (iv) se reduce la longitud de la palabra. Cuando se aplica el caso (iv) a una palabra w de longitud uno, entonces w se aplica en la palabra vacía.

Paso 2. Vamos a probar que si $x, y \in G_\alpha$ y $z = xy$ entonces $\pi_z = \pi_x \circ \pi_y$.

El resultado es trivial si x ó y es igual a 1_α, ya que, en este caso, π_x ó π_y es la aplicación identidad. Por tanto, podemos suponer que $x \neq 1_\alpha$ e $y \neq 1_\alpha$. Vamos a calcular los valores de π_z y de $\pi_x \circ \pi_y$ sobre una palabra reducida w. Debemos considerar cuatro casos.

(i) Supongamos que w es la palabra vacía. Tenemos $\pi_y(\varnothing) = (y)$. Si $z = 1_\alpha$ entonces $y = x^{-1}$ y $\pi_x\pi_y(\varnothing) = \varnothing$ por (iv), mientras que $\pi_z(\varnothing) = \varnothing$ al ser π_z la aplicación identidad. Si $z \neq 1_\alpha$ entonces

$$\pi_x\pi_y(\varnothing) = (xy) = (z) = \pi_z(\varnothing).$$

En los restantes casos, supondremos que $w = (x_1, \ldots, x_n)$ con $x_1 \in G_{\alpha_1}$.

(ii) Supongamos que $\alpha \neq \alpha_1$. Entonces $\pi_y(w) = (y, x_1, \ldots, x_n)$. Si $z = 1_\alpha$ entonces $y = x^{-1}$ y $\pi_x\pi_y(w) = (x_1, \ldots, x_n)$ por (iv), mientras que $\pi_z(w)$ vale lo

mismo al ser π_z la aplicación identidad. Si $z \neq 1_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}\pi_x\pi_y(w) &= (xy, x_1, \ldots, x_n)\\ &= (z, x_1, \ldots, x_n) = \pi_z(w).\end{aligned}$$

(iii) Supongamos que $\alpha = \alpha_1$ e $yx_1 \neq 1_\alpha$. Entonces $\pi_y(w) = (yx_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si $xyx_1 = 1_\alpha$ entonces $\pi_x\pi_y(w) = (x_2, \ldots, x_n)$, mientras que $\pi_z(w)$ vale lo mismo porque $zx_1 = xyx_1 = 1_\alpha$. Si $xyx_1 \neq 1_\alpha$ entonces

$$\begin{aligned}\pi_x\pi_y(w) &= (xyx_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= (zx_1, x_2, \ldots, x_n) = \pi_z(w).\end{aligned}$$

(iv) Finalmente, supongamos que $\alpha = \alpha_1$ e $yx_1 = 1_\alpha$. Entonces $\pi_y(w) = (x_2, \ldots, x_n)$, que es vacío si $n = 1$. Un cálculo directo prueba

$$\begin{aligned}\pi_x\pi_y(w) &= (x, x_2, \ldots, x_n)\\ &= (x(yx_1), x_2, \ldots, x_n)\\ &= (zx_1, x_2, \ldots, x_n) = \pi_z(w).\end{aligned}$$

Paso 3. La aplicación π_x es un elemento de $P(W)$ y la aplicación $i_\alpha : G_\alpha \to P(W)$ definida por $i_\alpha(x) = \pi_x$ es un monomorfismo.

Para probar que π_x es biyectiva, observemos que si $y = x^{-1}$ entonces las condiciones (1) y (2) implican que $\pi_x \circ \pi_y = \pi_y \circ \pi_x$ que coinciden con la aplicación identidad de W. Por tanto, π_x pertenece a $P(W)$. El hecho de que i_α sea un homomorfismo es una consecuencia de la condición (2). Para probar que i_α es un monomorfismo basta observar que si $x \neq 1_\alpha$ entonces $\pi_x(\varnothing) = (x)$, de modo que π_x no es la aplicación identidad de W.

Paso 4. Sea G el subgrupo de $P(W)$ generado por los grupos $G'_\alpha = i_\alpha(G_\alpha)$. Vamos a probar que G es el producto libre de los grupos G'_α.

En primer lugar demostraremos que $G'_\alpha \cap G'_\beta$ consiste únicamente en el elemento neutro cuando $\alpha \neq \beta$. Sean $x \in G_\alpha$ e $y \in G_\beta$; supongamos que ni π_x ni π_y son la aplicación identidad de W y probemos que $\pi_x \neq \pi_y$. Pero esto es muy fácil, ya que $\pi_x(\varnothing) = (x)$ y $\pi_y(\varnothing) = (y)$, y éstas son palabras diferentes.

En segundo lugar, probaremos que no existe una palabra reducida no vacía

$$w' = (\pi_{x_1}, \ldots, \pi_{x_n})$$

en los grupos G'_α que represente al elemento neutro de G. Sea α_i el índice tal que $x_i \in G_{\alpha_i}$; entonces $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ y $x_i \neq 1_{\alpha_i}$ para todo i. Un cálculo directo prueba que

$$\pi_{x_1}(\pi_{x_2}(\cdots(\pi_{x_n}(\varnothing)))) = (x_1, \ldots, x_n)$$

de modo que el elemento de G representado por w' no es el elemento neutro de $P(W)$. ■

A pesar de que esta demostración de la existencia de productos libres es ciertamente correcta, posee la desventaja de que no nos proporciona un método adecuado para trabajar con los elementos del producto libre. En muchos casos esto no supone ningún problema, ya que la condición de extensión es la propiedad crucial que se utiliza en las aplicaciones. Sin embargo, nos sentiríamos más cómodos si dispusiéramos de un modelo concreto para el producto libre.

Para la suma directa externa sí disponíamos de un modelo. La suma directa externa de los grupos abelianos G_α consistía en los elementos (x_α) del producto cartesiano $\prod G_\alpha$ tales que $x_\alpha = 0_\alpha$ para todos los índices α excepto para una cantidad finita. Y cada grupo G_β era isomorfo al subgrupo G'_β formado por los elementos (x_α) tales que $x_\alpha = 0_\alpha$ para todo $\alpha \neq \beta$.

¿Existe un modelo simple análogo para el producto libre? Sí. En el último paso de la demostración previa hemos probado que si $(\pi_{x_1}, \ldots, \pi_{x_n})$ es una palabra reducida en los grupos G'_α entonces

$$\pi_{x_1}(\pi_{x_2}(\cdots(\pi_{x_n}(\varnothing)))) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Esta ecuación implica que si π es cualquier elemento de $P(W)$ perteneciente al producto libre G, entonces la asignación $\pi \to \pi(\varnothing)$ define una correspondencia biyectiva entre G y el conjunto W. Por tanto, si π y π' son dos elementos de G tales que

$$\pi(\varnothing) = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{y} \qquad \pi'(\varnothing) = (y_1, \ldots, y_k)$$

entonces $\pi(\pi'(\varnothing))$ es la palabra obtenida al reducir $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$.

Esto nos proporciona una idea para imaginar los elementos del grupo G. Podemos imaginar G simplemente como el propio conjunto W, definiendo el producto de palabras como la yuxtaposición de ellas y la reducción posterior de la palabra resultante. El elemento neutro se corresponde con la palabra vacía. Y cada grupo G_β se corresponde con el subconjunto de W formado por el conjunto vacío y todas las palabras de longitud 1 de la forma (x), para $x \in G_\beta$ y $x \neq 1_\beta$.

Surge una pregunta inmediata: ¿por qué no utilizamos esta noción como la *definición* del producto libre? Ciertamente parece mucho más simple que la opción de tratar con el conjunto $P(W)$ de las permutaciones de W. La respuesta es la siguiente: la verificación de los axiomas de grupo es muy difícil si utilizamos esta definición; en particular, la demostración de la asociatividad es horrenda. Por comparación, la demostración precedente de la existencia de productos libres es un modelo de simplicidad y elegancia.

La condición de extensión para productos libres ordinarios se traslada inmediatamente a una condición de extensión para productos libres externos.

Lema 68.3. *Sean $\{G_\alpha\}$ una familia de grupos, G un grupo e $i_\alpha : G_\alpha \to G$ una familia de homomorfismos. Si cada i_α es un monomorfismo y G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$, entonces G satisface la siguiente condición:*

(∗) *Dado cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \to H$, existe un homomorfismo $h : G \to H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ para todo α.*

Además, h es único.

Una inmediata consecuencia es el teorema de unicidad para productos libres; la demostración es muy similar a la correspondiente demostración para sumas directas, por lo que se deja al lector.

Teorema 68.4 (Unicidad de productos libres). *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de grupos. Supongamos que G y G' son grupos e $i_\alpha : G_\alpha \to G$ e $i'_\alpha : G_\alpha \to G'$ son familias de monomorfismos tales que las familias $\{i_\alpha(G_\alpha)\}$ e $\{i'_\alpha(G_\alpha)\}$ generan G y G', respectivamente. Si tanto G como G' satisfacen la propiedad de extensión enunciada en el lema previo, entonces existe un único isomorfismo $\phi : G \to G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ para todo α.*

Ahora, finalmente, vamos a probar que la condición de extensión caracteriza a los productos libres, demostrando los recíprocos de los Lemas 68.1 y 68.3.

Lema 68.5. *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de grupos, G un grupo e $i_\alpha : G_\alpha \to G$ una familia de homomorfismos. Si se satisface la condición de extensión del Lema 68.3, entonces cada i_α es un monomorfismo y G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$.*

Demostración. Probaremos en primer lugar que cada i_α es un monomorfismo. Dado un índice β, escribamos $H = G_\beta$. Sea $h_\alpha : G_\alpha \to H$ la identidad si $\alpha = \beta$, y el homomorfismo trivial en caso contrario. Sea $h : G \to H$ el homomorfismo dado por la condición de extensión. Entonces $h \circ i_\beta = h_\beta$, de modo que i_β es inyectivo.

Por el Teorema 68.2, existe un grupo G' y una familia $i'_\alpha : G_\alpha \to G'$ de monomorfismos tal que G' es el producto libre de los grupos $i'_\alpha(G_\alpha)$. Ambos grupos G y G' tienen la propiedad de extensión del Lema 68.3. El teorema precedente implica entonces que existe un isomorfismo $\phi : G \to G'$ tal que $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$. Se sigue entonces que G es el producto libre de los grupos $i_\alpha(G_\alpha)$. ∎

Ahora vamos a demostrar dos resultados análogos a los Corolarios 67.2 y 67.3.

Corolario 68.6. *Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 es el producto libre de los subgrupos $\{H_\alpha\}_{\alpha\in J}$ y G_2 es el producto libre de los subgrupos $\{H_\beta\}_{\beta\in K}$. Si los conjuntos de índices J y K son disjuntos, entonces G es el producto libre de los subgrupos $\{H_\gamma\}_{\gamma\in J\cup K}$.*

Demostración. La demostración es casi una copia de la demostración del Corolario 67.2. ■

Este resultado implica en particular que

$$G_1 * G_2 * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3.$$

Con objeto de demostrar el siguiente teorema, recordamos alguna terminología de la teoría de grupos. Si x e y son elementos de un grupo G, se dice que y es ***conjugado*** de x si $y = cxc^{-1}$ para algún $c \in G$. Un subgrupo *normal* de G es aquél que contiene a todos los conjugados de sus elementos.

Si S es un subconjunto de G, podemos considerar la intersección N de todos los subgrupos normales de G que contienen a S. Es fácil probar que N es también un subgrupo normal de G; se denomina ***menor subgrupo normal*** de G que contiene a S.

Teorema 68.7. *Sea $G = G_1 * G_2$ y N_i un subgrupo normal de G_i, para $i = 1, 2$. Si N es el menor subgrupo normal de G que contiene a N_1 y N_2 entonces*

$$G/N \cong (G_1/N_1) * (G_2/N_2).$$

Demostración. La composición de los homomorfismos inclusión y proyección

$$G_1 \to G_1 * G_2 \to (G_1 * G_2)/N$$

aplica N_1 en el elemento neutro, de modo que induce un homomorfismo

$$i_1 : G_1/N_1 \to (G_1 * G_2)/N.$$

De modo similar, la composición de los homomorfismos inclusión y proyección induce un homomorfismo

$$i_2 : G_2/N_2 \to (G_1 * G_2)/N.$$

Probaremos que la condición de extensión del Lema 68.5 se satisface con respecto a i_1 e i_2; se deduce entonces que i_1 e i_2 son monomorfismos y que $(G_1 * G_2)/N$ es el producto libre externo de G_1/N_1 y G_2/N_2 relativo a estos monomorfismos.

Por tanto, sean $h_1 : G_1/N_1 \to H$ y $h_2 : G_2/N_2 \to H$ homomorfismos arbitrarios. La condición de extensión para $G_1 * G_2$ implica que existe un homomorfismo de $G_1 * G_2$ en H que coincide con la composición

$$G_i \to G_i/N_i \to H$$

de la aplicación proyección y h_i sobre G_i, para $i = 1, 2$. Este homomorfismo aplica los elementos de N_1 y N_2 en el elemento neutro, de modo que su núcleo contiene a N. Por tanto induce un homomorfismo $h : (G_1 * G_2)/N \to H$ que satisface las condiciones $h_1 = h \circ i_1$ y $h_2 = h \circ i_2$. ■

Corolario 68.8. *Si N es el menor subgrupo normal de $G_1 * G_2$ que contiene a G_1, entonces $(G_1 * G_2)/N \cong G_2$.*

La noción de "menor subgrupo normal" es un concepto que aparecerá frecuentemente. Obviamente, si N es el menor subgrupo normal de G que contiene al subconjunto S de G, entonces N contiene a S y todos los conjugados de los elementos de S. Para uso posterior, vamos a comprobar que estos elementos *generan* de hecho el subgrupo N.

Lema 68.9. *Sea S un subconjunto del grupo G. Si N es el menor subgrupo normal de G que contiene a S, entonces N está generado por todos los conjugados de los elementos de S.*

Demostración. Sea N' el subgrupo de G generado por todos los conjugados de los elementos de S. Sabemos que $N' \subset N$; para comprobar la inclusión recíproca, sólo necesitamos probar que N' es normal en G. Dados $x \in N'$ y $c \in G$, vamos a probar que $cxc^{-1} \in N'$.

Podemos escribir x de la forma $x = x_1x_2 \cdots x_n$, donde cada x_i es el conjugado de un elemento s_i de S. Entonces cx_ic^{-1} es también conjugado de s_i. Como

$$cxc^{-1} = (cx_1c^{-1})(cx_2c^{-1}) \cdots (cx_nc^{-1})$$

entonces cxc^{-1} es un producto de conjugados de elementos de S, de modo que $cxc^{-1} \in N'$, como deseábamos. ■

Ejercicios

1. Compruebe los detalles del Ejemplo 1.
2. Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 y G_2 son grupos no triviales.
   (a) Pruebe que G no es abeliano.
   (b) Si $x \in G$, definimos la *longitud* de x como la longitud de la única palabra reducida en los elementos de G_1 y G_2 que representa x. Pruebe que si x tiene longitud par (al menos 2), entonces x no tiene orden finito. Pruebe que si x tiene longitud impar, entonces x es el conjugado de un elemento de longitud menor.
   (c) Pruebe que los únicos elementos de G que tienen orden finito son los elementos de G_1 y G_2 que tienen orden finito, y sus conjugados.
3. Sea $G = G_1 * G_2$. Dado $c \in G$, sea cG_1c^{-1} el conjunto de todos los elementos de la forma cxc^{-1}, donde $x \in G_1$, que es un subgrupo de G. Pruebe que su intersección con G_2 es igual al elemento neutro.
4. Demuestre el Teorema 68.4.

§69 Grupos libres

Sea G un grupo y $\{a_\alpha\}$ una familia de elementos de G, con $\alpha \in J$. Diremos que los elementos $\{a_\alpha\}$ ***generan*** G si todo elemento de G puede escribirse como un producto de potencias de los elementos a_α. Si la familia $\{a_\alpha\}$ es finita, diremos que G está ***finitamente generado***.

Definición. Sea $\{a_\alpha\}$ una familia de elementos de un grupo G. Supongamos que cada a_α genera un subgrupo cíclico infinito G_α de G. Si G es el producto libre de los grupos $\{G_\alpha\}$ entonces diremos que G es un ***grupo libre***, y la familia $\{a_\alpha\}$ se dice que es un ***sistema de generadores libres*** para G.

En este caso, para cada elemento x de G, existe una única palabra reducida en los elementos de los grupos G_α que representa x. Esto significa que si $x \neq 1$ entonces x puede escribirse de forma única como

$$x = (a_{\alpha_1})^{n_1}(a_{\alpha_2})^{n_2} \cdots (a_{\alpha_k})^{n_k}$$

donde $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ y $n_i \neq 0$ para todo i (desde luego, n_i puede ser negativo).

Los grupos libres están caracterizados por la siguiente propiedad de extensión:

Lema 69.1. *Sea G un grupo y $\{a_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de elementos de G. Si G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}$, entonces G satisface la siguiente condición:*

(∗) *Dado cualquier grupo H y cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de H, existe un homomorfismo $h : G \to H$ tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para todo α.*

Además, h es único. Recíprocamente, si la condición de extensión (∗) se satisface, entonces G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}$.

Demostración. Si G es libre, entonces para cada α, el grupo G_α generado por a_α es cíclico infinito, de modo que existe un homomorfismo $h_\alpha : G_\alpha \to H$ que verifica $h_\alpha(a_\alpha) = y_\alpha$. Entonces el Lema 68.1 se puede aplicar. Para probar el recíproco, sea β un índice fijo. Por hipótesis, existe un homomorfismo $h : G \to \mathbb{Z}$ tal que $h(a_\beta) = 1$ y $h(a_\alpha) = 0$ para $\alpha \neq \beta$. Se deduce que el grupo G_β es cíclico infinito. Entonces se aplica el Lema 68.5. ■

Los resultados de la sección precedente (en particular, el Corolario 68.6) implican el siguiente resultado.

Teorema 69.2. *Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 y G_2 son grupos libres con $\{a_\alpha\}_{\alpha\in J}$ y $\{a_\alpha\}_{\alpha\in K}$ como sistemas de generadores libres, respectivamente. Si J y K son disjuntos entonces G es un grupo libre con sistema de generadores libres $\{a_\alpha\}_{\alpha\in J\cup K}$.*

Definición. Sea $\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia arbitraria indexada. Sea G_α el conjunto de todos los símbolos de la forma a_α^n con $n \in \mathbb{Z}$. Convirtamos G_α en grupo con la operación

$$a_\alpha^n \cdot a_\alpha^m = a_\alpha^{n+m}.$$

Entonces a_α^0 es el elemento neutro de G_α y a_α^{-n} es el inverso de a_α^n. Denotaremos a_α^1 simplemente por a_α. El producto libre externo de los grupos $\{G_\alpha\}$ se denomina ***grupo libre generado por los elementos*** a_α.

Si G es un grupo libre por los elementos a_α, habitualmente haremos un abuso de notación e identificaremos los elementos del grupo G_α con sus imágenes bajo el monomorfismo $i_\alpha : G_\alpha \to G$ que aparece en la construcción del producto libre externo. Entonces cada a_α se trata como un elemento de G y la familia $\{a_\alpha\}$ constituye un sistema de generadores libres de G.

Existe una conexión importante entre los grupos libres y los grupos libres abelianos. Para describirla, debemos recordar la noción algebraica de subgrupo conmutador.

Definición. Sea G un grupo. Si $x, y \in G$, denotamos por $[x, y]$ el elemento

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

de G que se denomina ***conmutador*** de x e y. El subgrupo de G generado por el conjunto de todos los conmutadores en G se denomina ***subgrupo conmutador*** de G y se denota por $[G, G]$.

El siguiente resultado puede resultar familiar aunque, por completitud, vamos a proporcionar una demostración.

Lema 69.3. *Dado G, el subgrupo $[G, G]$ es un subgrupo normal de G y el grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano. Si $h : G \to H$ es un homomorfismo de G en un grupo abeliano H, entonces el núcleo de h contiene a $[G, G]$, de modo que h induce un homomorfismo $k : G/[G, G] \to H$.*

Demostración. *Paso 1.* Primero vamos a probar que cualquier conjugado de un conmutador está en $[G, G]$. Todo es consecuencia de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} g[x,y]g^{-1} &= g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} \\ &= (gxyx^{-1})(1)(y^{-1}g^{-1}) \\ &= (gxyx^{-1})(g^{-1}y^{-1}yg)(y^{-1}g^{-1}) \\ &= ((gx)y(gx)^{-1}y^{-1})(ygy^{-1}g^{-1}) \\ &= [gx, y] \cdot [y, g] \end{aligned}$$

que pertenece a $[G,G]$, como deseábamos.

Paso 2. Probaremos que $[G,G]$ es un subgrupo normal de G. Sea z un elemento arbitrario de $[G,G]$; vamos a ver que cualquier conjugado gzg^{-1} de z está también en $[G,G]$. El elemento z es un producto de conmutadores y de sus inversos. Como

$$[x,y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = [y,x],$$

z es en realidad el producto de conmutadores. Sea $z = z_1 \cdots z_n$, donde cada z_i es un conmutador. Entonces

$$gzg^{-1} = (gz_1g^{-1})(gz_2g^{-1}) \cdots (gz_ng^{-1})$$

es un producto de elementos de $[G,G]$ por el Paso 1 y, por tanto, pertenece a $[G,G]$.

Paso 3. Probaremos que $G/[G,G]$ es un grupo abeliano. Si $G' = [G,G]$ deseamos probar que

$$(aG')(bG') = (bG')(aG'),$$

esto es, $abG' = baG'$. Esto es equivalente a la ecuación

$$a^{-1}b^{-1}abG' = G'$$

y esta ecuación se sigue del hecho que $a^{-1}b^{-1}ab = [a^{-1},b^{-1}]$, que es un elemento de G'.

Paso 4. Para completar la demostración, observemos que como H es abeliano, h aplica cada conmutador en el elemento neutro de H. Por tanto, el núcleo de h contiene a $[G,G]$, de modo que h induce el homomorfismo k. ■

Teorema 69.4. *Si G es un grupo libre con generadores libres a_α, entonces $G/[G,G]$ es un grupo abeliano libre con base $[a_\alpha]$, donde $[a_\alpha]$ denota la clase de a_α en $G/[G,G]$.*

Demostración. Aplicaremos el Lema 67.7. Dada cualquier familia $\{y_\alpha\}$ de elementos de un grupo abeliano H, existe un homomorfismo $h: G \to H$ tal que $h(a_\alpha) = y_\alpha$ para cada α. Como H es abeliano, el núcleo de h contiene a $[G,G]$ por lo que h induce un homomorfismo $k: G/[G,G] \to H$ que aplica $[a_\alpha]$ en y_α. ■

Corolario 69.5. *Si G es un grupo libre con n generadores libres, entonces cualquier sistema de generadores libres para G tiene n elementos.*

Demostración. El grupo abeliano libre $G/[G,G]$ tiene rango n. ■

Las propiedades de los grupos libres son, en muchos casos, similares a las de los grupos abelianos libres. Por ejemplo, si H es un subgrupo de un grupo abeliano libre

G, entonces H es también un grupo abeliano libre. La demostración en el caso en que G tiene rango finito se indica en el Ejercicio 6 de §67; la demostración en el caso general es similar. El resultado análogo se satisface para grupos libres, pero la demostración es considerablemente más difícil. Proporcionaremos una demostración en el Capítulo 14 basada en la teoría de los espacios recubridores.

Por otra parte, los grupos libres son muy diferentes de los grupos abelianos libres. Dado un grupo abeliano libre de rango n, el rango de cualquier subgrupo es a lo sumo n; pero el resultado análogo para grupos libres no se satisface. Si G es un grupo libre con un sistema de n generadores libres, entonces el cardinal de un sistema de generadores libres para un subgrupo de G puede ser mayor que n; incluso puede ser infinito. Analizaremos esta situación más adelante.

Generadores y relaciones

Un problema básico en la teoría de grupos es determinar si dos grupos dados son isomorfos o no. El problema está resuelto para grupos abelianos; dos grupos abelianos son isomorfos si, y sólo si, tienen bases con el mismo cardinal. De modo similar, dos grupos libres son isomorfos si, y sólo si, sus sistemas de generadores libres tienen el mismo cardinal. Hemos probado estos resultados en el caso de cardinal finito.

Para grupos arbitrarios, sin embargo, la respuesta no es tan simple. Únicamente en el caso de un grupo abeliano finitamente generado la respuesta está clara.

Si G es abeliano y finitamente generado, entonces existe un teorema fundamental que garantiza la descomposición $G = H \oplus T$, donde H es libre abeliano de rango finito y T es el subgrupo de G formado por todos los elementos de orden finito. Decimos que T es el ***subgrupo de torsión*** de G. El rango de H está unívocamente determinado por G, ya que coincide con el rango del cociente de G por su subgrupo de torsión. Este número es a menudo denominado ***número de Betti*** de G. Además, el subgrupo T es también una suma directa; es la suma directa de un número finito de grupos cíclicos finitos cuyos órdenes son potencias de números primos. Los órdenes de estos grupos están unívocamente determinados por T (y, por tanto, por G), y se denominan ***divisores elementales*** de G. Así la clase de isomorfía de G está completamente determinada al especificar el número de betti y los divisores elementales.

Si G no es abeliano, los problemas que surgen están lejos de estar completamente resueltos, incluso si G es finitamente generado. ¿Qué propiedades estarán determinadas por G? Lo máximo que podemos hacer es lo siguiente.

Dado G, supongamos que tenemos una familia $\{a_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de generadores de G. Sea F el grupo libre sobre los elementos $\{a_\alpha\}$. Entonces la aplicación $h(a_\alpha) = a_\alpha$ de estos elementos en G se extiende a un homomorfismo $h : F \to G$ que es sobreyectivo. Si N es igual al núcleo de h, entonces $F/N \cong G$. De modo que un método de especificar G consiste en proporcionar una familia $\{a_\alpha\}$ de generadores de G y una

manera de especificar N. Cada elemento de N se dice que es una ***relación*** sobre F, y N se denomina ***subgrupo de relaciones***. Podemos especificar N proporcionando un conjunto de generadores para N. Pero como N es normal en F, también podemos especificar N mediante un conjunto menor. Concretamente, podemos especificar N mediante una familia $\{r_\beta\}$ de elementos de F tal que dichos elementos *y sus conjugados* generan N, esto es, tal que N es el menor subgrupo normal de F que contiene a los elementos r_β. En este caso, se dice que la familia $\{r_\beta\}$ es un ***conjunto completo de relaciones*** para G.

Cada elemento de N pertenece a F, de modo que puede representarse de forma única mediante una palabra reducida en potencias de los generadores $\{a_\alpha\}$. Cuando hablamos de una *relación* sobre los generadores de G habitualmente nos referimos a esta palabra reducida, en lugar de al elemento de N que representa. El contexto aclarará el significado.

Definición. Si G es un grupo, una ***presentación*** de G consiste en una familia $\{a_\alpha\}$ de generadores para G junto con un conjunto completo $\{r_\beta\}$ de relaciones para G, donde cada r_β es un elemento del grupo libre sobre el conjunto $\{a_\alpha\}$. Si la familia $\{a_\alpha\}$ es finita, entonces G está finitamente generado, desde luego. Si ambas familias $\{a_\alpha\}$ y $\{r_\beta\}$ son finitas, entonces G se dice que está ***finitamente presentado*** y dichas familias constituyen una ***presentación finita*** para G.

Este procedimiento para especificar G está lejos de ser satisfactorio. Una presentación para G determina unívocamente G, salvo isomorfismos; pero dos presentaciones completamente diferentes pueden producir grupos isomorfos. Además, incluso en el caso finito no existe un medio efectivo para determinar si dos presentaciones diferentes proporcionarán grupos isomorfos o no isomorfos. Este resultado se conoce como la "irresolubilidad del problema del isomorfismo" para grupos.

A pesar de lo insatisfactorio del resultado, esto es lo máximo que podemos hacer.

Ejercicios

1. Si $G = G_1 * G_2$, pruebe que

$$G/[G,G] \cong (G_1/[G_1,G_1]) \oplus (G_2/[G_2,G_2]).$$

[*Indicación:* use la condición de extensión para sumas directas y productos libres para definir los homomorfismos

$$G/[G,G] \rightleftarrows (G_1/[G_1,G_1]) \oplus (G_2/[G_2,G_2])$$

que son el inverso uno del otro.]

2. Generalice el resultado del Ejercicio 1 a productos libres arbitrarios.

3. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. *Sea $G = G_1 * G_2$, donde G_1 y G_2 son cíclicos de órdenes m y n, respectivamente. Entonces m y n están unívocamente determinados por G.*
Demostración.
(a) Pruebe que $G/[G,G]$ tiene orden mn.
(b) Determine el mayor entero k tal que G tiene un elemento de orden k (véase el Ejercicio 2 de §68).
(c) Pruebe el teorema.

4. Pruebe que si $G = G_1 \oplus G_2$, donde G_1 y G_2 son cíclicos de órdenes m y n, respectivamente, entonces m y n no están unívocamente determinados por G en general. [*Indicación:* si m y n son coprimos, pruebe que G es cíclico de orden mn.]

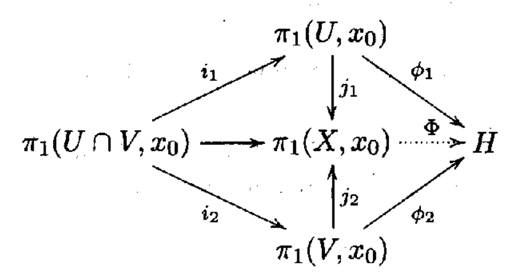
§70 El teorema de Seifert-van Kampen

Volvemos ahora al problema de determinar el grupo fundamental de un espacio X que puede escribirse como la unión de dos subconjuntos abiertos U y V que tienen intersección conexa por caminos. Hemos probado en §59 que si $x_0 \in U \cap V$, las imágenes de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$, bajo los homomorfismos inducidos por la inclusión, generan el último grupo. En esta sección probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ está, de hecho, completamente determinado por estos dos subgrupos, el grupo $\pi_1(U \cap V, x_0)$ y los homomorfismos entre estos subgrupos inducidos por la inclusión. Éste es un resultado básico acerca de grupos fundamentales. Nos permitirá calcular los grupos fundamentales de numerosos espacios, incluyendo las variedades compactas de dimensión dos.

Teorema 70.1 (Teorema de Seifert-van Kampen). *Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X; supongamos que U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos; sea $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo y sean*

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H \qquad y \qquad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$$

homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducido por la inclusión.



Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces existe un único homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \to H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Este teorema afirma que si ϕ_1 y ϕ_2 son homomorfismos arbitrarios que son "compatibles sobre $U \cap V$", entonces inducen un homomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ en H.

Demostración. La unicidad es fácil. El Teorema 59.1 afirma que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2. El valor de Φ sobre el generador $j_1(g_1)$ debe ser igual a $\phi_1(g_1)$, y su valor sobre $j_2(g_2)$ debe coincidir con $\phi_2(g_2)$. Entonces Φ está completamente determinado por ϕ_1 y ϕ_2. La demostración de que Φ existe es un caso aparte.

Por comodidad introduciremos la siguiente notación: dado un camino f en X, escribiremos $[f]$ para denotar su clase de homotopía de caminos en X. Si f está en U, entonces $[f]_U$ denotará su clase de homotopía de caminos en U. Las notaciones $[f]_V$ y $[f]_{U\cap V}$ se definen de modo similar.

Paso 1. Comenzamos definiendo una aplicación ρ que asigna a cada *lazo* f basado en x_0, contenido en U o en V, un elemento de H. Definimos

$$\rho(f) = \phi_1([f]_U) \text{ si } f \text{ está en } U,$$
$$\rho(f) = \phi_2([f]_V) \text{ si } f \text{ está en } V.$$

Entonces ρ está bien definida, ya que si f está en la intersección de U y V, entonces

$$\phi_1([f]_U) = \phi_1 i_1([f]_{U\cap V}) \qquad \text{y} \qquad \phi_2([f]_V) = \phi_2 i_2([f]_{U\cap V}),$$

y estos dos elementos de H son iguales por hipótesis. La aplicación ρ satisface las siguientes condiciones:

(1) Si $[f]_U = [g]_U$, o si $[f]_V = [g]_V$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.

(2) Si f y g están en U, o si ambas están en V, entonces $\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$.

La primera afirmación se satisface por definición, y la segunda porque tanto ϕ_1 como ϕ_2 son homomorfismos.

Paso 2. Ahora vamos a extender ρ a una aplicación σ que asigna a cada *camino* f contenido en U o en V, un elemento de H, tal que la aplicación σ satisface la condición (1) del Paso 1, y satisface la condición (2) cuando $f * g$ está definido.

Para comenzar elegimos, para cada x en X, un camino α_x desde x_0 hasta x como sigue: si $x = x_0$, sea α_x el camino constante en x_0. Si $x \in U \cap V$, sea α_x un camino en $U \cap V$. Y si x está en U o en V pero no en $U \cap V$, sea α_x un camino en U o en V, respectivamente.

Entonces para cualquier camino f en U o en V, definimos un *lazo* $L(f)$ en U o en V, respectivamente, basado en x_0 por la ecuación

$$L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)$$

donde x es el punto inicial de f e y es el punto final de f (véase la Figura 70.1). Finalmente, definimos

$$\sigma(f) = \rho(L(f)).$$

Probemos que σ es una extensión de ρ. Si f es un *lazo* basado en x_0 que está en U o en V, entonces

$$L(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0})$$

ya que α_{x_0} es el camino constante en x_0. Entonces $L(f)$ es homotópica por caminos a f en U o en V, de modo que $\rho(L(f)) = \rho(f)$ por la condición (1) para ρ. Por tanto, $\sigma(f) = \rho(f)$.

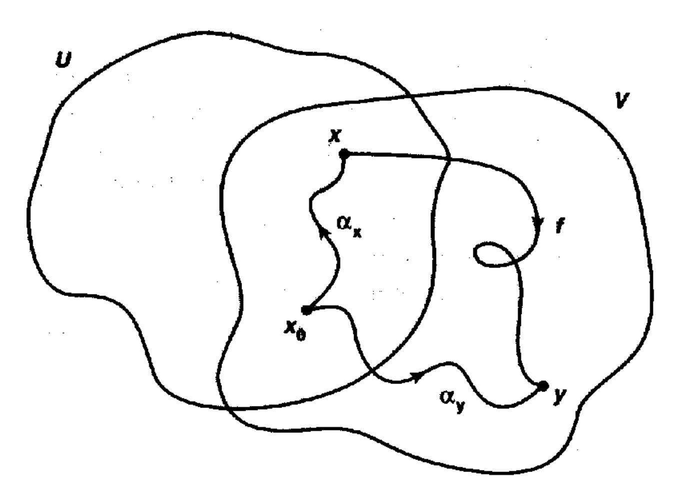


Figura 70.1

Para comprobar la condición (1), sean f y g caminos homotópicos en U o en V. Entonces los lazos $L(f)$ y $L(g)$ son también homotópicos por caminos en U o en V, de modo que la condición (1) para ρ se aplica. Para comprobar (2), sean f y g caminos arbitrarios en U o en V tales que $f(1) = g(0)$. Tenemos

$$L(f) * L(g) = (\alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)) * (\alpha_y * (g * \bar{\alpha}_z))$$

para puntos adecuados x, y, z; este lazo es homotópico por caminos en U o en V a $L(f * g)$, por lo que

$$\rho(L(f * g)) = \rho(L(f) * L(g)) = \rho(L(f)) \cdot \rho(L(g))$$

por las condiciones (1) y (2) para ρ. Por tanto, $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$.

Paso 3. Finalmente, extendemos la aplicación σ a una aplicación τ que lleva un camino *arbitrario* f a un elemento de H. Dicha aplicación satisfará las siguientes condiciones:

(1) Si $[f] = [g]$ entonces $\tau(f) = \tau(g)$.

(2) $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$, si $f * g$ está definido.

Dado f, escogemos una partición $s_0 < \cdots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que f aplica cada uno de los subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ en U o en V. Denotemos por f_i la aplicación lineal positiva del intervalo $[0, 1]$ en el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f. Entonces f_i es un camino en U o en V, y

$$[f] = [f_1] * \cdots * [f_n].$$

Si τ debe ser una extensión de σ satisfaciendo (1) y (2), debe verificarse

$$(*) \qquad \tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

De modo que utilizaremos esta ecuación como definición de τ.

Probaremos que esta definición es independiente de la elección del subintervalo. Será suficiente con probar que el valor de $\tau(f)$ permanece invariable si añadimos un único punto p a la partición. Sea i el índice tal que $s_{i-1} < p < s_i$. Si calculamos $\tau(f)$ utilizando esta nueva partición, el único cambio en la fórmula $(*)$ es que el factor $\sigma(f_i)$ desaparece y es reemplazado por el producto $\sigma(f_i') \cdot \sigma(f_i'')$, donde f_i' y f_i'' son las aplicaciones lineales positivas de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, p]$ y $[p, s_i]$, respectivamente, compuestas con f. Pero f_i es homotópica por caminos a $f_i' * f_i''$ en U o en V, de modo que $\sigma(f_i) = \sigma(f_i') \cdot \sigma(f_i'')$, por las condiciones (1) y (2) para σ. Por tanto, τ está bien definida.

Se deduce que τ es una extensión de σ. En efecto, si f está en U o en V, podemos utilizar la partición trivial de $[0, 1]$ para definir $\tau(f)$; entonces $\tau(f) = \sigma(f)$ por definición.

Paso 4. Probemos la condición (1) para la aplicación τ. Esta parte de la demostración requiere tomar precauciones.

En primer lugar verificaremos esta condición en un caso especial. Sean f y g caminos en X desde x hasta y, y sea F una homotopía de caminos entre ellos. Supongamos la hipótesis adicional que existe una partición $s_0 < \cdots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que F aplica cada rectángulo $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$ dentro de U o de V. Probaremos en este caso que $\tau(f) = \tau(g)$.

Dado i, consideremos la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f o con g y denominemos a estos dos caminos f_i y g_i, respectivamente. La restricción de F a cada rectángulo R_i nos proporciona una homotopía entre f_i y g_i que toma valores en U o en V pero que no es una homotopía de caminos, ya que los extremos de los caminos pueden cambiar durante la homotopía. Consideremos los caminos trazados por los extremos durante la homotopía. Definimos β_i como el camino $\beta_i(t) = F(s_i, t)$. Entonces β_i es un camino en X desde $f(s_i)$ hasta $g(s_i)$. Los caminos β_0 y β_n son los caminos constantes en x e y, respectivamente (véase la Figura 70.2). Probaremos que, para cada i,

$$f_i * \beta_i \simeq_p \beta_{i-1} * g_i$$

con la homotopía de caminos tomando valores en U o en V.

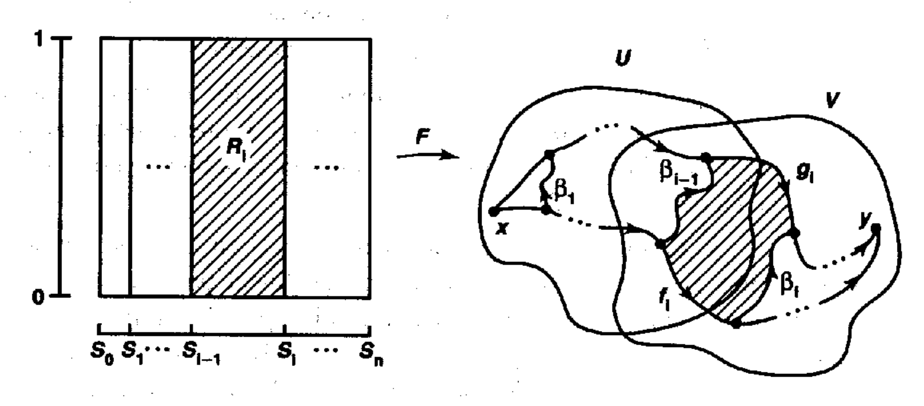


Figura 70.2

En el rectángulo R_i, consideremos el camino que recorre los lados inferior y derecho de R_i, desde $s_{i-1} \times 0$ hasta $s_i \times 0$ y hasta $s_i \times 1$; si componemos este camino con la aplicación F obtenemos el camino $f_i * \beta_i$. Análogamente, si consideramos el camino que recorre los lados izquierdo y superior de R_i y lo componemos con F obtenemos el camino $\beta_{i-1} * g_i$. Como R_i es convexo, existe una homotopía de caminos en R_i entre estos dos caminos; si componemos con F obtenemos una homotopía de caminos entre $f_i * \beta_i$ y $\beta_{i-1} * g_i$ que tiene lugar en U o en V, como deseábamos.

Se deduce de las condiciones (1) y (2) que

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i)$$

de modo que

$$(**) \qquad \sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1}.$$

De manera similar se deduce que puesto que β_0 y β_n son caminos constantes, $\sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_n) = 1$. De la igualdad $\beta_0 * \beta_0 = \beta_0$ se deduce $\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_0)$.

Ahora calculamos τ del siguiente modo:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

Sustituyendo $(**)$ en esta ecuación y simplificando, obtenemos la ecuación

$$\tau(f) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(g).$$

Por tanto hemos probado la condición (1) en un caso especial.

Ahora probaremos la condición (1) en el caso general. Dados f y g y una homotopía de caminos F entre ellos, consideremos subdivisiones $s_0, \ldots, s_n$ y $t_0, \ldots, t_m$ de $[0, 1]$ tales que F aplica cada rectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ en U o en V. Sea f_j

el camino $f_j(s) = F(s, t_j)$; entonces $f_0 = f$ y $f_m = g$. La pareja de caminos f_{j-1} y f_j satisfacen las condiciones de nuestro caso especial, de modo que $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$ para todo j. Se deduce entonces que $\tau(f) = \tau(g)$, como deseábamos.

Paso 5. Ahora probaremos la condición (2) para la aplicación τ. Dado un camino $f * g$ en X, escojamos una subdivisión $s_0 < \cdots < s_n$ de $[0, 1]$ que contenga al punto 1/2 como un punto de la subdivisión, tal que $f * g$ aplica cada subintervalo en U o en V. Sea k el índice tal que $s_k = 1/2$.

Para $i = 1, \ldots, k$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con la aplicación $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1}, 2s_i]$ compuesta con f; denotemos esta aplicación por f_i. De manera análoga, para cada $i = k + 1, \ldots, n$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$, compuesta también con $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1} - 1, 2s_i - 1]$ compuesta con g; denotemos esta aplicación por g_{i-k}. Usando la subdivisión $s_0, \ldots, s_n$ para el dominio del camino $f * g$ obtenemos

$$\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k) \cdot \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Usando la subdivisión $2s_0, \ldots, 2s_k$ para el camino f tenemos

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k).$$

Y utilizando la subdivisión $2s_k - 1, \ldots, 2s_n - 1$ para el camino g tenemos

$$\tau(g) = \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Por tanto, la condición (2) se satisface trivialmente.

Paso 6. El teorema se obtiene ahora aplicando los pasos anteriores. Para cada lazo f en X basado en x_0, definimos

$$\Phi([f]) = \tau(f).$$

Las condiciones (1) y (2) prueban que Φ es un homomorfismo bien definido.

Probemos que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$. Si f es un lazo en U, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(j_1([f]_U)) &= \Phi([f]) \\ &= \tau(f) \\ &= \rho(f) = \phi_1([f]_U) \end{aligned}$$

como deseábamos. De forma similar se demuestra $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. ∎

El teorema precedente es la formulación moderna del teorema de Seifert-van Kampen. Ahora retrocedemos a la versión clásica, que involucra el producto libre de dos grupos. Recordemos que si G es el producto libre $G = G_1 * G_2$, a menudo tratamos a G_1 y G_2 como subgrupos de G, para simplificar la notación.

Teorema 70.2 (Versión clásica del teorema de Seifert-van Kampen). *Supongamos las hipótesis del teorema precedente. Sea*

$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

el homomorfismo del producto libre que extiende los homomorfismos j_1 y j_2 inducidos por la inclusión. Entonces j es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal N del producto libre que contiene todos los elementos representados por palabras de la forma

$$(i_1(g)^{-1}, i_2(g))$$

para $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$.

En otras palabras, el núcleo de j está generado por todos los elementos del producto libre de la forma $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ y sus conjugados.

Demostración. Como $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2 entonces j es sobreyectiva.

Probemos que $N \subset \ker j$. Como $\ker j$ es normal, entonces es suficiente probar que $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ pertenece a $\ker j$ para todo $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Si $i : U \cap V \to X$ es la aplicación inclusión, entonces

$$ji_1(g) = j_1i_1(g) = i_*(g) = j_2i_2(g) = ji_2(g).$$

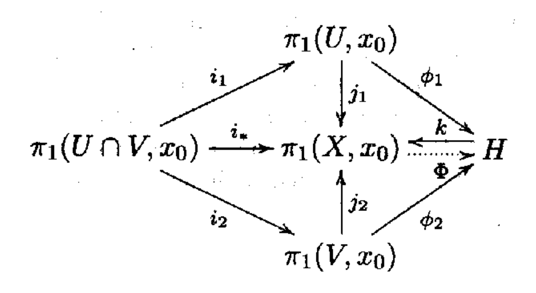
Entonces $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ pertenece al núcleo de j.

Se deducirá entonces que j induce un epimorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N \to \pi_1(X, x_0).$$

Probaremos que $N = \ker j$ demostrando que k es inyectivo. Para ello será suficiente con probar que k posee una inversa por la izquierda.

Sea H el grupo $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$. Definamos $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \to H$ igual a la inclusión de $\pi_1(U, x_0)$ en el producto libre compuesta con la proyección del producto libre en su cociente con N. Sea $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \to H$ la aplicación definida de modo análogo. Consideremos el diagrama



Es fácil ver que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$. Si $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, entonces $\phi_1(i_1(g))$ es la clase $i_1(g)N$ en H, y $\phi_2(i_2(g))$ es la clase $i_2(g)N$. Como $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in N$, las clases son iguales.

Se deduce del Teorema 70.1 que existe un homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \to H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. Probaremos que Φ es un inverso por la izquierda de k. Será suficiente con demostrar que $\Phi \circ k$ actúa como el elemento neutro sobre cualquier generador de H, esto es, sobre cualquier clase de la forma gN, donde $g \in \pi_1(U, x_0)$ o $\pi_1(V, x_0)$. Pero si $g \in \pi_1(U, x_0)$, tenemos

$$k(gN) = j(g) = j_1(g)$$

de modo que

$$\Phi(k(gN)) = \Phi(j_1(g)) = \phi_1(g) = gN$$

como deseábamos. Un razonamiento similar se aplica si $g \in \pi_1(V, x_0)$. ■

Corolario 70.3. *Supongamos las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, existe un isomorfismo*

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Corolario 70.4. *Supongamos las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen. Si V es simplemente conexo, existe un isomorfismo*

$$k : \pi_1(U, x_0)/N \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

donde N es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene la imagen del homomorfismo

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0).$$

EJEMPLO 1. Sea X un espacio theta. Entonces X es un espacio de Hausdorff igual a la unión de tres arcos A, B y C, cuya intersección dos a dos coincide con sus extremos p y q. Hemos probado con anterioridad que el grupo fundamental de X no es abeliano. Probaremos aquí que este grupo es de hecho un grupo libre sobre dos generadores.

Sea a un punto interior de A y b un punto interior de B. Escribamos X como la unión de los conjuntos abiertos $U = X - a$ y $V = X - b$ (véase la Figura 70.3). El espacio $U \cap V = X - a - b$ es simplemente conexo ya que es contractible. Además, los grupos fundamentales de U y V son cíclicos infinitos, ya que el tipo de homotopía de U coincide con el de $B \cup C$ y el de V es igual al de $A \cup C$. Por tanto, el grupo fundamental de X es el producto libre de dos grupos cíclicos infinitos, esto es, es el grupo libre sobre dos generadores.

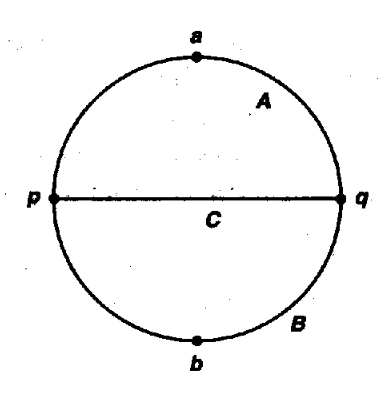


Figura 70.3

Ejercicios

En los siguientes ejercicios supondremos las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen.

1. Supongamos que el homomorfismo i_* inducido por la inclusión $i : U \cap V \to X$ es trivial.

(a) Demuestre que j_1 y j_2 inducen un epimorfismo

$$h : (\pi_1(U, x_0)/N_1) * (\pi_1(V, x_0)/N_2) \to \pi_1(X, x_0)$$

donde N_1 es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene a la imagen de i_1, y N_2 es el menor subgrupo normal de $\pi_1(V, x_0)$ que contiene a la imagen de i_2.

(b) Demuestre que h es un isomorfismo. [*Indicación:* utilice el Teorema 70.1 para definir un inverso por la izquierda de h.]

2. Suponga que i_2 es sobreyectiva.

(a) Demuestre que j_1 induce un epimorfismo

$$h : \pi_1(U, x_0)/M \to \pi_1(X, x_0)$$

donde M es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene $i_1(\ker i_2)$. [*Indicación:* demuestre que j_1 es sobreyectiva.]

(b) Pruebe que h es un isomorfismo. [*Indicación:* sea $H = \pi_1(U, x_0)/M$ y consideremos la proyección $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \to H$. Utilice el hecho que $\pi_1(U \cap V, x_0)/\ker i_2$ es isomorfo a $\pi_1(V, x_0)$ para definir un homomorfismo $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \to H$. Aplique el Teorema 70.1 para definir un inverso por la izquierda para h.]

3. (a) Demuestre que si G_1 y G_2 tienen presentaciones finitas, entonces $G_1 * G_2$ también tiene una presentación finita.
   (b) Demuestre que si $\pi_1(U \cap V, x_0)$ está finitamente generado y $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$ tienen presentaciones finitas, entonces $\pi_1(X, x_0)$ tiene una presentación finita. [*Indicación:* si N' es un subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ que contiene los elementos $i_1(g_i)^{-1} i_2(g_i)$, donde g_i recorre un conjunto de generadores de $\pi_1(U \cap V, x_0)$, entonces N' contiene los elementos $i_1(g)^{-1} i_2(g)$ para cualquier g.]

§71 El grupo fundamental de una unión por un punto de círculos

En esta sección definiremos lo que entendemos por una *unión por un punto de círculos*, y calcularemos su grupo fundamental.

Definición. Sea X un espacio de Hausdorff que es la unión de subespacios $S_1, \ldots, S_n$, cada uno de ellos homeomorfo al círculo unidad S^1. Supongamos que existe un punto p en X tal que $S_i \cap S_j = \{p\}$ siempre que $i \neq j$. Entonces X se dice que es ***la unión por un punto de los círculos*** $S_1, \ldots, S_n$.

Observe que cada espacio S_i, al ser compacto, es cerrado en X. Observe también que X puede embeberse en el plano; si C_i denota el círculo de radio i en el plano $\mathbb{R}^2$ centrado en el punto $(i, 0)$, entonces X es homeomorfo a $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.

Teorema 71.1. *Sea X la unión por un punto de los círculos $S_1, \ldots, S_n$; sea p el punto común a los círculos. Entonces $\pi_1(X, p)$ es un grupo libre. Si f_i es un lazo en S_i que representa un generador de $\pi_1(S_i, p)$, entonces los lazos $f_1, \ldots, f_n$ representan un sistema de generadores libres para $\pi_1(X, p)$.*

Demostración. El resultado es inmediato si $n = 1$. Procederemos por inducción en n. La demostración es similar a la proporcionada en el Ejemplo 1 de la sección anterior.

Sea X la unión por un punto de los círculos $S_1, \ldots, S_n$, con p el punto común de estos círculos. Escojamos un punto q_i de S_i diferente de p, para cada i. Hagamos $W_i = S_i - q_i$ y pongamos

$$U = S_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n \qquad y \qquad V = W_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n.$$

Entonces $U \cap V = W_1 \cup \cdots \cup W_n$ (véase la Figura 71.1). Cada uno de los espacios U, V y $U \cap V$ es conexo por caminos, al ser la unión de espacios conexos por caminos con un punto en común.

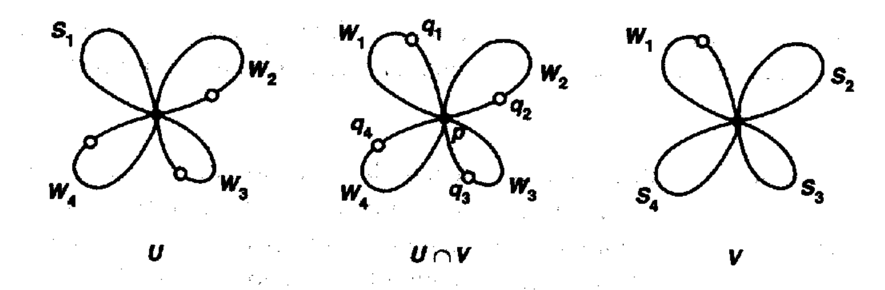


Figura 71.1

El espacio W_i es homeomorfo a un intervalo abierto, por lo que tiene al punto p como retracto de deformación; sea $F_i : W_i \times I \to W_i$ el retracto de deformación. Las aplicaciones F_i determinan una aplicación $F : (U \cap V) \times I \to U \cap V$ que es un retracto de deformación de $U \cap V$ en p. Para probar que F es continua, observemos que como S_i es un subespacio cerrado de X, el espacio $W_i = S_i - q_i$ es un subespacio cerrado de $U \cap V$, de modo que $W_i \times I$ es un subespacio cerrado de $(U \cap V) \times I$. Entonces podemos aplicar el lema del pegamiento. Se deduce que $U \cap V$ es simplemente conexo, de modo que $\pi_1(X, p)$ es el producto libre de los grupos $\pi_1(U, p)$ y $\pi_1(V, p)$, relativo a los monomorfismos inducidos por la inclusión.

Un razonamiento similar demuestra que S_1 es un retracto de deformación de U y $S_2 \cup \cdots \cup S_n$ es un retracto de deformación de V. Se sigue que $\pi_1(U, p)$ es cíclico infinito, y el lazo f_1 representa un generador. Se deduce también, utilizando la hipótesis de inducción, que $\pi_1(V, p)$ es un grupo libre, siendo $f_2, \ldots, f_n$ un sistema de generadores libres. Ahora sólo nos resta aplicar el Teorema 69.2. ■

Generalizaremos este resultado a un espacio X que es la unión de *infinitos* círculos que tienen un punto en común. En este caso debemos ser muy cuidadosos con la topología.

Definición. Sea X un espacio que es la unión de los subespacios X_α, con $\alpha \in J$. La topología de X se dice que es ***coherente*** con los subespacios X_α siempre que un subconjunto C de X es cerrado en X sólo si $C \cap X_\alpha$ es cerrado en X_α para todo α. Una condición equivalente es que un conjunto es abierto en X sólo si su intersección con cada X_α es abierta en X_α.

Si X es la unión de una cantidad finita de subespacios cerrados $X_1, \ldots, X_n$, entonces la topología de X es automáticamente coherente con estos subespacios, ya que si $C \cap X_i$ es cerrado en X_i entonces es cerrado en X, y C es la unión finita de estos subconjuntos $C \cap X_i$.

Definición. Sea X un espacio que es la unión de los subespacios S_α, con $\alpha \in J$, cada uno de ellos homeomorfo al círculo unidad. Supongamos que existe un punto p

de X tal que $S_\alpha \cap S_\beta = \{p\}$ siempre que $\alpha \neq \beta$. Si la topología de X es coherente con los subespacios S_α, entonces X se dice que es la ***unión por un punto de los círculos*** S_α.

En el caso finito, la definición involucraba la condición de Hausdorff en lugar de la condición de coherencia; en ese caso, la condición de coherencia se obtenía igualmente. En el caso infinito, esto no siempre es así, por lo que se incluye como parte de la definición. También queremos incluir la condición de Hausdorff, pero esto no es necesario ya que se deduce de la condición de coherencia.

Lema 71.2. *Sea X la unión por un punto de los círculos S_α, para $\alpha \in J$. Entonces X es normal. Además, cualquier subespacio compacto de X está contenido en una unión finita de círculos S_α.*

Demostración. Está claro que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Sean A y B conjuntos cerrados y disjuntos en X; supongamos que B no contiene a p. Escojamos subconjuntos disjuntos U_α y V_α de S_α que sean abiertos en S_α y contengan a $\{p\} \cup (A \cap S_\alpha)$ y $B \cap S_\alpha$, respectivamente. Sea $U = \bigcup U_\alpha$ y $V = \bigcup V_\alpha$; entonces U y V son disjuntos. Ahora $U \cap S_\alpha = U_\alpha$ ya que todos los subconjuntos U_α contienen a p, y $V \cap S_\alpha = V_\alpha$ ya que V_α no contiene a p. Por tanto U y V son abiertos en X, como deseábamos. Entonces X es normal.

Consideremos ahora C un subespacio compacto de X. Para cada α que sea posible, escojamos un punto x_α en $C \cap (S_\alpha - p)$. El conjunto $D = \{x_\alpha\}$ es cerrado en X, ya que es su intersección con cada S_α es un conjunto unipuntual o es vacío. Por la misma razón, cada *subconjunto* de D es cerrado en X. Por tanto, D es un subespacio discreto cerrado en X y contenido en C; como C es compacto por punto límite, D debe ser finito. ■

Teorema 71.3. *Sea X la unión por un punto de los círculos S_α, con $\alpha \in J$, y sea p el punto común a todos ellos. Entonces $\pi_1(X,p)$ es un grupo libre. Si f_α es un lazo en S_α que representa un generador de $\pi_1(S_\alpha,p)$, entonces los lazos $\{f_\alpha\}$ representan un sistema de generadores libres para $\pi_1(X,p)$.*

Demostración. Sea $i_\alpha : \pi_1(S_\alpha,p) \to \pi_1(X,p)$ el homomorfismo inducido por la inclusión, y denotemos por G_α a su imagen.

Observemos que si f es un lazo en X basado en p, entonces la imagen de f es compacta, de modo que f estará contenido en alguna unión finita de subespacios S_α. Además, si f y g son dos lazos que son homotópicos por caminos en X, entonces serán de hecho homotópicos por caminos en alguna unión finita de subespacios S_α.

Se deduce entonces que los grupos $\{G_\alpha\}$ generan $\pi_1(X,p)$. En efecto, si f es un lazo en X, entonces f está en $S_{\alpha_1} \cup \cdots \cup S_{\alpha_n}$ para algún conjunto finito de índices;

entonces el Teorema 71.1 implica que $[f]$ es un producto de elementos de los grupos $G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}$. De modo análogo, se deduce que i_β es un monomorfismo. En efecto, si f es un lazo en S_β que es homotópico por caminos en X a una constante, entonces f es homotópico por caminos a una constante en alguna unión finita de espacios S_α, de modo que el Teorema 71.1 implica que f es homotópica por caminos a una constante en S_β.

Finalmente, supongamos que existe una palabra reducida no vacía

$$w = (g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_n})$$

en los elementos de los grupos G_α que representa el elemento neutro de $\pi_1(X, p)$. Sea f un lazo en X cuya clase de homotopía de caminos está representada por w. Entonces f es homotópica por caminos a una constante en X, de modo que es homotópica por caminos a una constante en alguna unión finita de subespacios S_α. Esto contradice el Teorema 71.1. ■

El teorema anterior depende del hecho de que la topología de X sea coherente con los subespacios S_α. Consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1. Sea C_n el círculo de radio $1/n$ en $\mathbb{R}^2$ con centro el punto $(1/n, 0)$. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de todos estos círculos; entonces X es una unión infinita numerable de círculos, cada dos de ellos teniendo el origen como punto común p. Sin embargo, X no es la unión por un punto de los círculos C_n; por conveniencia, X se denomina ***pendiente infinito***.

Puede comprobarse directamente que X no tiene la topología coherente con los subespacios C_n; la intersección del eje positivo de abcisas con X contiene exactamente un punto en cada círculo C_n, pero no es cerrado en X. Alternativamente, para cada n, sea f_n el lazo en C_n que representa un generador de $\pi_1(C_n, p)$; probaremos que $\pi_1(X, p)$ no es un grupo libre con $\{[f_n]\}$ como sistema de generadores libres. De hecho, probaremos que los elementos $[f_i]$ ni siquiera *generan* el grupo $\pi_1(X, p)$.

Consideremos el lazo g en X definido como sigue: para cada n, definimos g sobre el intervalo $[1/(n+1), 1/n]$ como la aplicación lineal positiva de este intervalo en $[0, 1]$ compuesta con f_n. Esto permite definir g en el intervalo $(0, 1]$. Definimos $g(0) = p$. Como X tiene la topología del subespacio derivada de $\mathbb{R}^2$, es fácil probar que g es continua (véase la Figura 71.2). Probaremos que dado n, el elemento $[g]$ no pertenece al subgrupo G_n de $\pi_1(X, p)$ generado por $[f_1], \ldots, [f_n]$.

Escojamos $N > n$, y consideremos la aplicación $h : X \to C_N$ definida por $h(x) = x$ para $x \in C_N$ y $h(x) = p$ en otro caso. Entonces h es continua y el homomorfismo inducido $h_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(C_N, p)$ aplica cada elemento de G_n en el elemento neutro. Por otra parte, $h \circ g$ es el lazo en C_N que es constante fuera de $[1/(N+1), 1/N]$ y sobre este intervalo coincide con la aplicación lineal positiva de este intervalo en $[0, 1]$ compuesta con f_N. Por tanto, $h_*([g]) = [f_N]$, que *genera* $\pi_1(C_N, p)$, por lo que $[g] \notin G_n$.

En el teorema precedente hemos calculado el grupo fundamental de un espacio que es una unión por un punto infinita de círculos. Para uso posterior, probaremos ahora que tales espacios existen (utilizaremos este hecho en el Capítulo 14).

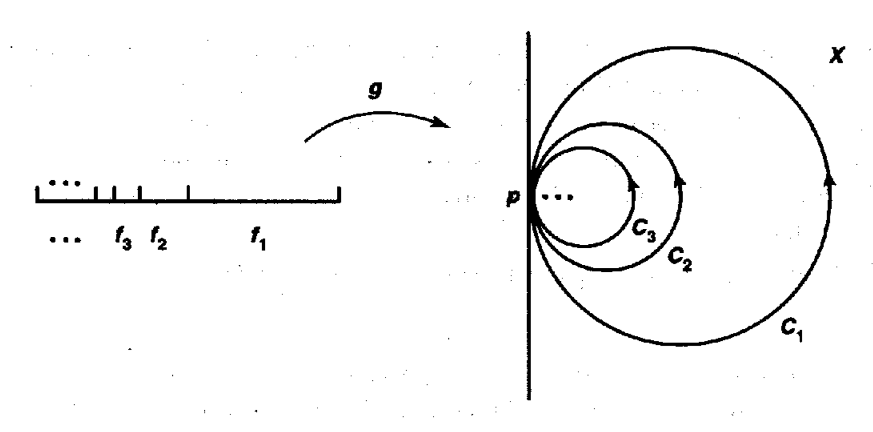


Figura 71.2

***Lema 71.4.** *Dado cualquier conjunto de índices J, existe un espacio X que es la unión por un punto de los círculos S_α, con $\alpha \in J$.*

Demostración. Dotemos al conjunto J de la topología discreta y sea E el espacio producto $S^1 \times J$. Escojamos un punto $b_0 \in S^1$ y sea X el espacio cociente obtenido a partir de E identificando el conjunto cerrado $P = b_0 \times J$ con un punto p. Sea $\pi : E \to X$ la aplicación cociente y pongamos $S_\alpha = \pi(S^1 \times \alpha)$. Probaremos que cada S_α es homeomorfo a S^1 y X es la unión por un punto de los círculos S_α.

Observemos que si C es cerrado en $S^1 \times \alpha$, entonces $\pi(C)$ es cerrado en X, ya que $\pi^{-1}\pi(C) = C$ si el punto $b_0 \times \alpha$ no está en C y $\pi^{-1}\pi(C) = C \cup P$ en otro caso. En cualquier caso, $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en $S^1 \times J$, de modo que $\pi(C)$ es cerrado en X.

Se deduce que S_α es cerrado en X, ya que $S^1 \times \alpha$ es cerrado en $S^1 \times J$ y π aplica $S^1 \times \alpha$ homeomórficamente en S_α. Sea π_α este homeomorfismo.

Para probar que X tiene la topología coherente con los subespacios S_α, consideremos $D \subset X$ y supongamos que $D \cap S_\alpha$ es cerrado en S_α para cada α. Por otro lado,

$$\pi^{-1}(D) \cap (S^1 \times \alpha) = \pi_\alpha^{-1}(D \cap S_\alpha)$$

donde el último conjunto es cerrado en $S^1 \times \alpha$ porque π_α es continua. Entonces $\pi^{-1}(D)$ es cerrado en $S^1 \times J$, de modo que D es cerrado en X por definición de la topología cociente. ■

Ejercicios

1. Sea X un espacio que es la unión de subespacios $S_1, \ldots, S_n$, cada uno de los cuales es homeomorfo a un círculo. Supongamos que existe un punto p en X tal que $S_i \cap S_j = \{p\}$ para $i \neq j$.
   (a) Demuestre que X es de Hausdorff si, y sólo si, cada espacio S_i es cerrado en X.
   (b) Demuestre que X es de Hausdorff si, y sólo si, la topología de X es coherente con los subespacios S_i.
   (c) Proporcione un ejemplo que demuestre que X no tiene por qué ser de Hausdorff. [*Indicación:* véase el Ejercicio 5 de §36.]
2. Supongamos que X es un espacio que es la unión de los subespacios cerrados $X_1, \ldots, X_n$ y que existe un punto p de X tal que $X_i \cap X_j = \{p\}$ para $i \neq j$. Entonces diremos que X es la unión por un punto de los espacios $X_1, \ldots, X_n$, y escribiremos $X = X_1 \vee \cdots \vee X_n$. Demuestre que si para cada i, el punto p es un retracto de deformación de un conjunto abierto W_i de X_i, entonces $\pi_1(X, p)$ es el producto libre externo de los grupos $\pi_1(X_i, p)$ relativo a los monomorfismos inducidos por la inclusión.
3. ¿Qué podemos decir acerca del grupo fundamental de $X \vee Y$ si X es homeomorfo a S^1 e Y es homeomorfo a S^2?
4. Demuestre que si X es una unión por un punto infinita de círculos, entonces X no satisface el primer axioma de numerabilidad.
5. Sea S_n el círculo de radio n en $\mathbb{R}^2$ centrado en el punto $(n, 0)$. Sea Y el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de todos estos círculos y sea p el punto común a todos ellos.
   (a) Demuestre que Y no es homeomorfo a una unión por un punto infinita numerable de círculos, ni al espacio descrito en el Ejemplo 1.
   (b) Demuestre, sin embargo, que $\pi_1(Y, p)$ es un grupo libre con $\{[f_n]\}$ como sistema de generadores libres, donde f_n es un lazo que representa un generador de $\pi_1(S_n, p)$.

§72 Añadiendo una 2-celda

Hemos calculado el grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ de dos formas. En la primera hemos utilizado la aplicación recubridora estándar $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ y la correspondencia de los levantamientos. En la segunda hemos usado un teorema básico sobre el grupo fundamental de un espacio producto. Ahora vamos a calcular el grupo fundamental del toro de una forma distinta.

Si restringimos la aplicación recubridora $p \times p$ al cuadrado unidad, obtenemos una aplicación cociente $\pi : I^2 \to T$. Dicha aplicación lleva $\operatorname{Fr} I^2$ en el subespacio $A = (S^1 \times b_0) \cup (b_0 \times S^1)$, que es la unión por un punto de dos círculos, y el resto de I^2 lo transforma biyectivamente en $T - A$. Por tanto, T puede pensarse como el espacio obtenido pegando los lados de I^2 en el espacio A.

El proceso de construcción de un espacio pegando los lados de una región poligonal en el plano sobre otro espacio es bastante útil. Veremos aquí cómo calcular el grupo fundamental de un espacio así construido. Las aplicaciones serán muchas e interesantes.

Teorema 72.1. *Sea X un espacio de Hausdorff y A un subespacio de X cerrado y conexo por caminos. Supongamos que existe una aplicación continua $h : B^2 \to X$ que aplica $\operatorname{Int} B^2$ biyectivamente sobre $X - A$ y aplica $S^1 = \operatorname{Fr} B^2$ sobre A. Sean $p \in S^1$, $a = h(p)$ y $k : (S^1, p) \to (A, a)$ la aplicación obtenida al restringir h. Entonces el homomorfismo*

$$i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$$

inducido por la inclusión es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal de $\pi_1(A, a)$ que contiene la imagen de $k_* : \pi_1(S^1, p) \to \pi_1(A, a)$.

Algunas veces diremos que el grupo fundamental de X se obtiene a partir del grupo fundamental de A "eliminando" la clase $k_*[f]$, donde $[f]$ genera $\pi_1(S^1, p)$.

Demostración. *Paso 1.* El origen $\mathbf{0}$ es el punto central de B^2; sea x_0 el punto $h(\mathbf{0})$ de X. Si U es el conjunto abierto $U = X - x_0$ de X, probaremos que A es un retracto de deformación de U (véase la Figura 72.1).

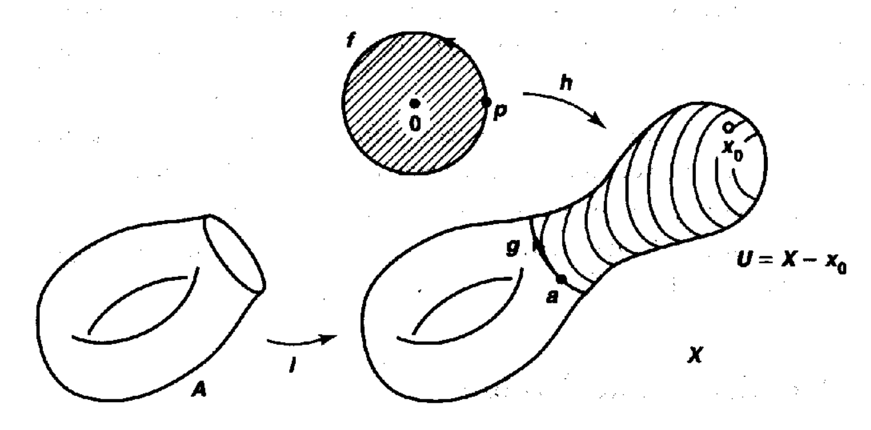


Figura 72.1

Sea $C = h(B^2)$ y sea $\pi : B^2 \to C$ la aplicación obtenida al restringir el rango de h. Consideremos la aplicación

$$\pi \times \mathrm{id} : B^2 \times I \to C \times I$$

que es una aplicación cerrada ya que $B^2 \times I$ es compacto y $C \times I$ es de Hausdorff; por tanto, es una aplicación cociente. Su restricción

$$\pi' : (B^2 - \mathbf{0}) \times I \to (C - x_0) \times I$$

es también una aplicación cociente, ya que su dominio es un subespacio abierto en $B^2 \times I$ y está saturado con respecto a $\pi \times \text{id}$. Existe un retracto de deformación de $B^2 - \mathbf{0}$ sobre S^1 que induce, *vía* la aplicación cociente π', un retracto de deformación de $C - x_0$ sobre $\pi(S^1)$. Extendemos este retracto de deformación a todo el espacio $U \times I$ haciendo que cada punto de A permanezca fijo durante la deformación. Por tanto, A es un retracto de deformación de U.

Deducimos que la inclusión de A en U induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Nuestro teorema entonces se reduce a la demostración de la siguiente afirmación:

Sea f un lazo cuya clase genera $\pi_1(S^1, p)$. Entonces la inclusión de U en X induce un epimorfismo

$$\pi_1(U, a) \to \pi_1(X, a)$$

cuyo núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a la clase del lazo $g = h \circ f$.

Paso 2. Para probar este resultado, es conveniente considerar primero el homomorfismo $\pi_1(U, b) \to \pi_1(X, b)$ inducido por la inclusión relativa a un punto base b que no pertenece a A.

Sea b cualquier punto de $U - A$. Escribamos X como la unión de los conjuntos abiertos U y $V = X - A = \pi(\text{Int}\, B^2)$. Entonces U es conexo por caminos ya que A es un retracto de deformación. Como π es una aplicación cociente, su restricción a $\text{Int}\, B^2$ es también una aplicación cociente y, por tanto, un homeomorfismo; entonces V es simplemente conexo. El conjunto $U \cap V = V - x_0$ es homeomorfo a $\text{Int}\, B^2 - \mathbf{0}$, de modo que es conexo por caminos y su grupo fundamental es cíclico infinito. Como b es un punto de $U \cap V$, el Corolario 70.4 implica que el homomorfismo

$$\pi_1(U, b) \to \pi_1(X, b)$$

inducido por la inclusión es sobreyectivo, y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a la imagen del grupo cíclico infinito $\pi_1(U \cap V, b)$.

Paso 3. Ahora cambiaremos el punto base para demostrar el teorema.

Sea q el punto de B^2 igual al punto medio del segmento que une $\mathbf{0}$ con p, y sea $b = h(q)$; entonces b es un punto de $U \cap V$. Sea f_0 un lazo en $\text{Int}\, B^2 - \mathbf{0}$ basado en q que representa un generador del grupo fundamental de este espacio; entonces $g_0 = h \circ f_0$ es un lazo en $U \cap V$ basado en b que representa un generador del grupo fundamental de $U \cap V$ (véase la Figura 72.2).

El Paso 2 de la demostración garantiza que el homomorfismo $\pi_1(U, b) \to \pi_1(X, b)$ inducido por la inclusión es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal

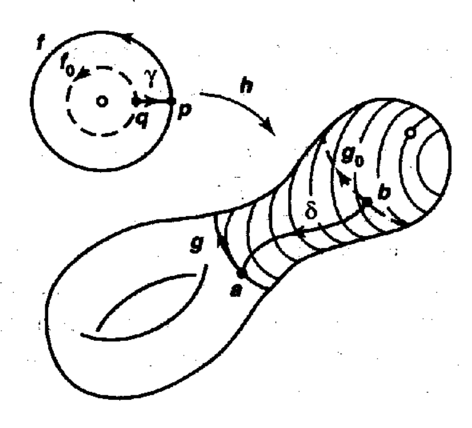


Figura 72.2

que contiene la clase del lazo $g_0 = h \circ f_0$. Para obtener el resultado análogo con punto base a procederemos como sigue.

Sea γ el segmento en B^2 que une q con p y sea δ el camino $\delta = h \circ \gamma$ en U desde b hasta a. Los isomorfismos inducidos por el camino δ (ambos serán denotados por $\hat{\delta}$) conmutan con los homomorfismos inducidos por la inclusión en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U,b) & \longrightarrow & \pi_1(X,b) \\ \downarrow \hat{\delta} & & \downarrow \hat{\delta} \\ \pi_1(U,a) & \longrightarrow & \pi_1(X,a) \end{array}$$

Por tanto, el homomorfismo de $\pi_1(U,a)$ en $\pi_1(X,a)$ inducido por la inclusión es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene el elemento $\hat{\delta}([g_0])$.

El lazo f_0 representa un generador del grupo fundamental de $\operatorname{Int} B^2 - \mathbf{0}$ basado en q. Entonces el lazo $\bar{\gamma} * (f_0 * \gamma)$ representa un generador del grupo fundamental de $B^2 - \mathbf{0}$ basado en p. Por tanto, es homotópico por caminos a f o a su opuesto; supongamos lo primero. Componiendo esta homotopía de caminos con h, vemos que $\bar{\delta} * (g_0 * \delta)$ es homotópico por caminos en U a g. Entonces $\hat{\delta}([g_0]) = [g]$, y el teorema queda probado. ∎

No existe nada especial en este teorema acerca de la bola unidad B^2. El mismo resultado se satisface si reemplazamos B^2 por cualquier espacio B homeomorfo a B^2, si denotamos por $\operatorname{Fr} B$ el subespacio correspondiente a S^1 bajo el homeomorfismo. Tal espacio B se dice que es una ***2-celda***. El espacio X del teorema puede imaginarse como obtenido a partir de A "añadiéndole una 2-celda". Trataremos esta cuestión más formalmente con posterioridad.

Ejercicios

1. Sea X un espacio de Hausdorff y sea A un subespacio cerrado y conexo por caminos. Supongamos que $h : B^n \to X$ es una aplicación continua que aplica S^{n-1} en A y aplica $\operatorname{Int} B^n$ biyectivamente en $X - A$. Sea a un punto de $h(S^{n-1})$. Si $n > 2$, ¿qué puede decir acerca del homomorfismo de $\pi_1(A, a)$ en $\pi_1(X, a)$ inducido por la inclusión?

2. Sea X el espacio adjunción formado por la unión disjunta del espacio normal conexo por caminos A y la bola unidad B^2 por medio de una aplicación continua $f : S^1 \to A$ (véase el Ejercicio 8 de §35). Pruebe que X satisface las hipótesis del Teorema 72.1. ¿En qué punto se utiliza el hecho que A es normal?

3. Sean G un grupo, x un elemento de G y N el menor subgrupo normal de G que contiene a x. Demuestre que si existe un espacio normal y conexo por caminos cuyo grupo fundamental es isomorfo a G, entonces existe un espacio normal y conexo por caminos cuyo grupo fundamental es isomorfo a G/N.

§73 Los grupos fundamentales del toro y del sombrero de asno

Ahora aplicaremos los resultados de la sección precedente para calcular dos grupos fundamentales, uno de los cuales ya conocemos y el otro no. Las técnicas involucradas serán importantes posteriormente.

Teorema 73.1. *El grupo fundamental del toro admite una presentación formada por dos generadores α, β y una relación simple $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.*

Demostración. Sea $X = S^1 \times S^1$ el toro y sea $h : I^2 \to X$ la aplicación obtenida al restringir la aplicación recubridora estándar $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$. Sean p el punto $(0, 0)$ de $\operatorname{Fr} B^2$, $a = h(p)$ y sea $A = h(\operatorname{Fr} I^2)$. Entonces las hipótesis del Teorema 72.1 se satisfacen.

El espacio A es la unión por un punto de dos círculos, de modo que el grupo fundamental de A es libre. De hecho, si denotamos por a_0 el camino $a_0(t) = (t, 0)$ y por b_0 el camino $b_0(t) = (0, t)$ en $\operatorname{Fr} I^2$, entonces los caminos $\alpha = h \circ a_0$ y $\beta = h \circ b_0$ son lazos en A tales que $[\alpha]$ y $[\beta]$ forman un sistema de generadores libres para $\pi_1(A, a)$. Véase la Figura 73.1.

Consideremos ahora a_1 y b_1 los caminos dados por $a_1(t) = (t, 1)$ y $b_1(1, t)$ en la frontera $\operatorname{Fr} I^2$. Consideremos el lazo f en $\operatorname{Fr} I^2$ definido por la ecuación

$$f = a_0 * (b_1 * (\bar{a}_1 * \bar{b}_0)).$$

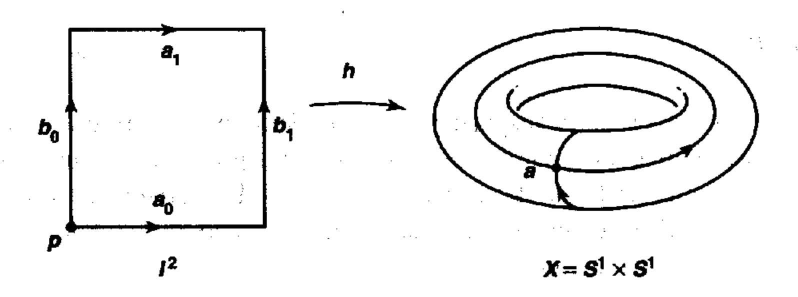


Figura 73.1

Entonces f representa un generador de $\pi_1(\text{Fr}\, I^2, p)$ y el lazo $g = h \circ f$ coincide con el producto $\alpha * (\beta * (\bar{\alpha} * \bar{\beta}))$. El Teorema 72.1 afirma que $\pi_1(X, a)$ es el cociente del grupo libre sobre los generadores libres $[\alpha]$ y $[\beta]$ con el menor subgrupo normal que contiene el elemento $[\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1}$. ■

Corolario 73.2. *El grupo fundamental del toro es un grupo abeliano libre de rango 2.*

Demostración. Sea G el grupo libre sobre los generadores α y β y sea N el menor subgrupo normal conteniendo el elemento $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Como este elemento es un conmutador, N está contenido en el subgrupo conmutador $[G, G]$ de G. Por otra parte, G/N es abeliano, ya que está generado por las clases αN y βN, y estos elementos de G/N conmutan. Por tanto, N contiene al subgrupo conmutador de G.

Se deduce entonces del Teorema 69.4 que G/N es un grupo abeliano libre de rango 2. ■

Definición. Sea n un entero positivo con $n > 1$. Sea $r : S^1 \to S^1$ la rotación de ángulo $2\pi/n$, que aplica el punto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ en el punto $(\cos(\theta + 2\pi/n), \operatorname{sen}(\theta + 2\pi/n))$. Formemos el espacio cociente X a partir de la bola unidad B^2 identificando cada punto x de S^1 con los puntos $r(x), r^2(x), \ldots, r^{n-1}(x)$. Probaremos que X es un espacio de Hausdorff compacto, denominado ***sombrero de asno de n picos***.

Sea $\pi : B^2 \to X$ la aplicación cociente. Probaremos que π es cerrada. Para lograr este objetivo, debemos probar que si C es un conjunto cerrado de B^2, entonces $\pi^{-1}\pi(C)$ es también cerrado en B^2; se deducirá entonces por la definición de la topología cociente que $\pi(C)$ es cerrado en X. Sea $C_0 = C \cap S^1$, que es cerrado en B^2. El conjunto $\pi^{-1}\pi(C)$ es igual a la unión de C y los conjuntos $r(C_0), r^2(C_0), \ldots, r^{n-1}(C_0)$, que son todos cerrados en B^2 ya que r es un homeomorfismo. Por tanto, $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en B^2, como deseábamos.

Como π es continua, X es compacto. Además, X es de Hausdorff como consecuencia del siguiente lema, que se propuso como un ejercicio en §31.

Lema 73.3. *Sea $\pi : E \to X$ una aplicación cociente cerrada. Si E es normal entonces X también lo es.*

Demostración. Supongamos que E es normal. Los conjuntos unipuntuales son cerrados en X ya que los conjuntos unipuntuales son cerrados en E. Sean A y B conjuntos cerrados disjuntos en X. Entonces $\pi^{-1}(A)$ y $\pi^{-1}(B)$ son conjuntos cerrados disjuntos en E. Escojamos dos conjuntos abiertos disjuntos U y V de E que contengan a $\pi^{-1}(A)$ y $\pi^{-1}(B)$, respectivamente. Es tentador suponer que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son los conjuntos abiertos alrededor de A y B que estamos buscando. Pero no es cierto. Ni siquiera tienen por qué ser conjuntos abiertos (π no es necesariamente una aplicación abierta), y tampoco tienen por qué ser disjuntos. Véase la Figura 73.2.

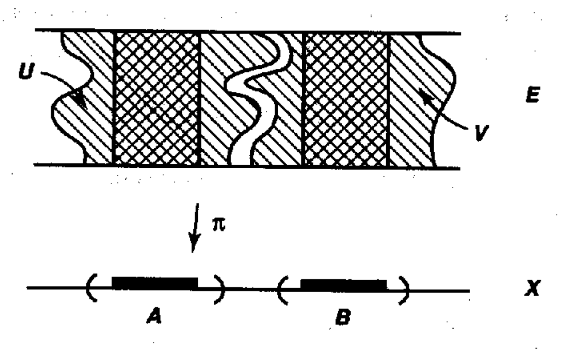


Figura 73.2

Procederemos como sigue. Sean $C = E - U$ y $D = E - V$. Como C y D son conjuntos cerrados en E, los conjuntos $\pi(C)$ y $\pi(D)$ son cerrados en X. Como C no contiene puntos de $\pi^{-1}(A)$ entonces el conjunto $\pi(C)$ es disjunto de A, de modo que $U_0 = X - \pi(C)$ es un conjunto abierto de X que contiene a A. De modo similar, $V_0 = X - \pi(D)$ es un subconjunto abierto de X conteniendo a B. Además, U_0 y V_0 son disjuntos. En efecto, si $x \in U_0$, entonces $\pi^{-1}(x)$ no corta a C, por lo que está contenido en U. De modo análogo, si $x \in V_0$, entonces $\pi^{-1}(x)$ está contenido en V. Como U y V son disjuntos, también lo son U_0 y V_0. ∎

Observemos que el sombrero de asno de 2 picos es un espacio que ya hemos estudiado; es homeomorfo al plano proyectivo P^2. Para comprobar esta afirmación, recordemos que P^2 se definió como un espacio cociente a partir de S^2 identificando cada punto x con su antípoda $-x$. Sea $p : S^2 \to P^2$ la aplicación cociente. Consideremos el homeomorfismo estándar i de B^2 en el hemisferio superior de S^2, dado por la ecuación

$$i(x, y) = (x, y, (1 - x^2 - y^2)^{1/2})$$

y lo componemos con la aplicación p. Obtenemos una aplicación $\pi : B^2 \to P^2$ que es continua, cerrada y sobreyectiva. Sobre Int B es inyectiva y para cada $x \in S^1$,

aplica x y $-x$ al mismo punto. Por tanto, induce un homeomorfismo del sombrero de asno de 2 picos en P^2.

El grupo fundamental del sombrero de asno de n picos es justamente lo que se podría esperar tras el cálculo realizado para P^2.

Teorema 73.4. *El grupo fundamental de un sombrero de asno de n picos es un grupo cíclico de orden n.*

Demostración. Sea $h : B^2 \to X$ una aplicación cociente, donde X es un sombrero de asno de n picos. Sean $A = h(S^1)$, $p = (1, 0) \in S^1$ y $a = h(p)$. Entonces h aplica el arco C de S^1 que conecta p con $r(p)$ en el subespacio A; h identifica los extremos de C y es inyectiva en el interior de C. Por tanto, A es homeomorfo al círculo, por lo que su grupo fundamental es cíclico infinito. De hecho, si γ es el camino

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t/n), \operatorname{sen}(2\pi t/n))$$

en S^1 que conecta p y $r(p)$, entonces $\alpha = h \circ \gamma$ representa un generador de $\pi_1(A, a)$. Véase la Figura 73.3.

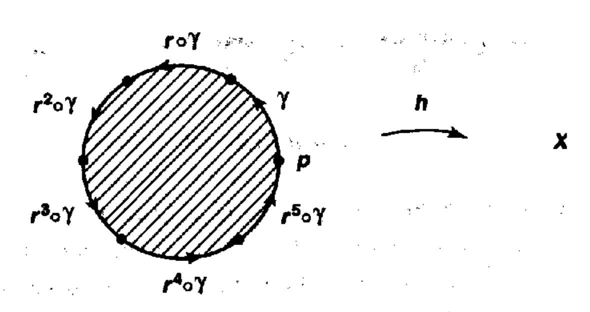


Figura 73.3

Entonces la clase del lazo

$$f = \gamma * ((r \circ \gamma) * ((r^2 \circ \gamma) * \cdots * (r^{n-1} \circ \gamma)))$$

genera $\pi_1(S^1, p)$. Como $h(r^m(x)) = h(x)$ para cualesquiera x y m, el lazo $h \circ f$ coincide con el producto de n copias de α, es decir, $\alpha * (\alpha * (\cdots * \alpha))$. De aquí se deduce el teorema. ■

Ejercicios

1. Encuentre espacios cuyos grupos fundamentales sean isomorfos a los siguientes grupos ($\mathbb{Z}/n$ denota el grupo aditivo de los enteros módulo n):

(a) $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$.
(b) $\mathbb{Z}/n_1 \times \mathbb{Z}/n_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k$.
(c) $\mathbb{Z}/n * \mathbb{Z}/m$ (véase el Ejercicio 2 de §71).
(d) $\mathbb{Z}/n_1 * \mathbb{Z}/n_2 * \cdots * \mathbb{Z}/n_k$.

2. Demuestre el siguiente resultado.
Teorema. Si G es un grupo finitamente presentado entonces existe un espacio de Hausdorff compacto X cuyo grupo fundamental es isomorfo a G.
Demostración. Suponga que G tiene un presentación finita formada por n generadores y m relaciones. Sea A la unión por un punto de n círculos; forme el espacio adjunción a partir de la unión de A y m copias $B_1, \ldots, B_m$ de bolas unidad por medio de una aplicación continua $f : \bigcup \operatorname{Fr} B_i \to A$.

(a) Demuestre que X es de Hausdorff.
(b) Pruebe el teorema en el caso $m = 1$.
(c) Proceda por inducción sobre m, utilizando el lema algebraico que se enuncia en el siguiente ejercicio.

La construcción indicada en este ejercicio es estándar en topología algebraica; el espacio X se denomina ***CW complejo*** 2-dimensional.

3. *Lema. Sean $f : G \to H$ y $g : H \to K$ homomorfismos, sea f sobreyectivo. Si $x_0 \in G$ y $\ker g$ es el menor subgrupo normal de H conteniendo a $f(x_0)$, entonces se satisface que $\ker(g \circ f)$ es el menor subgrupo normal N de G conteniendo a $\ker f$ y x_0.*
Demostración. Demuestre que $f(N)$ es normal y concluya que $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g) \subset f^{-1}f(N) = N$.

4. Demuestre que el espacio construido en el Ejercicio 2 es de hecho metrizable. [*Indicación:* la aplicación cociente es una aplicación perfecta.]

Capítulo 12

Clasificación de superficies

Uno de los primeros éxitos de la topología algebraica fue su contribución a resolver el problema de clasificar superficies compactas, salvo homeomorfismos. "Resolver" este problema significa dar un listado de superficies compactas no homeomorfas entre sí, de manera que cualquier otra superficie compacta sea homeomorfa a una de ellas. Éste es el problema que abordaremos en este capítulo.

§74 Grupos fundamentales de superficies

En esta sección probamos cómo construir superficies compactas y conexas y calculamos sus grupos fundamentales. Construiremos cada una de ellas como el espacio cociente obtenido de un polígono mediante el proceso de "pegar aristas".

El procedimiento de pegado formalmente necesita ser tratado con cuidado. En primer lugar, definamos con precisión lo que entenderemos por un "polígono". Dados un punto $c \in \mathbb{R}^2$ y un $a > 0$, se considera el círculo de radio a en $\mathbb{R}^2$ con centro en c. Dada una sucesión finita $\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n$ de números reales, donde $n \geq 3$ y $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$, se toman los puntos $p_i = c + a(\cos\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i)$, los cuales están en dicho círculo. Se numeran en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj a lo largo del círculo con $p_n = p_0$. La recta determinada por los puntos p_{i-1} y p_i divide al plano en dos semiplanos cerrados; sea H_i el que contiene a todos los puntos $p_j, j \neq i-1, i$. Entonces el espacio

$$P = H_1 \cap \cdots \cap H_n$$

se llama ***polígono*** determinado por los puntos p_i, los cuales se denominan ***vértices*** de P; el segmento $p_{i-1}p_i$ se llama ***arista*** de P; la unión de las aristas de P se representa por $\operatorname{Fr} P$ y $P - \operatorname{Fr} P$ por $\operatorname{Int} P$. No es difícil probar que si p es un punto de $\operatorname{Int} P$, entonces P es la unión de todos los segmentos entre p y los puntos de $\operatorname{Fr} P$, y que dos de tales segmentos sólo se cortan en el punto p.

Dado un segmento L en $\mathbb{R}^2$, una ***orientación*** de L es una ordenación de sus extremos; el primero, por ejemplo p, se llama ***punto inicial*** y el segundo, por ejemplo q, se llama ***punto final*** del segmento orientado. A menudo diremos que L está orientado ***de p a q*** (puede indicarse la orientación dibujando una flecha sobre L apuntando de p a q). Si L' es otro segmento rectilíneo, orientado de c a d, entonces la ***aplicación lineal positiva*** de L a L' es el homeomorfismo h que lleva el punto $x = (1-s)p + sq$ de L al punto $h(x) = (1-s)c + sd$ de L'.

Si P y Q son dos polígonos que tienen el mismo número de vértices, $p_0, \ldots, p_n$ y $q_0, \ldots, q_n$, respectivamente, con $p_0 = p_n$ y $q_0 = q_n$, entonces obviamente existe un homeomorfismo h entre $\operatorname{Fr} P$ y $\operatorname{Fr} Q$ que aplica el segmento $p_{i-1}p_i$ en el segmento $q_{i-1}q_i$ por medio de una aplicación lineal positiva. Si p y q son puntos fijos de $\operatorname{Int} P$ e $\operatorname{Int} Q$, respectivamente, entonces tal homeomorfismo se puede extender a un homeomorfismo entre P y Q haciendo que el segmento de p al punto $x \in \operatorname{Fr} P$ se aplique linealmente en el segmento de q a $h(x)$. Véase la Figura 74.1.

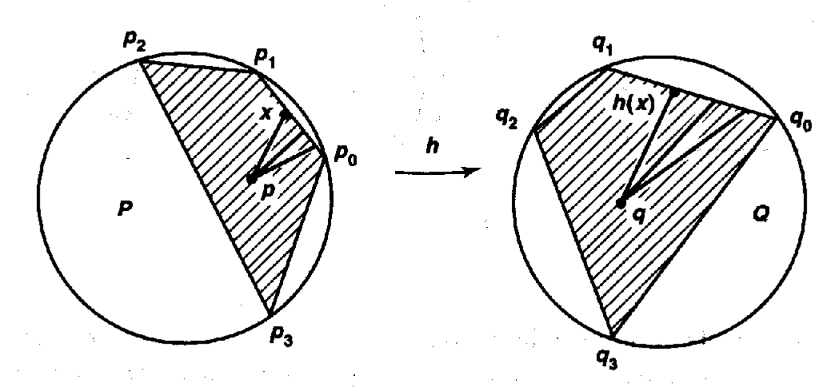


Figura 74.1

Definición. Sea P un polígono. Un ***etiquetado*** de las aristas de P es una aplicación del conjunto de las aristas de P en un conjunto S llamado conjunto de ***etiquetas***. Dada una orientación de cada arista de P y un etiquetado de las aristas de P, se define una relación de equivalencia de los puntos de P como sigue: cada punto de $\operatorname{Int} P$ es equivalente a sí mismo. Dadas dos aristas de P que tengan la misma etiqueta y h la aplicación lineal positiva entre ellas, se toma cada punto x de la primera arista equivalente al punto $h(x)$ de la segunda arista. Se tiene así una relación de equivalencia en P. El conjunto cociente X se dirá que se ha obtenido ***pegando las aristas de*** P de acuerdo con las orientaciones dadas y el etiquetado.

EJEMPLO 1. Considere las orientaciones y etiquetado de las aristas del triángulo de la Figura 74.2. El dibujo indica cómo se puede probar que el espacio cociente resultante es homeomorfo al disco unidad.

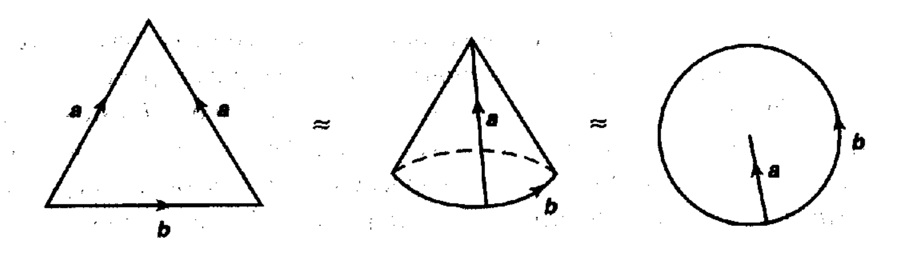


Figura 74.2

EJEMPLO 2. Las orientaciones y etiquetado de las aristas del cuadrado de la Figura 74.3 dan lugar a un espacio que es homeomorfo a la esfera S^2.

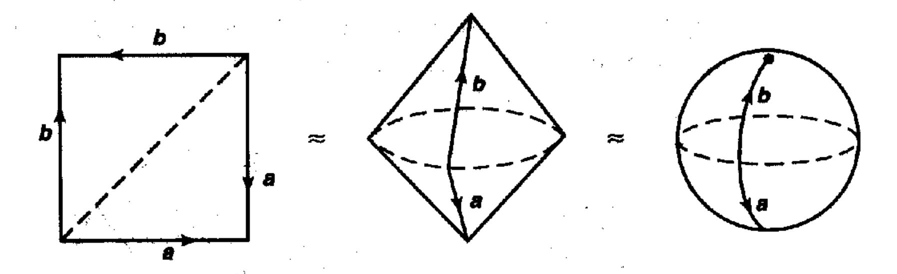


Figura 74.3

Describimos ahora un método conveniente para especificar las orientaciones y etiquetas de las aristas de un polígono, método que no supone hacer un dibujo.

Definición. Sea P un polígono con vértices sucesivos $p_0, \ldots, p_n$, donde $p_0 = p_n$. Dadas orientaciones y un etiquetado de las aristas de P, sean $a_1, \ldots, a_m$ las distintas etiquetas asignadas a las aristas de P. Para cada k, sea a_{i_k} la etiqueta asignada a la arista $p_{k-1}p_k$, y sea $\epsilon_k = +1$ ó -1, según que la orientación asignada a esa arista vaya de p_{k-1} a p_k, o al contrario. Entonces el número de aristas de P, las orientaciones de las aristas y el etiquetado están completamente especificados por el símbolo

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1}(a_{i_2})^{\epsilon_2} \cdots (a_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

Este símbolo se llamará ***esquema de longitud n*** de las aristas de P. Se trata simplemente de una sucesión de etiquetas con exponentes $+1$ ó -1.

Se omiten normalmente los exponentes iguales a $+1$ cuando se da un esquema. Así las orientaciones y etiquetado del Ejemplo 1 se especifican por el esquema $a^{-1}ba$, si se toma p_0 el vértice superior del triángulo. Si se toma p_0 como otro cualquiera de los vértices, entonces se obtienen los esquemas baa^{-1} o $aa^{-1}b$. Análogamente, las

orientaciones y etiquetado del Ejemplo 2 pueden ser especificados (si comenzamos por el vértice inferior izquierdo del cuadrado) por el símbolo $aa^{-1}bb^{-1}$. Está claro que una permutación cíclica de los términos de un esquema cambiará el espacio X, formado al utilizar el esquema, solamente salvo homeomorfismos. Más adelante se considerarán otras modificaciones que se puedan hacer a un esquema que dejarán el espacio invariante por homeomorfismos.

EJEMPLO 3. Ya se ha visto cómo el toro puede ser expresado como un espacio cociente del cuadrado unidad por medio de la aplicación cociente $p \times p : I \times I \to S^1 \times S^1$. Este mismo espacio cociente puede ser especificado por las orientaciones y el etiquetado de las aristas del cuadrado de la Figura 74.4. Y también mediante el esquema $aba^{-1}b^{-1}$.

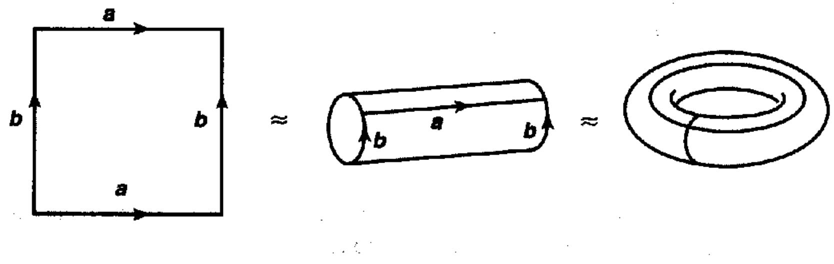


Figura 74.4

EJEMPLO 4. El plano proyectivo P^2 es homeomorfo al espacio cociente de la bola unidad B^2 obtenida identificando x con $-x$, para cada $x \in S^1$. Puesto que el cuadrado unidad es homeomorfo a la bola unidad, este espacio puede también ser especificado por las orientaciones y el etiquetado de las aristas del cuadrado unidad de la Figura 74.5. Y también mediante el esquema $abab$.

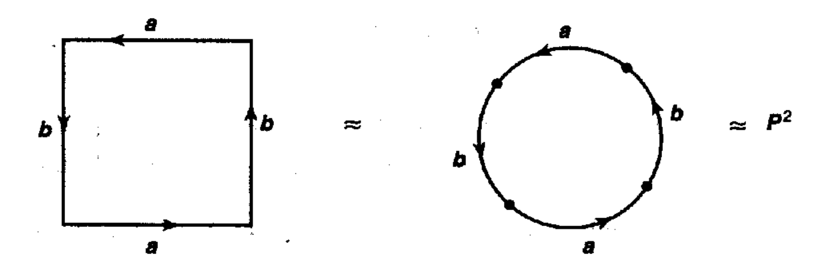


Figura 74.5

No existe razón alguna para restringirnos a un solo polígono cuando se construye un espacio pegando aristas. Dado un número finito $P_1, \ldots, P_k$ de polígonos disjuntos, junto con orientaciones y un etiquetado de sus aristas, se puede construir un espacio cociente X, exactamente del mismo modo que para un polígono, pegando aristas de esas regiones. También se pueden especificar orientaciones y un etiquetado por medio

de k etiquetados. Dependiendo de los esquemas particulares, el espacio X obtenido puede o no ser conexo.

EJEMPLO 5. La Figura 74.6 indica un etiquetado de las aristas de dos cuadrados para los cuales el espacio cociente resultante, conocido como ***cinta de Möbius***, es conexo. Por supuesto, este espacio también podría haber sido obtenido a partir de un solo cuadrado por medio del esquema $abac$.

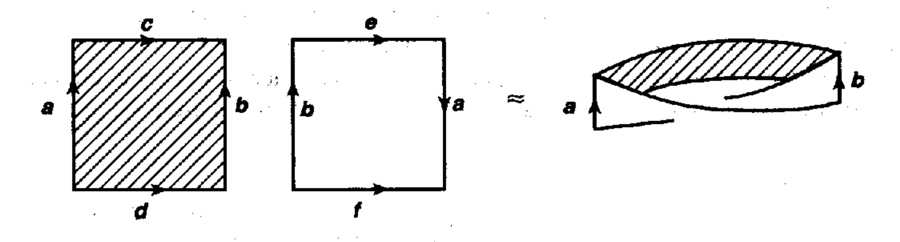


Figura 74.6

EJEMPLO 6. La Figura 74.7 indica un esquema para las aristas de dos cuadrados para los cuales el espacio cociente resultante no es conexo.

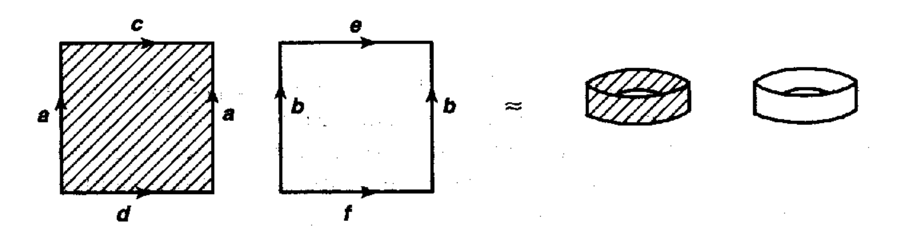


Figura 74.7

Teorema 74.1. *Sea X el espacio obtenido de una colección finita de polígonos pegando aristas según un esquema. Entonces X es un espacio de Hausdorff compacto.*

Demostración. Por simplicidad se trata el caso donde X se obtiene de un solo polígono. El caso general es similar.

Que X es compacto es obvio, ya que la aplicación cociente $\pi : P \to X$ es continua. Para probar que X es de Hausdorff basta demostrar que π es una aplicación cerrada (véase el Lema 73.3). Para ello debemos probar que para cada conjunto cerrado C de P el conjunto $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en P. Ahora bien, $\pi^{-1}\pi(C)$ está formado por puntos de C y todos los puntos de P que se pegan a puntos de C por medio de π. Estos puntos se determinan fácilmente. Para cada arista e de P, sea C_e el subespacio compacto $C \cap e$ de P. Si e_i es una arista de P que se pega a e y si $h_i : e_i \to e$ es el homeomorfismo de pegado, entonces el conjunto $D_e = \pi^{-1}\pi(C) \cap e$ contiene

al espacio $h_i(C_{e_i})$. Claramente D_e es igual a la unión de C_e y los espacios $h_i(C_{e_i})$ cuando e_i recorre todas las aristas de P que se pegan a e. Esta unión es compacta; por tanto es cerrada en e y en P.

Como $\pi^{-1}\pi(C)$ es la unión del conjunto C y los conjuntos D_e, cuando e recorre todos las aristas de P, éste es cerrado en P, como deseábamos. ■

Observemos que si X se obtiene pegando las aristas de un polígono, la aplicación cociente π puede aplicar todos los vértices del polígono en un solo punto de X, o puede que no. En el caso del toro del Ejemplo 3, la aplicación cociente satisface esta condición, pero no la satisface en los casos de la bola y la esfera de los Ejemplos 1 y 2. Es una buena noticia cuando π satisface esa condición, pues en tal caso se puede calcular fácilmente el grupo fundamental de X:

Teorema 74.2. *Sean P un polígono y*

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots (a_{i_n})^{\epsilon_n}$$

un esquema para las aristas de P. Sean X el espacio cociente resultante y $\pi : P \to X$ la aplicación cociente. Si π aplica todos los vértices de P en un punto $x_0 \in X$ y si $a_1, \ldots, a_k$ son las distintas etiquetas del esquema, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de k generadores $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ por el menor subgrupo normal que contiene al elemento

$$(\alpha_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots (\alpha_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

Demostración. La demostración es similar a la que se hizo para el toro en §73. Puesto que π aplica todos los vértices de P en un punto de X, el espacio $A = \pi(\operatorname{Fr} P)$ es una unión por un punto de k círculos. Para cada i, escojamos una arista de P con la etiqueta a_i. Sea f_i la aplicación lineal positiva de I en esta arista orientada en sentido contrario a las agujas del reloj y pongamos $g_i = \pi \circ f_i$. Entonces los lazos $g_1, \ldots, g_k$ representan un conjunto de generadores libres para $\pi_1(A, x_0)$. El lazo f dando una vuelta alrededor de $\operatorname{Fr} P$ en sentido contrario a las agujas del reloj genera el grupo fundamental de $\operatorname{Fr} P$, y el lazo $\pi \circ f$ es igual al lazo

$$(g_{i_1})^{\epsilon_1} * \cdots * (g_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

El teorema se sigue ahora del Teorema 72.1. ■

Definición. Considere el espacio obtenido de un polígono P de $4n$ lados por medio del esquema

$$(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \cdots (a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}).$$

Este espacio se llama ***suma conexa de n toros***, o simplemente ***n-toro***, y se indicará por $T \# \cdots \# T$.

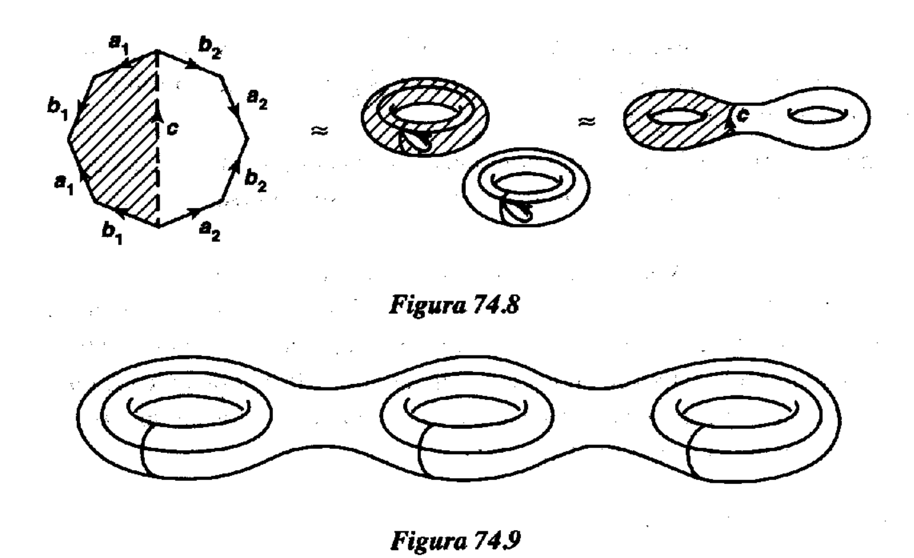


Figura 74.8

Figura 74.9

En la Figura 74.8 se esboza la suma conexa de dos toros, o 2-toro. Si separamos el polígono P a lo largo de la línea c, cada uno de los trozos resultantes representa un toro al que se le ha quitado un disco abierto. Si se pegan los dos trozos a lo largo de la curva c, se obtiene el espacio que se introdujo en §60 y se llamó ***doble toro***. Un argumento similar prueba que el 3-toro $T\#T\#T$ puede ser esbozado como la superficie de la Figura 74.9.

Teorema 74.3. *Sea X el n-toro. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de $2n$ generadores $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ por el menor subgrupo normal que contiene al elemento*

$$[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] \cdots [\alpha_n, \beta_n]$$

donde, como es habitual, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Demostración. Para aplicar el Teorema 74.2 debemos probar que con el esquema para X, todos los vértices del polígono pertenecen a la misma clase de equivalencia. Se deja esto para comprobación del lector. ∎

Definición. Sea $m > 1$. Se considera el espacio obtenido de un polígono P de $2m$ lados por medio del esquema

$$(a_1a_1)(a_2a_2)\cdots(a_ma_m).$$

Este espacio se llama ***suma conexa de m planos proyectivos*** o, simplemente, ***m-plano proyectivo***, y se indicará por $P^2\#\cdots\#P^2$.

El 2-plano proyectivo $P^2 \# P^2$ se esboza en la Figura 74.10, donde se indica cómo este espacio se obtiene a partir de dos copias del plano proyectivo quitando un disco abierto de cada una de ellas y pegando los espacios resultantes a lo largo de las fronteras de los discos eliminados. Como con el propio P^2, no existe una forma cómoda de imaginar el m-plano proyectivo como una superficie de $\mathbb{R}^3$, pues de hecho no se puede embeber en $\mathbb{R}^3$. A veces, sin embargo, lo dibujamos en $\mathbb{R}^3$ como una superficie que se interseca a sí misma (entonces se habla de una superficie *inmersa* más bien que embebida). Este aspecto será tratado en los ejercicios.

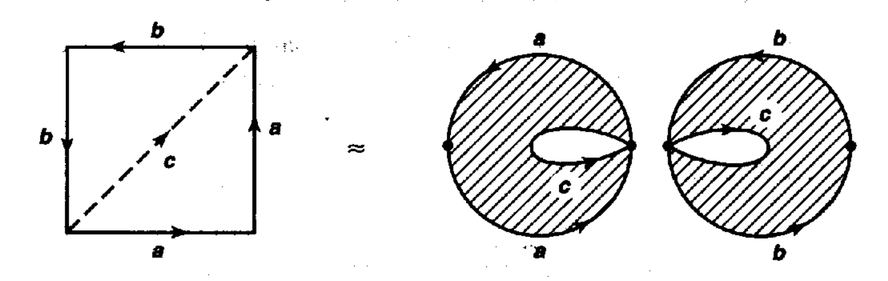


Figura 74.10

Teorema 74.4. *Sea X el m-plano proyectivo. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de m generadores $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ por el menor subgrupo normal que contiene al elemento*

$$(\alpha_1)^2(\alpha_2)^2 \cdots (\alpha_m)^2.$$

Demostración. Basta comprobar que con el esquema para X, todos los vértices del polígono pertenecen a la misma clase de equivalencia. Esto se deja para comprobación del lector. ∎

Existen otras muchas formas de obtener superficies compactas. Por ejemplo, se puede quitar un disco abierto de cada uno de los espacios P^2 y T, y pegar los espacios resultantes a lo largo de las fronteras de los discos eliminados. Se puede comprobar que este espacio puede obtenerse de un polígono de 6 lados por medio del esquema $aabcb^{-1}c^{-1}$. Pero nos detendremos aquí, pues resulta que ya hemos obtenido un listado completo de las superficies conexas compactas. Este es el básico *teorema de clasificación de superficies*, que consideraremos en breve.

Ejercicios

2. Considere el espacio X obtenido de un polígono de siete lados por medio del esquema $abaaab^{-1}a^{-1}$. Demuestre que el grupo fundamental de X es el producto libre de dos grupos cíclicos. [*Indicación:* véase el Teorema 68.7.]

3. La ***botella de Klein*** K es el espacio obtenido de un cuadrado por medio del esquema $aba^{-1}b$. La Figura 74.11 representa K como una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$.

(a) Halle una presentación del grupo fundamental de K.

(b) Halle una aplicación recubridora de dos hojas $p : T \to K$. Describa el homomorfismo inducido entre los grupos fundamentales.

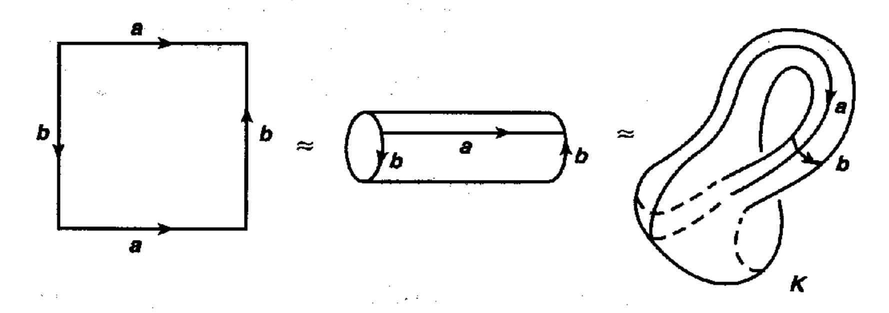


Figura 74.11

4. (a) Demuestre que K es homeomorfa a $P^2 \# P^2$. [*Indicación:* corte el cuadrado de la Figura 74.11 a lo largo de una diagonal y pegue los triángulos resultantes a lo largo de la arista b.]

(b) Pruebe cómo dibujar el 4-plano proyectivo como una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$.

5. La cinta de Möbius M no es una superficie, sino que se trata de una "superficie con borde". Pruebe que M es homeomorfa al espacio que se obtiene suprimiendo un disco abierto de P^2.

6. Si $n > 1$, pruebe que el grupo fundamental del n-toro no es abeliano. [*Indicación:* sea G el grupo libre generado por el conjunto $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}$ y F el libre generado por $\{\gamma, \delta\}$. Considere el homomorfismo de G en F que lleva α_1 y β_1 a γ y los restantes α_i y β_i a δ.]

7. Si $m > 1$, pruebe que el grupo fundamental del m-plano proyectivo no es abeliano. [*Indicación:* existe un homomorfismo que aplica este grupo en el grupo $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$.]

§75 Homología de superficies

Aunque hemos conseguido obtener presentaciones del grupo fundamental de un cierto número de superficies, debemos detenernos a pensar qué hemos logrado en realidad. ¿Podemos deducir de nuestros cálculos que el doble toro y el triple toro son topológicamente distintos? No de forma inmediata, pues, como sabemos, carecemos de un procedimiento efectivo para determinar, a partir de las presentaciones de dos grupos, si esos grupos son isomorfos. Las cosas resultan más satisfactorias si pasamos al grupo abeliano $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, donde $\pi_1 = \pi_1(X, x_0)$, pues entonces dispondremos de algunos invariantes con los que trabajar. En esta sección exploraremos esta situación.

Sabemos que si X es un espacio conexo por caminos y α es un camino en X de x_0 a x_1, entonces existe un isomorfismo $\hat{\alpha}$ del grupo fundamental en x_0 en el grupo fundamental en x_1, pero el isomorfismo depende del camino α. Un resultado más fuerte es válido para el grupo $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$. En este caso, el isomorfismo del "grupo fundamental abelianizado" basado en x_0 con el basado en x_1, inducido por α, es *independiente* de la elección del camino α.

Para verificar este hecho, basta probar que si α y β son dos arcos de x_0 a x_1, entonces el arco $g = \alpha * \bar{\beta}$ induce el isomorfismo identidad de $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ consigo mismo. Esto es fácil. Si $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, se tiene

$$\hat{g}[f] = [\bar{g} * f * g] = [g]^{-1} * [f] * [g].$$

Cuando pasamos a las clases en el grupo abeliano $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$, vemos que $\hat{g}$ induce la aplicación identidad.

Definición. Si X es un espacio conexo por caminos, sea

$$H_1(X) = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Llamaremos a $H_1(X)$ ***primer grupo de homología*** de X. Se omite el punto base porque existe un único isomorfismo inducido por el camino entre los grupos fundamentales abelianizados basados en dos puntos distintos.

En estudios posteriores de topología algebraica puede encontrarse una definición completamente diferente de $H_1(X)$. En efecto, se introducen los grupos $H_n(X)$, llamados ***grupos de homología*** de X, que se definen para todo $n \geq 0$. Se trata de grupos abelianos que son invariantes topológicos de X y son de capital importancia a la hora de aplicar resultados algebraicos a problemas topológicos. Un teorema debido a W. Hurewicz establece una conexión entre estos grupos y los grupos de homotopía de X. Ello implica, en particular, que si X es conexo por caminos, el primer grupo de homología $H_1(X)$ de X es isomorfo al grupo fundamental abelianizado de X. Ese

teorema motiva la elección de nuestra notación para el grupo fundamental abelianizado.

Para el cálculo de $H_1(X)$ de las superficies anteriormente consideradas, se necesita el siguiente resultado:

Teorema 75.1. *Sean F un grupo, N un subgrupo normal de F y $q : F \to F/N$ la proyección. Entonces el homomorfismo proyección*

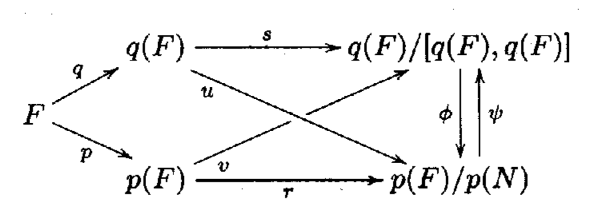
$$p : F \to F/[F, F]$$

induce un isomorfismo

$$\phi : q(F)/[q(F), q(F)] \to p(F)/p(N).$$

Este teorema viene a decir, más o menos, que si se divide F por N y se abelianiza el cociente, se obtiene el mismo resultado que si se abelianiza F y después se divide por la imagen de N en esta abelianización.

Demostración. Se tienen homomorfismos proyección p, q, r y s, como se muestran en el diagrama, donde $q(F) = F/N$ y $p(F) = F/[F, F]$.



Puesto que $r \circ p$ aplica N en 1, induce un homomorfismo $u : q(F) \to p(F)/p(N)$. Entonces, como $p(F)/p(N)$ es abeliano, el homomorfismo u induce un homomorfismo ϕ de $q(F)/[q(F), q(F)]$. Por otro lado, puesto que $s \circ q$ aplica F en un grupo abeliano, se induce un homomorfismo $v : p(F) \to q(F)/[q(F), q(F)]$. Como $s \circ q$ lleva N en 1, lo mismo ocurre con $v \circ p$, por consiguiente, v induce un homomorfismo ψ de $p(F)/p(N)$.

El homomorfismo ϕ se puede describir como sigue: dado un elemento y del grupo $q(F)/[q(F), q(F)]$, se elige un elemento $x \in F$ tal que $s(q(x)) = y$; entonces $\phi(y) = r(p(x))$. El homomorfismo ψ se puede describir de la misma manera. Se sigue que ϕ y ψ son inversos el uno del otro. ■

Corolario 75.2. *Sean F un grupo libre con generadores libres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y N el menor subgrupo normal de F que contiene al elemento x de F. Sean $G = F/N$ y $p : F \to F/[F, F]$ la proyección. Entonces $G/[G, G]$ es isomorfo al cociente de $F/[F, F]$, que es abeliano libre con base $p(\alpha_1), \ldots, p(\alpha_n)$, por el subgrupo generado por $p(x)$.*

Demostración. Obsérvese que como N está generado por x y todos sus conjugados, el grupo $p(N)$ está generado por $p(x)$. El corolario se sigue entonces del teorema anterior. ■

Teorema 75.3. *Si X es la suma conexa de n toros, entonces $H_1(X)$ es un grupo abeliano libre de rango $2n$.*

Demostración. Según el corolario anterior, el Teorema 74.3 implica que $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del grupo abeliano libre F' sobre el conjunto $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ por el subgrupo generado por el elemento $[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n]$ donde, como es habitual, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Como el grupo F' es abeliano, este elemento es igual al elemento neutro. ■

Teorema 75.4. *Si X es la suma conexa de m planos proyectivos, entonces el subgrupo de torsión $T(X)$ de $H_1(X)$ es de orden 2 y $H_1(X)/T(X)$ es un grupo abeliano libre de rango $m-1$.*

Demostración. Según el corolario anterior, el Teorema 74.4 implica que $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del grupo abeliano libre F' sobre el conjunto $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ por el subgrupo generado por el elemento $(\alpha_1)^2 \cdots (\alpha_m)^2$. Si cambiamos a notación aditiva (como es habitual cuando se trabaja con grupos abelianos), éste es el subgrupo generado por el elemento $2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m)$. Hagamos un cambio de base en el grupo F'. Si ponemos $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, entonces los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta$ forman una base de F'; cualquier elemento de F' se puede escribir de manera única en función de esos elementos. El grupo $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del grupo abeliano libre sobre $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta$ por el subgrupo generado por 2β. Dicho de otra manera, $H_1(X)$ es isomorfo al cociente del m-producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ por el subgrupo $0 \times \cdots \times 0 \times 2\mathbb{Z}$. El teorema se sigue inmediatamente. ■

Teorema 75.5. *Sean T_n y P_m la suma conexa de n toros y de m planos proyectivos, respectivamente. Entonces las superficies $S^2, T_1, T_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots,$ son topológicamente distintas.*

Ejercicios

1. Calcule $H_1(P^2 \# T)$. Suponiendo que la lista de superficies compactas dada en el Teorema 75.5 es una lista completa, ¿a cuál de aquellas superficies es homeomorfa $P^2 \# T$?
2. Si K es la botella de Klein, calcule $H_1(K)$ directamente.

3. Sea X el espacio cociente obtenido de un polígono de ocho lados P pegando sus aristas según el esquema $acadbcb^{-1}d$.

(a) Compruebe que todos los vértices de P se aplican en el mismo punto del espacio cociente X por la aplicación de pegado.

(b) Calcule $H_1(X)$.

(c) ¿A qué superficie de las dadas en el Teorema 75.5 es X homeomorfo?

***4.** Sea X el espacio cociente obtenido de un polígono de ocho lados P pegando sus aristas según el esquema $abcdad^{-1}cb^{-1}$. Sea $\pi : P \to X$ la aplicación cociente.

(a) Pruebe que π no aplica todos los vértices de P en el mismo punto de X.

(b) Determine el espacio $A = \pi(\operatorname{Fr} P)$ y calcule su grupo fundamental.

(c) Calcule $\pi_1(X, x_0)$ y $H_1(X)$.

(d) ¿A qué superficie de las dadas en el Teorema 75.5 es X homeomorfo?

§76 Cortar y pegar

Para probar el teorema de clasificación de superficies necesitamos hacer uso de ciertos argumentos geométricos que requieren las llamadas técnicas de "cortar y pegar". Éstas muestran la manera de conseguir un espacio X que se obtiene pegando aristas de uno o más polígonos, según un esquema, y de representar X por medio de una colección distinta de polígonos y un esquema distinto.

En primer lugar, veamos qué se entiende por "cortar" un polígono. Sea P un polígono con vértices sucesivos $p_0, \ldots, p_n = p_0$. Dado k, con $1 < k < n-1$, se consideran los polígonos Q_1, con vértices sucesivos $p_0, p_1, \ldots, p_k, p_0$, y Q_2 con vértices sucesivos $p_0, p_k, \ldots, p_n = p_0$. Ambos tienen en común la arista p_0p_k y P es su unión.

Aplíquese a Q_1 una traslación de $\mathbb{R}^2$ para obtener un polígono Q_1' disjunto de Q_2; entonces Q_1' tiene vértices sucesivos $q_0, q_1, \ldots, q_k, q_0$, donde q_i es la imagen de p_i por la traslación. Se dirá entonces que los polígonos Q_1' y Q_2 se han obtenido ***cortando P*** a lo largo de la arista p_0p_k. La región P es homeomorfa al espacio cociente de Q_1' y Q_2 obtenido pegando la arista q_0q_k de Q_1' a la arista p_0p_k de Q_2 mediante la aplicación lineal positiva de una arista en la otra (véase la Figura 76.1).

Se considerará ahora el proceso inverso. Supongamos que nos dan dos polígonos disjuntos Q_1', con vértices sucesivos $q_0, \ldots, q_k, q_0$ y Q_2 con vértices sucesivos $p_0, p_k, \ldots, p_n = p_0$. Supongamos que construimos un espacio cociente pegando la arista q_0q_k de Q_1' a la arista p_0p_k de Q_2 mediante la aplicación lineal positiva de una arista en la otra. Queremos representar este espacio por un polígono.

Eso se hace de la siguiente manera: los puntos de Q_2 están sobre un círculo y se ordenan en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Escojamos puntos

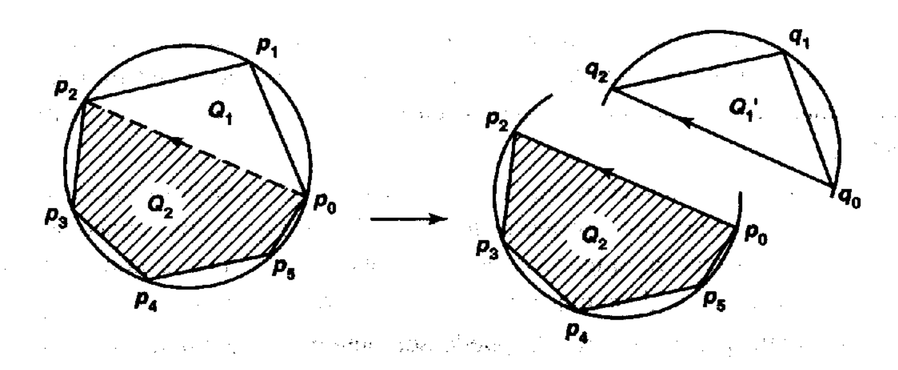


Figura 76.1

$p_1, \ldots, p_{k-1}$ en ese círculo de tal manera que $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k$ estén ordenados en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y sea Q_1 el polígono formado con esos vértices. Existe un homeomorfismo entre Q_1' y Q_1 que lleva q_i en p_i, para cada i, y aplica la arista q_0q_k de Q_1' linealmente en la arista p_0p_k de Q_2. Por tanto, el espacio cociente en cuestión es homeomorfo a P, que es la unión de Q_1 y Q_2. Se dirá que P se obtiene ***pegando*** $\boldsymbol{Q_1'}$ ***y*** $\boldsymbol{Q_2}$ a lo largo de las aristas indicadas (véase la Figura 76.2).

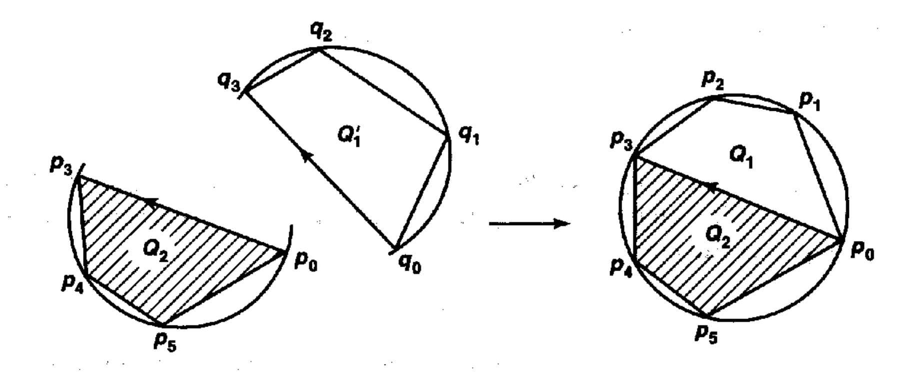


Figura 76.2

Planteémonos la siguiente cuestión: si un polígono P tiene un esquema, ¿qué efecto produce cortar P a lo largo de una arista sobre el esquema? Con mayor precisión, supongamos que disponemos de una colección de polígonos disjuntos $P_1, \ldots, P_m$ y un esquema para estos polígonos, por ejemplo $w_1, \ldots, w_m$, donde w_i es un esquema de las aristas de P_i. Supongamos que X es el espacio cociente que se obtiene de ese esquema. Si cortamos P_1 a lo largo de la arista p_0p_k, ¿qué ocurre? Obtenemos $m+1$ polígonos $Q_1', Q_2, P_2, \ldots, P_m$; para conseguir el espacio X de estos polígonos, necesitamos un pegado adicional a lo largo de una arista. Para este nuevo pegado requerido se introducirá una nueva etiqueta que se asignará a las aristas q_0q_k y p_0p_k

que se introdujeron. Puesto que la orientación de p_0 a p_k es contraria a las agujas del reloj para Q_2 y la orientación de q_0 a q_k es a favor de las agujas del reloj para Q_1', esta etiqueta tendrá exponente $+1$ cuando aparezca en el esquema de Q_2 y exponente -1 para Q_1'.

Para ser más concretos, escribamos el esquema w_1 de P_1 de la forma $w_1 = y_0 y_1$, donde y_0 se compone de los k primeros términos de w_1 e y_1 de los demás. Sea c una etiqueta que no aparece en ninguno de los esquemas $w_1, \ldots, w_m$. Entónces damos a Q_1' el esquema $y_0 c^{-1}$, a Q_2 el $c y_1$ y para $i > 1$ a P_i su viejo esquema w_i.

Es inmediato que el espacio X puede ser obtenido a partir de los polígonos $Q_1', Q_2, P_2, \ldots, P_m$ por medio de este esquema. Como la composición de aplicaciones cociente es de nuevo una aplicación cociente, no importa si pegamos todas las aristas de una vez o por el contrario pegamos las aristas $p_0 p_k$ y $q_0 q_k$ antes de pegar las otras.

Por supuesto, este proceso se puede invertir. Si X está representado por un esquema de los polígonos $Q_1', Q_2, P_2, \ldots, P_m$ y si el esquema indica que una arista del primero se pega con una del segundo (*y ninguna otra arista se pega a ellas*), podemos llevar a cabo el pegado para representar X mediante un esquema para las m regiones $P_1, \ldots, P_m$.

Todo lo anterior se recoge formalmente en el siguiente:

Teorema 76.1. *Sea X el espacio obtenido pegando las aristas de m polígonos según el esquema*

$$(*) \qquad y_0 y_1, w_2, \ldots, w_m.$$

Sea c una etiqueta que no aparece en el esquema anterior. Si ambos y_0 e y_1 tienen longitud al menos dos, entonces X se puede obtener pegando las aristas de $m+1$ polígonos según el esquema

$$(**) \qquad y_0 c^{-1}, c y_1, w_2, \ldots, w_m.$$

Recíprocamente, si X es el espacio obtenido de $m+1$ polígonos por medio del esquema $(**)$, también se puede obtener de m polígonos mediante el esquema $(*)$, siempre que c no aparezca en el esquema $(*)$.

Operaciones elementales con esquemas

Damos un conjunto de operaciones elementales que se pueden realizar sobre un esquema $w_1, \ldots, w_m$ y que no afectan al espacio cociente resultante X. Las dos primeras surgen del teorema que acabamos de enunciar.

(i) *Corte.* Se puede sustituir el esquema $w_1 = y_0 y_1$ por el esquema $y_0 c^{-1}$ y $c y_1$, siempre que c no aparezca en algún otro sitio en el esquema total y que y_0 e y_1 sean de longitud al menos dos.

(ii) *Pegado*. Se puede sustituir el esquema y_0c^{-1} y cy_1 por el esquema y_0y_1, siempre que c no aparezca en algún otro sitio en el esquema total.

(iii) *Reetiquetado*. Se pueden sustituir todas las presencias de una etiqueta dada por alguna otra etiqueta que no aparezca en otro lugar del esquema. Análogamente, se puede cambiar el signo del exponente de todas las apariciones de una etiqueta dada a; esto equivale a invertir todas las orientaciones de todas las aristas con etiqueta "a". Ninguna de estas alteraciones afecta a la aplicación de pegamiento.

(iv) *Permuta*. Se puede sustituir uno cualquiera de los esquemas w_i por una permutación cíclica de w_i. Específicamente, si $w_i = y_0y_1$, se puede sustituir w_i por y_1y_0. Esto significa reenumerar los vértices del polígono P_i comenzando con un vértice distinto, sin afectar al espacio cociente resultante.

(v) *Inversión*. Se puede sustituir el esquema

$$w_i = (a_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots (a_{i_n})^{\epsilon_n}$$

por su inverso

$$w_i^{-1} = (a_{i_n})^{-\epsilon_n} \cdots (a_{i_1})^{-\epsilon_1}.$$

Esto significa simplemente "una inversión del polígono P_i". El orden de los vértices se invierte y por tanto la orientación de cada arista. El espacio cociente no se ve afectado.

(vi) *Eliminación*. Se puede sustituir el esquema $w_i = y_0aa^{-1}y_1$ por el esquema y_0y_1, siempre que a no aparezca en otro sitio del esquema total y ambos y_0 e y_1 sean de longitud al menos dos.

Este último resultado se sigue del argumento de tres pasos que se indica en la Figura 76.3, aunque sólo uno de los pasos es nuevo. Sean b y c las etiquetas que no aparecen en otro sitio en el esquema total. En primer lugar se sustituye $y_0aa^{-1}y_1$ por el esquema y_0ab y $b^{-1}a^{-1}y_1$ usando la operación de corte (i). Entonces las aristas de etiquetas a y b de cada polígono se combinan para formar una nueva arista con una nueva etiqueta. Este es el paso nuevo. El resultado es el esquema y_0c y $c^{-1}y_1$, que se sustituye por el esquema simple y_0y_1 por medio de la operación de pegado (ii).

(vii) *Añadido*. Es la operación inversa de (vi). Consiste en sustituir el esquema y_0y_1 por el $y_0aa^{-1}y_1$, siendo a una etiqueta que no aparece en otro lugar del esquema total. En realidad no se hará uso de esta operación.

Definición. Dos esquemas de colecciones de polígonos se dicen ***equivalentes*** si uno se puede conseguir del otro mediante una sucesión de operaciones elementales con esquemas. Como la inversa de cada operación elemental es también elemental, se trata de una relación de equivalencia.

EJEMPLO 1. La botella de Klein K es el espacio que se obtiene del esquema $aba^{-1}b$. En los ejercicios de §74 se pidió probar que K es homeomorfo al plano proyectivo de dos

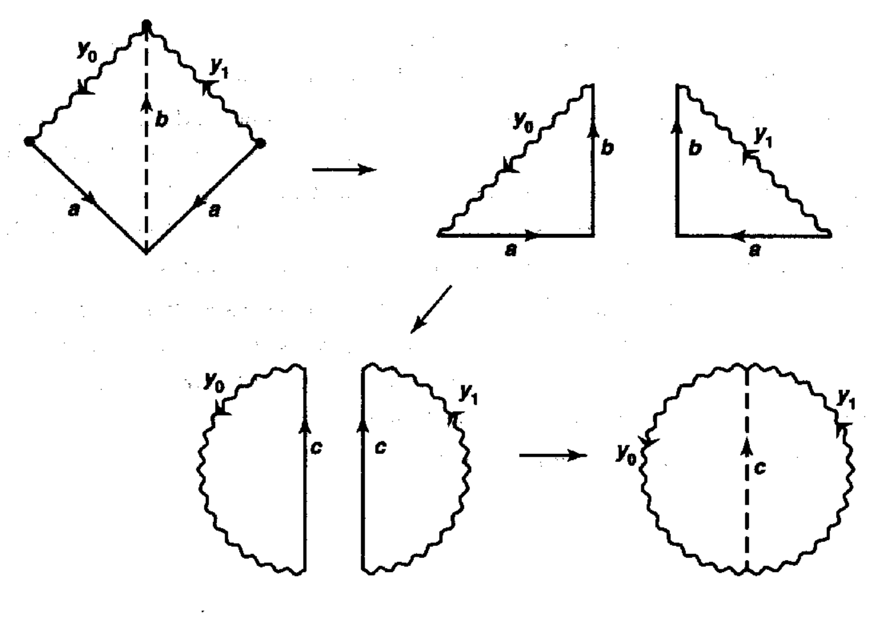


Figura 76.3

hojas $P^2 \# P^2$. El argumento geométrico que se sugirió allí se compone de hecho de las siguientes operaciones elementales:

$aba^{-1}b \to abc^{-1}$	y $ca^{-1}b$	cortando
$\to c^{-1}ab$	y $b^{-1}ac^{-1}$	permutando el primero e invirtiendo el segundo
$\to c^{-1}aac^{-1}$		pegando
$\to aacc$		permutando y reetiquetando.

Ejercicios

1. Considere el espacio cociente X que se obtiene de dos polígonos por medio del esquema $w_1 = acbc^{-1}$ y $w_2 = cdba^{-1}d$.

(a) Si se pegan estas regiones a lo largo de la arista "a", se puede representar X como el cociente de un polígono P de siete lados. ¿Cuál es un esquema de P? ¿Cuál es la sucesión de operaciones elementales que se necesitan para lograr ese esquema?

(b) Repita (a) pegando a lo largo de "b".

(c) Explique por qué no se puede pegar a lo largo de "c" para obtener el esquema $acbdba^{-1}d$ como una forma de representar X.

2. Considere el espacio cociente X que se obtiene de dos polígonos por medio del esquema $w_1 = abcc$ y $w_2 = c^{-1}c^{-1}ab$. La siguiente sucesión de operaciones

elementales:

$$\begin{aligned} abcc \quad \text{y} \quad c^{-1}c^{-1}ab &\to ccab \quad \text{y} \quad b^{-1}a^{-1}cc && \text{permutando e invirtiendo} \\ &\to ccaa^{-1}cc && \text{pegando} \\ &\to cccc && \text{eliminando} \end{aligned}$$

indica que X es homeomorfo al sombrero de asno de 4 picos. La sucesión de operaciones elementales:

$$\begin{aligned} abcc \quad \text{y} \quad c^{-1}c^{-1}ab &\to abcc^{-1}ab && \text{pegando} \\ &\to abab && \text{eliminando} \end{aligned}$$

indica que X es homeomorfo a P^2. Pero esos espacios *no* son homeomorfos. ¿Qué argumento (si lo hay) es correcto?

§77 El teorema de clasificación

Probaremos en esta sección la parte geométrica de nuestro teorema de clasificación de superficies. Demostraremos que cada espacio obtenido pegando pares de aristas de un polígono es homeomorfo ya a S^2, ya al n-toro T_n, ya al m-plano proyectivo P_m. Más adelante discutiremos el problema de probar que cada superficie compacta se puede obtener de esta manera.

Supongamos que $w_1, \ldots, w_k$ es un esquema de los polígonos $P_1, \ldots, P_k$. Si cada etiqueta aparece exactamente *dos veces* en el esquema, lo llamaremos un esquema ***propio***. Obsérvese el siguiente hecho importante:

Si se realiza una operación elemental sobre un esquema propio, se obtiene otro esquema propio.

Definición. Sea w un esquema propio de un polígono. Diremos que w es de ***tipo toro*** si cada etiqueta aparece en w una vez con exponente $+1$ y otra vez con exponente -1. En otro caso se dirá que w es de ***tipo proyectivo***.

Comenzamos considerando un esquema w de tipo proyectivo. Probaremos que w es equivalente a un esquema (de la misma longitud) en el que todas las etiquetas que tienen el mismo exponente están por pares y aparecen al comienzo del esquema. Es decir, w es equivalente a un esquema de la forma

$$(a_1a_1)(a_2a_2)\cdots(a_ka_k)w_1$$

donde w_1 es de tipo toro o vacío.

Como w es de tipo proyectivo, existe al menos una etiqueta, digamos a, tal que las dos veces que a aparece en el esquema w tiene el mismo exponente. Por tanto, podemos suponer que w tiene la forma

$$w = y_0 a y_1 a y_2$$

donde alguno de los y_i puede ser vacío. Insertaremos corchetes en esta expresión por conveniencia visual, escribiéndola de la forma

$$w = [y_0]a[y_1]a[y_2].$$

Se tiene el siguiente resultado:

Lema 77.1. *Sea w un esquema propio de la forma*

$$w = [y_0]a[y_1]a[y_2]$$

donde alguno de los y_i puede ser vacío. Entonces se tiene la equivalencia

$$w \sim aa[y_0 y_1^{-1} y_2]$$

donde y_1^{-1} indica el inverso formal de y_1.

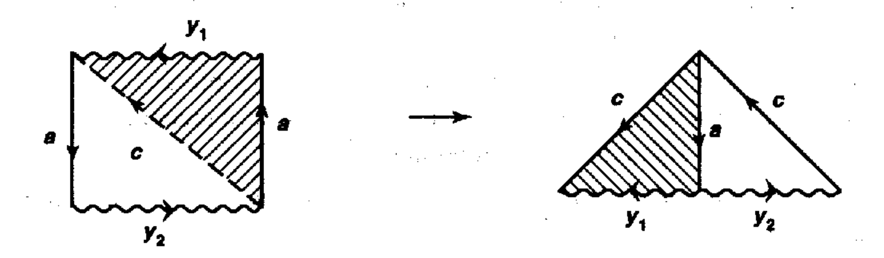


Figura 77.1

Demostración. *Paso 1.* En primer lugar se considera el caso en que y_0 es vacío. Probaremos que

$$a[y_1]a[y_2] \sim aa[y_1^{-1} y_2].$$

Si y_1 es vacío, este resultado es inmediato, mientras que si y_2 es vacío, se sigue de inversión, permuta y reetiquetado. Si ninguno es vacío, se aplica el argumento de cortar y pegar que se indica en la Figura 77.1, seguido de un reetiquetado. Se deja al lector la escritura de la sucesión de operaciones elementales requeridas.

Paso 2. Se considera ahora el caso general. Sea $w = [y_0]a[y_1]a[y_2]$, donde y_0 no es vacío. Si y_1 e y_2 son ambos vacíos, el lema se sigue por permutación. En otro

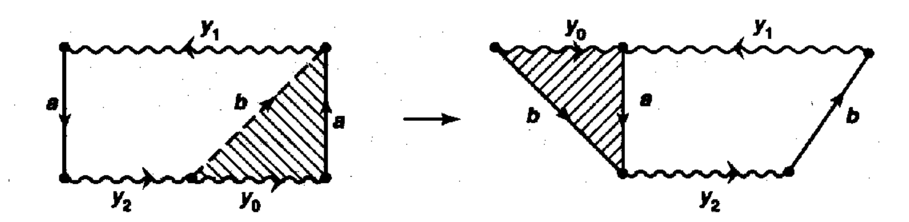


Figura 77.2

caso, se aplica el argumento de cortar y pegar tal como se indica en la Figura 77.2 para demostrar que

$$w \sim b[y_2]b[y_1y_0^{-1}].$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} w &\sim bb[y_2^{-1}y_1y_0^{-1}] && \text{por Paso 1} \\ &\sim [y_0y_1^{-1}y_2]b^{-1}b^{-1} && \text{por inversión} \\ &\sim aa[y_0y_1^{-1}y_2] && \text{por permuta y reetiquetado.} \end{aligned}$$

■

Corolario 77.2. *Si w es un esquema de tipo proyectivo, entonces w es equivalente a un esquema de la misma longitud que tiene la forma*

$$(a_1a_1)(a_2a_2)\cdots(a_ka_k)w_1$$

donde $k \geq 1$ y w_1 es ya vacío, ya de tipo toro.

Demostración. El esquema w se puede escribir de la forma

$$w = [y_0]a[y_1]a[y_2]$$

con lo que el lema anterior implica que w es equivalente a un esquema de la forma $w' = aaw_1$ que tiene la misma longitud que w. Si w_1 es de tipo toro ya hemos terminado; de lo contrario, se puede escribir w' de la forma

$$w' = aa[z_0]b[z_1]b[z_2] = [aaz_0]b[z_1]b[z_2].$$

Aplicando de nuevo el lema anterior, concluimos que w' es equivalente a un esquema w'' de la forma

$$w'' = bb[aaz_0z_1^{-1}z_2] = bbaaw_2$$

donde w'' tiene la misma longitud que w. Si w_2 es de tipo toro, ya hemos acabado; en otro caso, se continúa el argumento como antes. ■

Se sigue de este corolario que si w es un esquema propio de un polígono, entonces ya (1) w es de tipo toro, ya (2) w es equivalente a un esquema de la forma $(a_1a_1)\cdots(a_ka_k)w_1$, donde w_1 es de tipo toro, ya (3) w es equivalente a un esquema de la forma $(a_1a_1)\cdots(a_ka_k)$. En el caso (3) hemos acabado, pues un tal esquema representa una suma conexa de planos proyectivos. Así pues, consideremos los casos (1) y (2).

En este momento, observemos que si w es un esquema de longitud mayor que cuatro de la forma indicada en los casos (1) o (2), y si w contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta pero exponentes de signo opuesto, entonces la operación de cancelación se puede aplicar para reducir w a un esquema más corto que es también de la forma indicada en los casos (1), (2) o (3). Por tanto, podemos reducir w ya a un esquema de longitud cuatro, ya a uno que no contiene dos de tales términos adyacentes.

Esquemas de longitud cuatro son fáciles de manejar, como veremos más adelante, así pues supongamos que w no contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta pero exponentes opuestos. En tal caso, probaremos que w es equivalente a un esquema w', de la misma longitud que w, que tenga la forma

$$w' = aba^{-1}b^{-1}w'' \qquad \text{en el caso (1) o}$$
$$w' = (a_1a_1)\cdots(a_ka_k)aba^{-1}b^{-1}w'' \qquad \text{en el caso (2)}$$

donde w'' es de tipo toro o vacío. Esta es la esencia del siguiente lema:

Lema 77.3. *Sea w un esquema propio de la forma $w = w_0w_1$, donde w_1 es un esquema de tipo toro que no contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta. Entonces w es equivalente a un esquema de la forma w_0w_2, donde w_2 tiene la misma longitud que w_1 y tiene la forma*

$$w_2 = aba^{-1}b^{-1}w_3$$

donde w_3 es de tipo toro o vacío.

Demostración. Se trata de la demostración más elaborada de esta sección, que involucra tres operaciones de cortar y pegar. En primer lugar probaremos que, cambiando las etiquetas y exponentes, si fuera necesario, w se puede escribir de la forma

$$(*) \qquad w = w_0[y_1]a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_4]b^{-1}[y_5]$$

donde alguno de los y_i puede ser vacío.

Entre las etiquetas que aparecen en w_1, sea a una cuyas dos apariciones (con exponentes opuestos, por supuesto) sean tan próximas como sea posible. Y ambas son, por hipótesis, no adyacentes. Cambiando los exponentes, si fuera necesario, podemos

suponer que primero encontramos la etiqueta a y luego a^{-1}. Sea b cualquier etiqueta entre a y a^{-1}, que podemos suponer con exponente $+1$. Entonces el término b^{-1} aparece en w_1, pero no se puede dar entre a y a^{-1}, pues éstos los hemos supuesto tan próximos como fuera posible. Si b^{-1} aparece a continuación de a^{-1}, ya hemos terminado. Si aparece antes de a, entonces todo lo que necesitamos hacer es cambiar los exponentes de las etiquetas b y después intercambiar las etiquetas a y b para obtener un esquema de la forma deseada.

Por tanto, supongamos que w tiene la forma $(*)$.

Primer corte y pegado. Veremos que w es equivalente al esquema

$$w' = w_0 a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_1 y_4]b^{-1}[y_5].$$

Para probar este resultado reescribamos w de la forma

$$w = w_0[y_1]a[y_2 b y_3]a^{-1}[y_4 b^{-1} y_5].$$

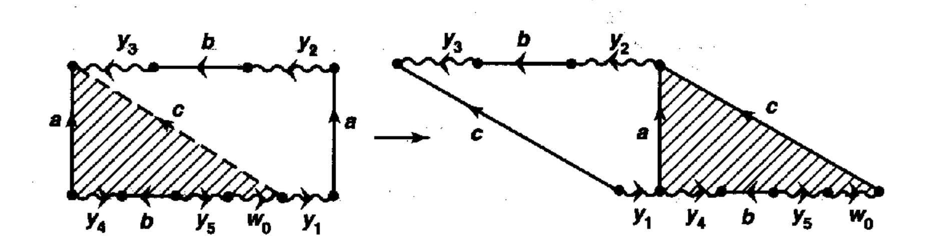


Figura 77.3

Ahora aplicamos el argumento de cortar y pegar indicado en la Figura 77.3 para concluir que

$$\begin{aligned} w &\sim w_0 c[y_2 b y_3]c^{-1}[y_1 y_4 b^{-1} y_5] \\ &\sim w_0 a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_1 y_4]b^{-1}[y_5] \end{aligned}$$

por reetiquetado. Nótese que el corte en c se puede hacer porque ambos polígonos resultantes tienen al menos tres lados.

Segundo corte y pegado. Dado

$$w' = w_0 a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_1 y_4]b^{-1}[y_5]$$

probaremos que w' es equivalente al esquema

$$w'' = w_0 a[y_1 y_4 y_3]ba^{-1}b^{-1}[y_2 y_5].$$

Si todos los esquemas y_1, y_4, y_5 y w_0 son vacíos, entonces el argumento es fácil, pues en este caso

$$\begin{aligned} w' &= a[y_2]b[y_3]a^{-1}b^{-1} \\ &\sim b[y_3]a^{-1}b^{-1}a[y_2] \quad \text{permutando} \\ &\sim a[y_3]ba^{-1}b^{-1}[y_2] \quad \text{reetiquetando} \\ &= w''. \end{aligned}$$

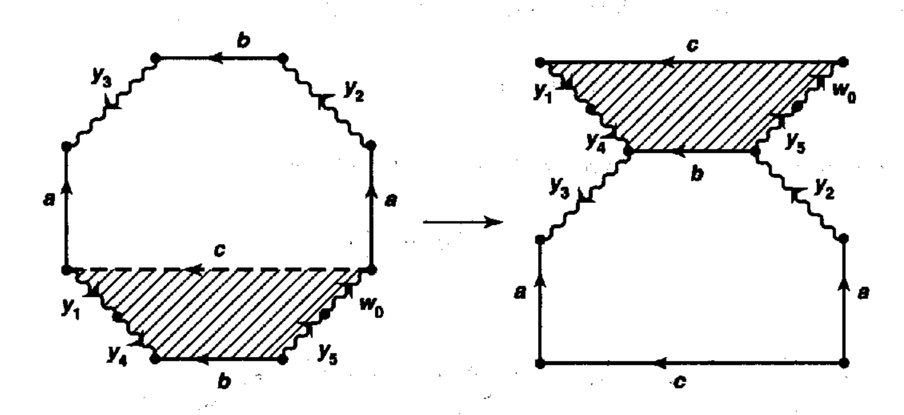


Figura 77.4

En otro caso, se aplica el argumento indicado en la Figura 77.4 para concluir que

$$\begin{aligned} w' &= w_0a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_1y_4]b^{-1}[y_5] \\ &\sim w_0c[y_1y_4y_3]a^{-1}c^{-1}a[y_2y_5] \\ &\sim w_0a[y_1y_4y_3]ba^{-1}b^{-1}[y_2y_5] \quad \text{reetiquetando.} \end{aligned}$$

Tercer corte y pegado. Completamos ahora la demostración. Dado

$$w'' = w_0a[y_1y_4y_3]ba^{-1}b^{-1}[y_2y_5]$$

probaremos que w'' es equivalente al esquema

$$w''' = w_0aba^{-1}b^{-1}[y_1y_4y_3y_2y_5].$$

Si los esquemas w_0, y_5 e y_2 son vacíos, el argumento es fácil, ya que en este caso

$$\begin{aligned} w'' &= a[y_1y_4y_3]ba^{-1}b^{-1} \\ &\sim ba^{-1}b^{-1}a[y_1y_4y_3] \quad \text{permutando} \\ &\sim aba^{-1}b^{-1}[y_1y_4y_3] \quad \text{reetiquetando} \\ &= w'''. \end{aligned}$$

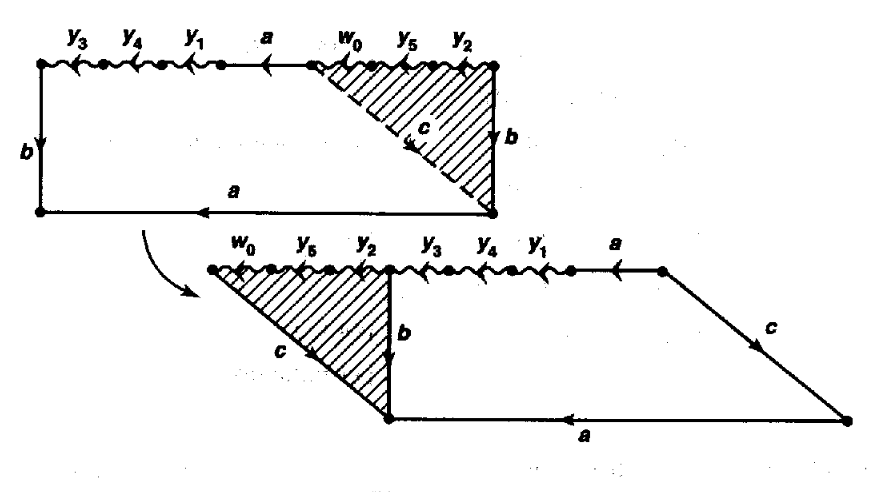


Figura 77.5

En otro caso, se aplica el argumento de la Figura 77.5 para concluir que

$$\begin{aligned} w'' &= w_0 a[y_1 y_4 y_3] b a^{-1} b^{-1} [y_2 y_5] \\ &\sim w_0 c a^{-1} c^{-1} a [y_1 y_4 y_3 y_2 y_5] \\ &\sim w_0 a b a^{-1} b^{-1} [y_1 y_4 y_3 y_2 y_5] \end{aligned}$$

reetiquetando, como queríamos. ■

El paso final de nuestro proceso de clasificación supone probar que una suma conexa de planos proyectivos y toros es equivalente a una suma conexa de planos proyectivos solamente.

Lema 77.4. *Sea w un esquema propio de la forma*

$$w = w_0(cc)(aba^{-1}b^{-1})w_1.$$

Entonces w es equivalente al esquema

$$w' = w_0(aabbcc)w_1.$$

Demostración. Recordemos que el Lema 77.1 establece que para esquemas propios se tiene

(*) $$[y_0]a[y_1]a[y_2] \sim aa[y_0 y_1^{-1} y_2].$$

Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} w &\sim (cc)(aba^{-1}b^{-1})w_1w_0 && \text{permutando} \\ &= cc[ab][ba]^{-1}[w_1w_0] \\ &\sim [ab]c[ba]c[w_1w_0] && \text{por } (*) \text{ leído hacia atrás} \\ &= [a]b[c]b[acw_1w_0] \\ &\sim bb[ac^{-1}acw_1w_0] && \text{por } (*) \\ &= [bb]a[c]^{-1}a[cw_1w_0] \\ &\sim aa[bbccw_1w_0] && \text{por } (*) \\ &\sim w_0aabbccw_1 && \text{permutando.} \end{aligned}$$ ■

Teorema 77.5 (Teorema de clasificación). *Sea X el espacio cociente que se obtiene de un polígono pegando sus aristas por pares. Entonces X es homeomorfo ya a S^2, ya al n-toro T_n, ya al m-plano proyectivo P_m.*

Demostración. Sea w el esquema para el cual se forma el espacio X a partir del polígono P. Entonces w es un esquema propio de longitud al menos cuatro. Veamos que w es equivalente a uno de los siguientes esquemas:

(1) $aa^{-1}bb^{-1}$,

(2) $abab$,

(3) $(a_1a_1)(a_2a_2)\cdots(a_ma_m)$, con $m \geq 2$,

(4) $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\ldots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$, con $n \geq 1$.

El primer esquema da lugar al espacio S^2, y el segundo a P^2, como observamos en los Ejemplos 2 y 4 de §74. El tercero conduce al espacio P_m y el cuarto a T_n.

Paso 1. Sea w un esquema propio de tipo toro. Veamos que w es equivalente ya a un esquema como (1), ya a uno como (4).

Si w tiene longitud cuatro, entonces se puede escribir de una de las formas

$$aa^{-1}bb^{-1} \quad \text{ó} \quad aba^{-1}b^{-1}.$$

El primero es de tipo (1) y el segundo de tipo (4).

Procederemos por inducción sobre la longitud de w. Supongamos que w tiene longitud mayor que cuatro. Si w es equivalente a un esquema más corto de tipo toro, entonces se aplica la hipótesis de inducción. En otro caso, sabemos que w no contiene pares adyacentes de términos con la misma etiqueta. Se aplica el Lema 77.3 (con w_0 vacío) para concluir que w es equivalente a un esquema, con la misma longitud que w, de la forma

$$aba^{-1}b^{-1}w_3$$

donde w_3 es de tipo toro. Obsérvese que w_3 no es vacío, ya que w tiene longitud mayor que cuatro. De nuevo, w_3 no puede contener dos términos adyacentes con la

misma etiqueta, puesto que w no es equivalente a un esquema más corto de tipo toro. Aplicando el lema de nuevo, con $w_0 = aba^{-1}b^{-1}$, se concluye que w es equivalente a un esquema de la forma

$$(aba^{-1}b^{-1})(cdc^{-1}d^{-1})w_4$$

donde w_4 es vacío o de tipo toro. Si w_4 es vacío, ya se ha terminado; de lo contrario se aplica de nuevo el lema. Y así sucesivamente.

Paso 2. Sea ahora w un esquema propio de tipo proyectivo. Veamos que w es equivalente ya a un esquema como (2), ya a uno como (3).

Si w tiene longitud cuatro, el Corolario 77.2 implica que w es equivalente a uno de los esquemas $aabb$ o $aab^{-1}b$. El primero es de tipo (3). El segundo se puede escribir de la forma $aay_1^{-1}y_2$, con $y_1 = y_2 = b$; entonces el Lema 77.1 implica que es equivalente al esquema $ay_1ay_2 = abab$, que es de tipo (2).

Procederemos por inducción sobre la longitud de w. Supongamos que w tiene longitud mayor que cuatro. El Corolario 77.2 nos dice que w es equivalente a un esquema de la forma

$$w' = (a_1a_1)\cdots(a_ka_k)w_1$$

donde $k \geq 1$ y w_1 es de tipo toro o vacío. Si w_1 es vacío, ya hemos acabado. Si w_1 tiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta, entonces w' es equivalente a un esquema más corto de tipo proyectivo y se aplica la hipótesis de inducción. En otro caso, el Lema 77.3 nos dice que w' es equivalente a un esquema de la forma

$$w'' = (a_1a_1)\cdots(a_ka_k)aba^{-1}b^{-1}w_2$$

donde w_2 es vacío o de tipo toro. Entonces se aplica el Lema 77.4 para concluir que w'' es equivalente al esquema

$$(a_1a_1)\cdots(a_ka_k)aabbw_2.$$

Se continúa de la misma manera. Finalmente se consigue un esquema de tipo (3). ∎

Ejercicios

1. Sea X un espacio obtenido pegando pares de aristas de un polígono.
   (a) Demuestre que X es homeomorfo a exactamente uno de los espacios de la lista siguiente: S^2, P^2, K, T_n, $T_n \# P^2$, $T_n \# K$, donde K es la botella de Klein y $n \geq 1$.

(b) Demuestre que X es homeomorfo a exactamente uno de los espacios de la lista siguiente: $S^2, T_n, P^2, K_m, P^2\#K_m$, donde K_m es la suma conexa de m botellas de Klein y $m \geq 1$.

2. (a) Escriba la sucesión de operaciones elementales que se necesitan para llevar a cabo los argumentos que se indican en las Figuras 77.1 y 77.2.

(b) Escriba la sucesión de operaciones elementales que se necesitan para llevar a cabo los argumentos que se indican en las Figuras 77.3, 77.4 y 77.5.

3. La demostración del teorema de clasificación suministra un algoritmo para tomar un esquema propio de un polígono y reducirlo a una de las cuatro formas estándar indicadas en el teorema. Las equivalencias apropiadas son las siguientes:

(i) $[y_0]a[y_1]a[y_2] \sim aa[y_0y_1^{-1}y_2]$.

(ii) $[y_0]aa^{-1}[y_1] \sim [y_0y_1]$ si y_0y_1 tiene longitud al menos cuatro.

(iii) $w_0[y_1]a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_4]b^{-1}[y_5] \sim w_0aba^{-1}b^{-1}[y_1y_4y_3y_2y_5]$.

(iv) $w_0(cc)(aba^{-1}b^{-1})w_1 \sim w_0aabbccw_1$.

Mediante este algoritmo, reduzca cada uno de los siguientes esquemas a una de las formas estándar:

(a) $abacb^{-1}c^{-1}$.

(b) $abca^{-1}cb$.

(c) $abbca^{-1}ddc^{-1}$.

(d) $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$.

(e) $abcda^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}$.

(f) $aabcdc^{-1}b^{-1}d^{-1}$.

(g) $abcdabdc$.

(h) $abcdabcd$.

4. Sea w un esquema propio para un polígono de diez lados. Si w es de tipo proyectivo, ¿qué espacio, de los del Teorema 77.5, representa? ¿Cuál si w es de tipo toro?

§78 Construcción de superficies compactas

Para completar nuestra clasificación de las superficies compactas debemos probar que cada superficie compacta conexa se puede obtener pegando pares de aristas de un polígono. En realidad, probaremos algo ligeramente más débil que eso, pues supondremos que la superficie en cuestión posee lo que se llama una *triangulación*. Se define este concepto como sigue:

Definición. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Un ***triángulo curvo*** en X es un par (A, h) formado por un subespacio A de X y un homeomorfismo $h : T \to A$, donde T es una región triangular cerrada del plano. Si e es una arista de T, entonces $h(e)$ se dice que es una ***arista*** de A; si v es un vértice de T, entonces $h(v)$ se dirá un ***vértice*** de A. Una ***triangulación*** de X es una colección de triángulos curvos $A_1, \ldots, A_n$ en X cuya unión es X, tal que para $i \neq j$, la intersección $A_i \cap A_j$ es bien vacía, bien un vértice de ambos A_i y A_j, bien una arista de ambos. Además, si $h_i : T_i \to A_i$ es el homeomorfismo asociado con A_i, pedimos que cuando $A_i \cap A_j$ sea una arista e de ambos, entonces la aplicación $h_j^{-1} \circ h_i$ defina un homeomorfismo lineal de la arista $h_i^{-1}(e)$ de T_i con la arista $h_j^{-1}(e)$ de T_j. Si X posee una triangulación, se dirá que es ***triangulable***.

Es un resultado básico que cada superficie compacta es triangulable. La demostración es larga, pero no excesivamente difícil (véase [A-S] o [D-M]).

Teorema 78.1. *Si X es una superficie compacta triangulable, entonces X es homeomorfa al espacio cociente obtenido de una colección de triángulos planos disjuntos pegando sus aristas por pares.*

Demostración. Sea $A_1, \ldots, A_n$ una triangulación de X, con homeomorfismos correspondientes $h_i : T_i \to A_i$. Suponemos que los triángulos T_i son disjuntos; entonces las aplicaciones h_i se combinan para definir una aplicación $h : E = T_1 \cup \cdots \cup T_n \to X$ que es automáticamente una aplicación cociente (E es compacto y X es de Hausdorff). Además, como la aplicación $h_j^{-1} \circ h_i$ es lineal, siempre que A_i y A_j se corten en una arista, h pega las aristas de T_i y T_j mediante un homeomorfismo lineal.

Dos cosas tenemos que probar. Primera, tenemos que demostrar que para cada arista e de un triángulo A_i, existe exactamente otro triángulo A_j tal que $A_i \cap A_j = e$. Esto probará que la aplicación cociente h pega las aristas de los triángulos T_i *por pares*.

La segunda es menos obvia. Tenemos que ver que si la intersección $A_i \cap A_j = v$ es un vértice de ambos, entonces existe una sucesión de triángulos que tiene a v por vértice, comenzando por A_i y acabando en A_j, tal que la intersección de cada dos triángulos consecutivos de la sucesión es una arista de ambos (véase la Figura 78.1).

Si no fuera este el caso, se podría dar una situación como la de la Figura 78.2. Aquí no se puede especificar la aplicación cociente h meramente especificando cómo se pegan las aristas de los triángulos T_i, sino que habría también que indicar cómo se identifican los vértices cuando la identificación no viene forzada por el pegamiento de aristas.

Paso 1. Enfrentémonos, en primer lugar, con el segundo problema. Probaremos que, puesto que el espacio X es una superficie, una situación tal como la que se indica en la Figura 78.2 no se puede presentar.

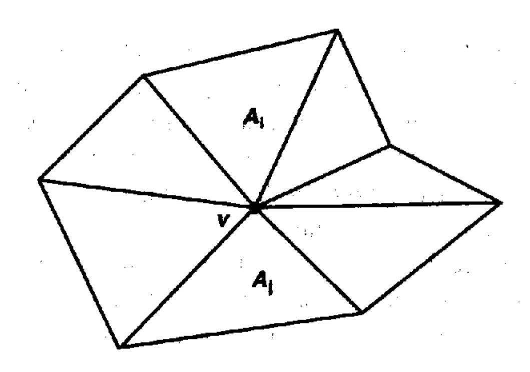


Figura 78.1

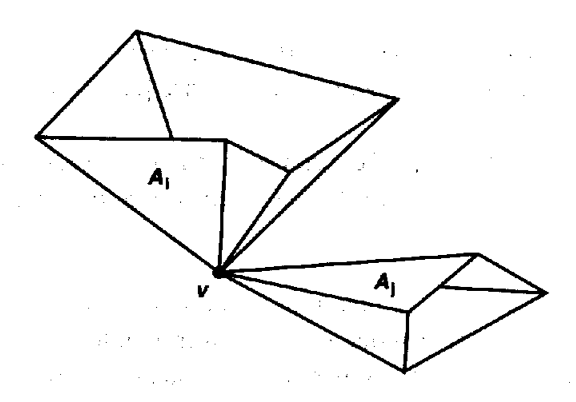


Figura 78.2

Dado v, dos triángulos A_i y A_j que tienen a v como vértice se dirá que son *equivalentes* si existe una sucesión de triángulos que tengan también a v como vértice, comenzando con A_i y acabando con A_j, tal que cada dos triángulos consecutivos se cortan en una arista común. Si existe más de una clase de equivalencia, sea B la unión de los triángulos de una clase y C la unión de los otros. Los conjuntos B y C se cortan solamente en v, ya que ningún triángulo de B tiene una arista común con uno de C. Concluimos que *para cada entorno suficientemente pequeño W de v en X, el espacio $W - v$ no es conexo.*

Por otra parte, si X es una superficie, entonces v tiene un entorno homeomorfo a una 2-bola abierta. En este caso, v tiene entornos W arbitrariamente pequeños tales que $W - v$ es conexo.

Paso 2. Veamos ahora la primera cuestión. Comenzaremos probando que, dada una arista e del triángulo A_i, existe *al menos un* triángulo adicional A_j que tiene a e como arista. Esto es una consecuencia del siguiente resultado:

Si X es un triángulo plano y x es un punto del interior de una de las aristas de X, entonces x no tiene un entorno en X homeomorfo a una 2-bola abierta.

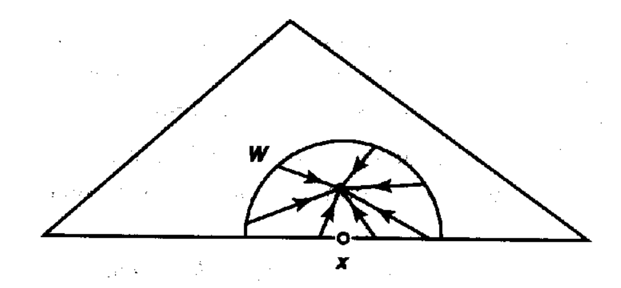


Figura 78.3

Para probar esto, observamos que x tiene entornos arbitrariamente pequeños W para los cuales $W - x$ es simplemente conexo. En efecto, si W es el ϵ-entorno de $x \in X$, para ϵ pequeño, entonces es fácil ver que $W - x$ es contractible a un punto. Véase la Figura 78.3.

Por otro lado, supongamos que existe un entorno U de x que es homeomorfo a una bola abierta de $\mathbb{R}^2$, de manera que el homeomorfismo lleve x en el origen $\mathbf{0}$. Veamos que x *no* tiene entornos W arbitrariamente pequeños tales que $W - x$ es simplemente conexo.

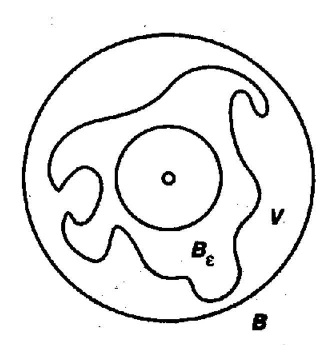


Figura 78.4

En efecto, sea B la bola abierta unidad de $\mathbb{R}^2$ centrada en el origen, y supongamos que V es un entorno cualquiera de $\mathbf{0}$ que está contenido en B. Escojamos ϵ de manera que la bola abierta B_ϵ, centrada en el origen y de radio ϵ, esté en V, y consideremos las aplicaciones de inclusión

$$\begin{array}{ccc} B_\epsilon - \mathbf{0} & \xrightarrow{\quad i \quad} & B - \mathbf{0} \\ & {}_{j}\searrow \quad \nearrow_{k} & \\ & V - \mathbf{0} & \end{array}$$

La inclusión i es homotópica al homeomorfismo $h(x) = x/\epsilon$, así que induce un isomorfismo de grupos fundamentales. Por tanto, k_* es sobreyectiva; se sigue que $V - \mathbf{0}$ no puede ser simplemente conexo. Véase la Figura 78.4.

Paso 3. Ahora probamos que dada una arista e del triángulo A_i, existe *no más de un* triángulo adicional A_j que tiene a e como arista. Es una consecuencia del siguiente resultado:

Sea X la unión de k triángulos en $\mathbb{R}^3$, cada par de los cuales se corta en la arista común e. Sea x un punto del interior de e. Si $k \geq 3$, entonces x no tiene un entorno en X homeomorfo a una 2-bola abierta.

Probaremos que no existe entorno alguno W de x en X tal que $W - x$ tenga grupo fundamental abeliano. Se sigue que ningún entorno de x es homeomorfo a una 2-bola abierta.

Para comenzar, veamos que si A es la unión de todas las aristas de los triángulos de X que son distintas de e, entonces el grupo fundamental de A no es abeliano. El espacio A es la unión de una colección de k arcos, cada par de los cuales se corta en sus extremos. Si B es la unión de tres de los arcos que forman A, entonces existe una retracción r de A sobre B, que se obtiene aplicando homeomórficamente cada uno de los arcos que no están en B en uno de los arcos en B, manteniendo fijos los extremos. Entonces r_* es un epimorfismo. Como el grupo fundamental de B no es abeliano (por el Ejemplo 1 de §70 o el Ejemplo 3 de §58), tampoco lo es el grupo fundamental de A.

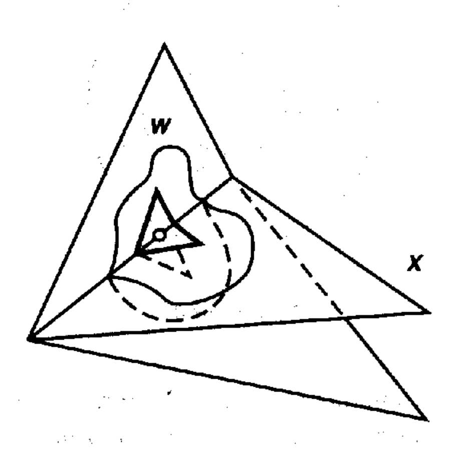
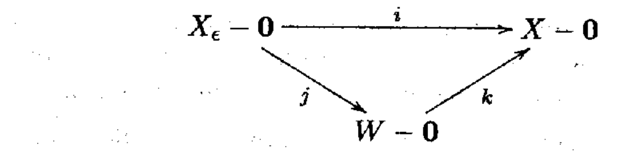


Figura 78.5

Se sigue que el grupo fundamental de $X - x$ no es abeliano, pues es fácil ver que A es un retracto de deformación de $X - x$ (véase la Figura 78.5).

Ahora probamos nuestro resultado. Por conveniencia, supongamos que el punto x es el origen $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^3$. Si W es un entorno arbitrario de $\mathbf{0}$, se puede encontrar una "aplicación de reducción" $f(x) = \epsilon x$, que lleva X en W. El espacio $X_\epsilon = f(X)$ es

una copia de X que está dentro de W. Consideremos las inclusiones



La inclusión i es homotópica al homeomorfismo $h(x) = x/\epsilon$, así que induce un isomorfismo de grupos fundamentales. Se sigue que k_* es sobreyectiva y por tanto el grupo fundamental de $W - \mathbf{0}$ no puede ser abeliano. ∎

Teorema 78.2. *Si X es una superficie compacta conexa triangulable, entonces X es homeomorfa a un espacio obtenido de un polígono plano pegando aristas por pares.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior que existe una colección $T_1, \ldots, T_n$ de triángulos planos, orientaciones y un etiquetado de las aristas de esos triángulos, donde cada etiqueta aparece exactamente dos veces en el esquema total, tal que X es homeomorfo al espacio cociente que se obtiene de esos triángulos por medio de su esquema.

Aplicamos la operación de pegamiento de §76. Si dos triángulos tienen aristas con la misma etiqueta, podemos (después de la inversión de uno de ellos si fuera necesario) pegar los triángulos a lo largo de esas dos aristas. Como resultado se han sustituido dos triángulos por un polígono de cuatro lados, cuyas aristas tienen etiquetas y están orientadas. Continuamos de manera análoga. Siempre que tengamos dos polígonos con aristas con la misma etiqueta, el procedimiento se puede continuar.

Eventualmente se llega a la situación donde bien se tiene un polígono, en cuyo caso el teorema queda probado, bien se llega a varios polígonos de manera que ninguno de cada dos tienen aristas con la misma etiqueta. En tal caso, el espacio que se obtiene realizando los pegamientos indicados de aristas no es conexo; de hecho, cada uno de los polígonos da lugar a una componente conexa del espacio. Como X es conexo, esta situación no puede ocurrir. ∎

Ejercicios

1. ¿Cuál es el espacio indicado por cada uno de los siguientes esquemas para una colección de cuatro triángulos?

(a) abc, dae, bef, cdf.

(b) abc, cba, def, dfe^{-1}.

2. Sea H^2 el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por todos los puntos (x_1, x_2) con $x_2 \geq 0$. Una *2-variedad con borde (o superficie con borde)* es un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto $x \in X$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$ o de H^2. El ***borde*** de X (escrito ∂X) consiste en los puntos x tales que x no tiene entorno alguno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

(a) Pruebe que ningún punto de H^2 de la forma $(x_1, 0)$ tiene un entorno (en H^2) homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

(b) Demuestre que $x \in \partial X$ si, y sólo si, existe un homeomorfismo h de un entorno de x en un abierto de H^2 tal que $h(x) \in \mathbb{R} \times 0$.

(c) Pruebe que ∂X es una 1-variedad.

3. Demuestre que la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^2$ es una 2-variedad con borde.

4. Sea X una 2-variedad; sea $U_1, \ldots, U_k$ una colección de abiertos disjuntos de X. Supongamos que para cada i, existe un homeomorfismo h_i de la bola abierta unidad B^2 en U_i. Sean $\epsilon = 1/2$ y B_ϵ la bola abierta de radio ϵ. Pruebe que el espacio $Y = X - \bigcup h_i(B_\epsilon)$ es una 2-variedad con borde y que ∂Y tiene k componentes conexas. El espacio Y se llama "X-con-k-agujeros".

5. Demuestre el siguiente:
Teorema. Dada una 2-variedad compacta conexa triangulable con borde Y, tal que ∂Y tiene k componentes, entonces Y es homeomorfa a X-con-k-agujeros, donde X es ya S^2, ya el n-toro T_n, ya el m-plano proyectivo P_m. [*Indicación:* cada componente de ∂Y es homeomorfa a un círculo.]

Capítulo 13

Clasificación de espacios recubridores

Hasta aquí hemos usado espacios recubridores principalmente como una herramienta para calcular grupos fundamentales. Ahora invertimos las cosas y usaremos el grupo fundamental como una herramienta para estudiar espacios recubridores.

Para hacer eso de una forma razonable, nos restringiremos al caso en que B es localmente conexo por caminos. Una vez hecho esto, también podemos pedir que B sea conexo por caminos, puesto que B se descompone en los conjuntos abiertos disjuntos B_α que son sus componentes conexas, y las aplicaciones $p^{-1}(B_\alpha) \to B_\alpha$ obtenidas por restricción de p son aplicaciones recubridoras, por el Teorema 53.2. Podemos suponer también que E es conexo por caminos. Pues si E_α es una componente conexa de $p^{-1}(B_\alpha)$, entonces la aplicación $E_\alpha \to B_\alpha$ obtenida por restricción de p es también una aplicación recubridora (véase el Lema 80.1). Por tanto, se pueden determinar todos los recubridores del espacio localmente conexo por caminos B determinando cuáles son conexos por caminos de cada componente conexa de B.

Por esta razón, adoptamos el siguiente:

Convenio. *En todo este capítulo, la declaración de que $p : E \to B$ es una aplicación recubridora incluirá la hipótesis de que E y B son localmente conexos por caminos y conexos por caminos, a menos que se especifique lo contrario.*

Con este convenio, vamos a describir la relación entre espacios recubridores de B y el grupo fundamental de B.

Si $p : E \to B$ es una aplicación recubridora, con $p(e_0) = b_0$, entonces el homomorfismo inducido p_* es inyectivo, por el Teorema 54.6, de manera que

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$$

es un subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ isomorfo a $\pi_1(E, e_0)$. Resulta que el subgrupo H_0 determina completamente el recubridor p, salvo una conveniente relación de equivalencia de recubridores. Esto lo veremos en §79. Además, bajo una muy suave condición adicional de "sutileza local" sobre B, existe, para cada subgrupo H_0 de $\pi_1(B, b_0)$, un recubridor $p : E \to B$ de B cuyo subgrupo correspondiente es H_0. Esto se probará en §82.

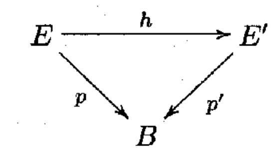
Dicho sin mucha precisión, estos resultados prueban que podemos determinar todos los espacios recubridores de B simplemente examinando la colección de todos los subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$. Este es el procedimiento clásico de topología algebraica; se "resuelve" un problema de topología reduciéndolo a uno de álgebra, que afortunadamente es más tratable.

A lo largo de este capítulo, suponemos el teorema general de la correspondencia del levantamiento, Teorema 54.6.

§79 Equivalencia de espacios recubridores

En esta sección probamos que el subgrupo H_0 de $\pi_1(B, b_0)$ determina completamente el recubridor $p : E \to B$, salvo una adecuada noción de equivalencia de recubridores.

Definición. Sean $p : E \to B$ y $p' : E' \to B$ aplicaciones recubridoras. Diremos que son ***equivalentes*** si existe un homeomorfismo $h : E \to E'$ tal que $p = p' \circ h$. El homeomorfismo h se denomina ***equivalencia de aplicaciones recubridoras*** o ***equivalencia de espacios recubridores***.



Dadas dos aplicaciones recubridoras $p : E \to B$ y $p' : E' \to B$ cuyos subgrupos correspondientes H_0 y H_0' son iguales, probaremos que existe una equivalencia $h : E \to E'$. Para ello, necesitamos generalizar los lemas de levantamiento de §54.

Lema 79.1 (Lema del levantamiento general). *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Sea $f : Y \to B$ una aplicación continua con $f(y_0) = b_0$. Supongamos que Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. La aplicación f se puede levantar a una aplicación $\tilde{f} : Y \to E$ tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$ si, y sólo si,*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Además, si tal levantamiento existe, es único.

Demostración. Si el levantamiento $\tilde{f}$ existe, entonces

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Esto prueba la parte "sólo si" del teorema.

Ahora probamos que si $\tilde{f}$ existe, es única. Dado $y_1 \in Y$, se elige un camino α en Y desde y_0 hasta y_1. Se toma el camino $f \circ \alpha$ en B y se levanta a un camino γ en E que comienza en e_0. Si un tal levantamiento $\tilde{f}$ de f existe, entonces $\tilde{f}(y_1)$ debe ser igual al punto final $\gamma(1)$ de γ, pues $\tilde{f} \circ \alpha$ es un levantamiento de $f \circ \alpha$ que comienza en e_0, y los levantamientos de caminos son únicos.

Finalmente, probamos la parte "si" del teorema. La parte de unicidad de la demostración nos da una pista de cómo proceder. Dado $y_1 \in Y$, se elige un camino α en Y desde y_0 hasta y_1. Se levanta el camino $f \circ \alpha$ a un camino γ en E que comienza en e_0 y se define $\tilde{f}(y_1) = \gamma(1)$ (véase la Figura 79.1). Supone un cierto trabajo probar que $\tilde{f}$ está bien definida, es decir, no depende de la elección de α. Una vez probemos esto, la continuidad de $\tilde{f}$ se demuestra fácilmente, como ahora vemos.

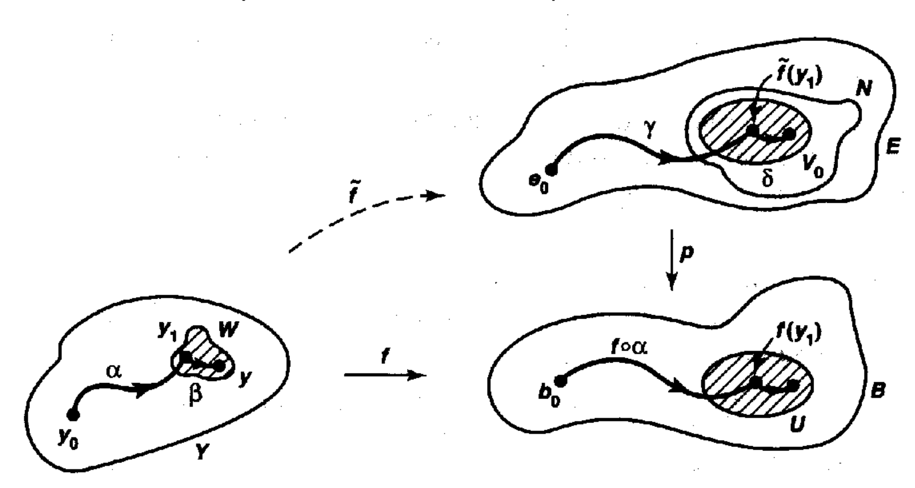


Figura 79.1

Para probar la continuidad de $\tilde{f}$ en el punto $y_1 \in Y$, veamos que, dado un entorno N de $\tilde{f}(y_1)$, existe un entorno W de y_1 tal que $\tilde{f}(W) \subset N$. Para comenzar, se elige un entorno conexo por caminos U de $f(y_1)$ que está regularmente recubierto por p. Descompongamos $p^{-1}(U)$ en rebanadas, y sea V_0 la rebanada que contiene al punto $\tilde{f}(y_1)$. Sustituyendo U por un entorno más pequeño de $f(y_1)$, si fuera necesario, podemos suponer que $V_0 \subset N$. Sea $p_0 : V_0 \to U$ obtenida por restricción de p; entonces p_0 es un homeomorfismo. Como f es continua en y_1 e Y es localmente conexo por caminos, podemos encontrar un entorno conexo por caminos W de y_1 tal que $f(W) \subset U$. Probaremos que $\tilde{f}(W) \subset V_0$; entonces el resultado quedará demostrado.

Dado $y \in W$, se elige un camino β en W desde y_1 hasta y. Como $\tilde{f}$ está bien definida, $\tilde{f}(y)$ se puede obtener tomando el camino $\alpha * \beta$ desde y_0 hasta y, levantando el camino $f \circ (\alpha * \beta)$ a un camino en E que empieza en e_0, y haciendo que $\tilde{f}(y)$ sea el punto final de este levantamiento. Ahora γ es un levantamiento de α que empieza en e_0. Puesto que el camino $f \circ \beta$ está en U, el camino $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$ es un levantamiento de $f \circ \beta$ que parte de $\tilde{f}(y_1)$. Entonces $\gamma * \delta$ es un levantamiento de $f \circ (\alpha * \beta)$ que parte de e_0 y acaba en el punto $\delta(1) \in V_0$. Por consiguiente, $\tilde{f}(W) \subset V_0$, como deseábamos.

Finalmente, probamos que $\tilde{f}$ está bien definida. Sean α y β dos caminos en Y desde y_0 hasta y_1. Tenemos que ver que si levantamos $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ a caminos en E partiendo de e_0, entonces ambos levantamientos acaban en el mismo punto de E.

En primer lugar, levantamos $f \circ \alpha$ a un camino γ en E que comienza en e_0; luego levantamos $f \circ \bar{\beta}$ a un camino δ en E que comienza en el punto $\gamma(1)$ de γ. Entonces $\gamma * \delta$ es un levantamiento del lazo $f \circ (\alpha * \bar{\beta})$. Ahora por hipótesis,

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Por tanto, $[f \circ (\alpha * \bar{\beta})]$ está en la imagen de p_*. El Teorema 54.6 implica que su levantamiento $\gamma * \delta$ es un *lazo* en E.

Se sigue que $\tilde{f}$ está bien definida, ya que $\bar{\delta}$ es un levantamiento de $f \circ \beta$ que parte de e_0 y γ es un levantamiento de $f \circ \alpha$ que parte de e_0, y ambos levantamientos acaban en el mismo punto de E. ■

Teorema 79.2. *Sean $p : E \to B$ y $p' : E' \to B$ aplicaciones recubridoras; sea $p(e_0) = p'(e_0') = b_0$. Existe una equivalencia $h : E \to E'$ tal que $h(e_0) = e_0'$ si, y sólo si, los grupos*

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{y} \quad H_0' = p'_*(\pi_1(E', e_0'))$$

son iguales. Si h existe, es única.

Demostración. Probamos la parte "sólo si" del teorema. Dado h, el hecho de que sea un homeomorfismo implica que

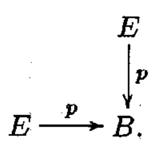
$$h_*(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1(E', e_0').$$

Como $p' \circ h = p$, se tiene que $H_0 = H_0'$.

Ahora probamos la parte "si" del teorema. Suponemos que $H_0 = H_0'$ y demostramos que h existe. Aplicaremos el lema anterior (cuatro veces). Se consideran las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} & & E' \\ & & \downarrow p' \\ E & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

Como p' es una aplicación recubridora y E es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, existe una aplicación $h : E \to E'$, con $h(e_0) = e_0'$, que es un levantamiento de p (es decir, tal que $p' \circ h = p$). Invirtiendo los papeles de E y E' en este argumento, vemos que existe una aplicación $k : E' \to E$, con $k(e_0') = e_0$, tal que $p \circ k = p'$. Ahora se consideran las aplicaciones



La aplicación $k \circ h : E \to E$ es un levantamiento de p (ya que $p \circ k \circ h = p' \circ h = p$), con $p(e_0) = e_0$. La aplicación identidad i_E de E es otro de tales levantamientos. La parte de unicidad del lema anterior implica que $k \circ h = i_E$. Un argumento similar demuestra que $h \circ k = i_{E'}$. ∎

Nos parece haber resuelto nuestro problema de equivalencia. Pero hay una sutileza que hemos pasado por alto. Hemos obtenido una condición necesaria y suficiente para la existencia de una equivalencia $h : E \to E'$ que lleva el punto e_0 en el punto e_0'. Pero aún no hemos determinado bajo qué condiciones existe una equivalencia en general. Podría ser que no existiera equivalencia llevando e_0 a e_0', pero que *existiera* una aplicando e_0 en algún otro punto e_1' de $(p')^{-1}(b_0)$. ¿Podemos determinar si es éste el caso simplemente examinando los subgrupos H_0 y H_0'? Consideremos ahora este problema.

Si H_1 y H_2 son subgrupos de un grupo G, recordamos de álgebra que aquéllos se dice que son subgrupos ***conjugados*** si $H_2 = \alpha \cdot H_1 \cdot \alpha^{-1}$, para algún elemento α de G. Dicho de otra manera, los subgrupos son conjugados si el isomorfismo de G en sí mismo que aplica x en $\alpha \cdot x \cdot \alpha^{-1}$ aplica H_1 en H_2. Es fácil comprobar que la conjugación es una relación de equivalencia en la colección de los subgrupos de G. La clase de equivalencia del subgrupo H se denomina ***clase de conjugación*** de H.

Lema 79.3. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora. Sean e_0 y e_1 puntos de $p^{-1}(b_0)$ y $H_i = p_*(\pi_1(E, e_i))$.*

(a) *Si γ es un camino en E de e_0 a e_1 y α es el lazo $p \circ \gamma$ en B, entonces se satisface la ecuación $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$; por consiguiente, H_0 y H_1 son conjugados.*

(b) *Recíprocamente, dados e_0 y un subgrupo H de $\pi_1(B, b_0)$ conjugado de H_0, existe un punto e_1 de $p^{-1}(b_0)$ tal que $H_1 = H$.*

Demostración. (a) En primer lugar, probamos que $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$. Dado un elemento $[h]$ de H_1, se tiene que $[h] = p_*([\tilde{h}])$, para algún lazo $\tilde{h}$ en E basado en e_1. Sea $\tilde{k}$ el camino $\tilde{k} = (\gamma * \tilde{h}) * \bar{\gamma}$; es un lazo en E basado en e_0 y

$$p_*([\tilde{k}]) = [(\alpha * h) * \bar{\alpha}] = [\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1},$$

así el último elemento pertenece a $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H_0$, como deseábamos (véase la Figura 79.2).

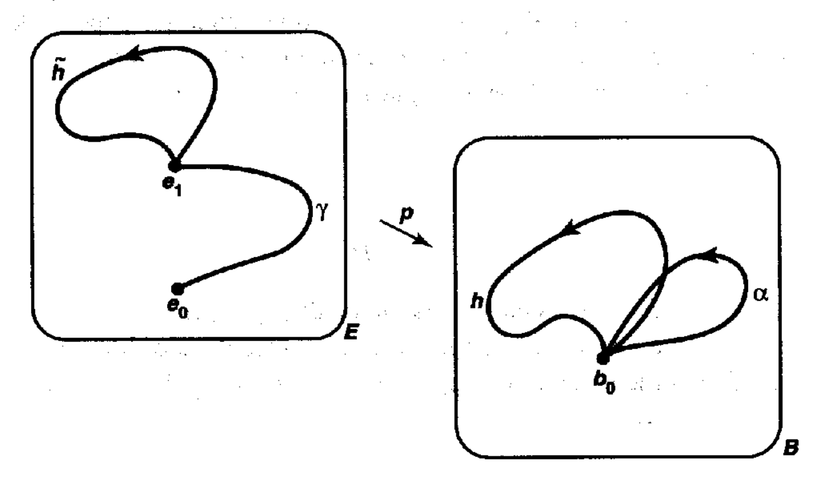


Figura 79.2

Ahora probamos que $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \supset H_0$. Nótese que $\bar{\gamma}$ es un camino de e_1 a e_0 y $\bar{\alpha}$ es igual al lazo $p \circ \bar{\gamma}$. Por el resultado que se acaba de probar se tiene

$$[\bar{\alpha}] * H_0 * [\bar{\alpha}]^{-1} \subset H_1$$

que implica el resultado deseado.

(b) Para probar el recíproco, sean e_0 un punto dado y H conjugado de H_0. Entonces $H_0 = [\alpha] * H * [\alpha]^{-1}$ para algún lazo α en B basado en b_0. Sea γ el levantamiento de α a un camino en E partiendo de e_0, y sea $e_1 = \gamma(1)$. Entonces (a) implica que $H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$. Concluimos que $H = H_1$. ■

Teorema 79.4. *Sean $p : E \to B$ y $p' : E' \to B$ aplicaciones recubridoras y $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$. Las aplicaciones recubridoras p y p' son equivalentes si, y sólo si, los subgrupos*

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{y} \quad H'_0 = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$$

de $\pi_1(B, b_0)$ son conjugados.

Demostración. Si $h : E \to E'$ es una equivalencia, sean $e'_1 = h(e_0)$ y $H'_1 = p_*(\pi_1(E', e'_1))$. El Teorema 79.2 implica que $H_0 = H'_1$, mientras que el lema anterior nos dice que H'_1 es conjugado de H'_0.

Recíprocamente, si los grupos H_0 y H'_0 son conjugados, el lema anterior implica la existencia de un punto e'_1 de E' tal que $H'_1 = H_0$. El Teorema 79.2 nos da entonces una equivalencia $h : E \to E'$ tal que $h(e_0) = e'_1$. ■

EJEMPLO 1. Consideremos espacios recubridores del círculo $B = S^1$. Como $\pi_1(B, b_0)$ es abeliano, dos subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$ son conjugados si, y sólo si, son iguales. Por tanto, dos recubridores de B son equivalentes si, y sólo si, se corresponden con el mismo subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$.

Ahora bien, $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. ¿Cuáles son los subgrupos de $\mathbb{Z}$? Un teorema conocido de álgebra dice que un subgrupo no trivial de $\mathbb{Z}$ debe ser el grupo G_n de todos los múltiplos de n, para algún $n \in \mathbb{Z}_+$.

Hemos estudiado un espacio recubridor del círculo, el recubridor $p : \mathbb{R} \to S^1$. Debe corresponder al subgrupo trivial de $\pi_1(S^1, b_0)$, ya que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo. También hemos considerado el recubridor $p : S^1 \to S^1$ definido por $p(z) = z^n$, donde z es un número complejo. En este caso, la aplicación p_* lleva un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$ en n veces él mismo. Por tanto, el grupo $p_*(\pi_1(S^1, b_0))$ se corresponde con el subgrupo G_n de $\mathbb{Z}$ mediante el isomorfismo estándar de $\pi_1(S^1, b_0)$ con $\mathbb{Z}$.

Concluimos del teorema anterior que cada espacio recubridor conexo por caminos de S^1 es equivalente a uno de estos recubridores.

Ejercicios

1. Demuestre que si $n > 1$, cada aplicación continua $f : S^n \to S^1$ es homotópicamente nula. [*Indicación:* utilice el lema del levantamiento.]

2. (a) Pruebe que cada aplicación continua $f : P^2 \to S^1$ es homotópicamente nula.

(b) Encuentre una aplicación continua del toro en S^1 que no sea homotópicamente nula.

3. Sean $p : E \to B$ una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Demuestre que $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ si, y sólo si, para cada par de puntos e_1, e_2 de $p^{-1}(b_0)$, existe una equivalencia $h : E \to E$ con $h(e_1) = e_2$.

4. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Existe un isomorfismo de $\pi_1(T, b_0 \times b_0)$ con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ inducido por la proyección de T sobre cada uno de sus dos factores.

(a) Encuentre un espacio recubridor de T correspondiente al subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por el elemento $m \times 0$, siendo m un entero positivo.

(b) Encuentre un espacio recubridor de T correspondiente al subgrupo trivial de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(c) Encuentre un espacio recubridor de T correspondiente al subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por $m \times 0$ y $0 \times n$, siendo m y n enteros positivos.

***5.** Sean $T = S^1 \times S^1$ el toro y $x_0 = b_0 \times b_0$.

(a) Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Cada isomorfismo de $\pi_1(T, x_0)$ consigo mismo está inducido por un homeomorfismo de T consigo mismo que aplica x_0 en x_0.

[*Indicación:* sea $p : \mathbb{R}^2 \to T$ la aplicación recubridora usual. Si A es una matriz 2×2 de elementos enteros, la aplicación lineal $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matriz A induce una aplicación continua $f : T \to T$. Además, f es un homeomorfismo si A es invertible sobre los enteros.]

(b) Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Si E es un espacio recubridor de T, entonces E es homeomorfo ya a $\mathbb{R}^2$, ya a $S^1 \times \mathbb{R}$, ya a T.
[*Indicación:* puede usar el siguiente resultado de álgebra: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base a_1, a_2 de F tal que ya (1) ma_1 es una base de N, para algún entero positivo m, ya (2) ma_1, na_2 es una base de N, donde m y n son enteros positivos.]

***6.** Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Sea G un grupo topológico con operación de multiplicación $m : G \times G \to G$ y con elemento neutro e. Supongamos que $p : \tilde{G} \to G$ es una aplicación recubridora. Dado $\tilde{e}$ con $p(\tilde{e}) = e$, existe una única operación de multiplicación sobre $\tilde{G}$ que lo convierte en un grupo topológico tal que $\tilde{e}$ es el elemento neutro y p es un homomorfismo.
Demostración. Recuérdese que, por convenio, G y $\tilde{G}$ son conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

(a) Sea $I : G \to G$ la aplicación $I(g) = g^{-1}$. Demuestre que existen aplicaciones únicas $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ e $\tilde{I} : \tilde{G} \to \tilde{G}$, con $\tilde{m}(\tilde{e} \times \tilde{e}) = \tilde{e}$, $\tilde{I}(\tilde{e}) = \tilde{e}$ tales que $p \circ \tilde{m} = m \circ (p \times p)$ y $p \circ \tilde{I} = I \circ p$.

(b) Pruebe que las aplicaciones $\tilde{G} \to \tilde{G}$ dadas por $\tilde{g} \to \tilde{m}(\tilde{e} \times \tilde{g})$ y $\tilde{g} \to \tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{e})$ son iguales a la aplicación identidad de $\tilde{G}$. [*Indicación:* utilice la parte de unicidad del Lema 79.1.]

(c) Demuestre que las aplicaciones $\tilde{G} \to \tilde{G}$ dadas por $\tilde{g} \to \tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{I}(\tilde{g}))$ y $\tilde{g} \to \tilde{m}(\tilde{I}(\tilde{g}) \times \tilde{g})$ aplican $\tilde{G}$ en $\tilde{e}$.

(d) Pruebe que las aplicaciones $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ dadas por

$$\tilde{g} \times \tilde{g}' \times \tilde{g}'' \to \tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{m}(\tilde{g}' \times \tilde{g}''))$$
$$\tilde{g} \times \tilde{g}' \times \tilde{g}'' \to \tilde{m}(\tilde{m}(\tilde{g} \times \tilde{g}') \times \tilde{g}'')$$

son iguales.

(e) Complete la demostración.

7. Sea $p : \tilde{G} \to G$ un homomorfismo de grupos topológicos que es una aplicación recubridora. Demuestre que si G es abeliano, también lo es $\tilde{G}$.

§80 El espacio recubridor universal

Supongamos que $p : E \to B$ es una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$. Si E es simplemente conexo, entonces E se denomina ***espacio recubridor universal*** de B. Como $\pi_1(E, e_0)$ es trivial, este espacio recubridor corresponde al subgrupo trivial de $\pi_1(B, b_0)$ bajo la correspondencia definida en la sección anterior. El Teorema 79.4 implica así que cualesquiera dos espacios recubridores de B son equivalentes. Por esta razón, a menudo hablamos de "el" espacio recubridor universal de un espacio dado B. No todo espacio tiene un espacio recubridor universal, como veremos. Por el momento, simplemente supondremos que B tiene un espacio recubridor universal y obtendremos algunas consecuencias de esta hipótesis.

Probamos dos lemas preliminares:

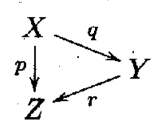
Lema 80.1. *Sea B conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora en el sentido anterior (de manera que no se requiere que E sea conexo por caminos). Si E_0 es una componente conexa por caminos de E, entonces la aplicación $p_0 : E_0 \to B$ obtenida por restricción de p es una aplicación recubridora.*

Demostración. Primero probamos que p_0 es sobreyectiva. Como el espacio E es localmente homeomorfo a B, es localmente conexo por caminos. Por tanto, E_0 es abierto en E. Se sigue que $p(E_0)$ es abierto en B. Probamos que $p(E_0)$ es también cerrado en B, así que $p(E_0) = B$.

Sea x un punto de B perteneciente a la clausura de $p(E_0)$. Sea U un entorno conexo por caminos de x que está regularmente cubierto por p. Puesto que U contiene un punto de $p(E_0)$, alguna rebanada V_α de $p^{-1}(U)$ debe cortar a E_0. Como V_α es homeomorfo a U, es conexo por caminos; por tanto, debe estar contenido en E_0. Entonces $p(V_\alpha) = U$ está contenido en $p(E_0)$, de manera que en particular, $x \in p(E_0)$.

Ahora probamos que $p_0 : E_0 \to B$ es una aplicación recubridora. Dado $x \in B$, escojamos un entorno U de x como antes. Si V_α es una rebanada de $p^{-1}(U)$, entonces V_α es conexo por caminos; si corta a E_0, está en E_0. Por tanto, $p^{-1}(U)$ es igual a la unión de aquellas rebanadas V_α de $p^{-1}(U)$ que cortan a E_0; cada una de ellas es abierta en E_0 y aplicada homeomórficamente por p_0 en U. Así U está regularmente cubierto por p_0. ∎

Lema 80.2. *Sean p, q y r aplicaciones continuas con $p = r \circ q$, como en el siguiente diagrama:*



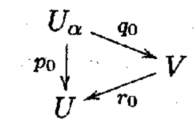
(a) Si p y r son aplicaciones recubridoras, también lo es q.

*(b) Si p y q son aplicaciones recubridoras, también lo es r.

Demostración. Por nuestro convenio, X, Y y Z son conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Sea $x_0 \in X$; pongamos $y_0 = q(x_0)$ y $z_0 = p(x_0)$.

(a) Supongamos que p y r son aplicaciones recubridoras. Probamos primero que q es sobreyectiva. Dado $y \in Y$, escojamos un camino $\tilde{\alpha}$ en Y de y_0 a y. Entonces $\alpha = r \circ \tilde{\alpha}$ es un camino en Z partiendo de z_0; sea $\tilde{\tilde{\alpha}}$ un levantamiento de α a un camino en X partiendo de x_0. Entonces $q \circ \tilde{\tilde{\alpha}}$ es un levantamiento de α a Y partiendo de y_0. Por la unicidad de levantamientos de caminos, $\tilde{\alpha} = q \circ \tilde{\tilde{\alpha}}$. Entonces q aplica el punto final de $\tilde{\tilde{\alpha}}$ en el punto final y de $\tilde{\alpha}$. Por tanto, q es sobreyectiva.

Dado $y \in Y$, encontramos un entorno de y que está regularmente cubierto por q. Sea $z = r(y)$. Como p y r son aplicaciones recubridoras, podemos encontrar un entorno conexo por caminos U de z que está regularmente cubierto por ambas p y r. Sea V la rebanada de $r^{-1}(U)$ que contiene al punto y; probamos que V está regularmente cubierto por q. Sea $\{U_\alpha\}$ la colección de rebanadas de $p^{-1}(U)$. Ahora q aplica cada conjunto U_α en el conjunto $r^{-1}(U)$; como U_α es conexo, debe ser aplicado por q en una de las rebanadas de $r^{-1}(U)$. Por tanto, $q^{-1}(V)$ es la unión de aquellas rebanadas U_α que se aplican por q en V. Es fácil ver que cada una de tales U_α se aplica homeomórficamente *sobre* V por q. Pues sean p_0, q_0 y r_0 las aplicaciones obtenidas por restricción de p, q y r, respectivamente, como se indica en el siguiente diagrama:



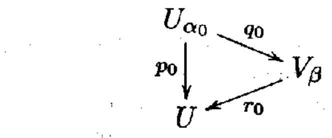
Puesto que p_0 y r_0 son homeomorfismos, así lo es $q_0 = r_0^{-1} \circ p_0$.

*(b) Usaremos este resultado solamente en los ejercicios. Supongamos que p y q son aplicaciones recubridoras. Como $p = r \circ q$ y p es sobreyectiva, r también es sobreyectiva.

Dado $z \in Z$, sea U un entorno conexo por caminos de z que esté regularmente cubierto por p. Probamos que U también está regularmente cubierto por r. Sea $\{V_\beta\}$ la colección de componentes conexas de $r^{-1}(U)$. Estos conjuntos son disjuntos y abiertos en Y. Veamos que para cada β, la aplicación r lleva homeomórficamente V_β en U.

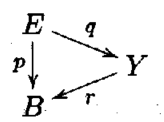
Sea $\{U_\alpha\}$ la colección de rebanadas de $p^{-1}(U)$, que son disjuntas, abiertas y conexas por caminos; por tanto, son las componentes conexas por caminos de $p^{-1}(U)$. Ahora q aplica U_α en el conjunto $r^{-1}(U)$; como U_α es conexo, debe ser aplicado por q en uno de los conjuntos V_β. Por tanto, $q^{-1}(V_\beta)$ es la unión de una subcolección de la colección U_α. El Teorema 53.2 junto con el Lema 80.1 implican que si

U_{α_0} es una cualquiera de las componentes conexas de $q^{-1}(V_\beta)$ entonces la aplicación $q_0 : U_{\alpha_0} \to V_\beta$ obtenida por restricción de q es una aplicación recubridora. En particular, q_0 es sobreyectiva. Por consiguiente, q_0 es un homeomorfismo, siendo continua, abierta e inyectiva también. Consideremos las aplicaciones



obtenidas por restricción de p, q y r. Como p_0 y q_0 son homeomorfismos, así lo es r_0. ∎

Teorema 80.3. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora, con E simplemente conexo. Dada cualquier aplicación recubridora $r : Y \to B$, existe una aplicación recubridora $q : E \to Y$ tal que $r \circ q = p$.*



Este teorema demuestra por qué E se denomina recubridor *universal* de B; recubre cualquier otro espacio recubridor de B.

Demostración. Sea $b_0 \in B$; escojamos e_0 e y_0 tales que $p(e_0) = b_0$ y $r(y_0) = b_0$. Se aplica el Lema 79.1 para construir q. La aplicación r es una aplicación recubridora, y la condición

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset r_*(\pi_1(Y, y_0))$$

se satisface trivialmente, ya que E es simplemente conexo. Por tanto, existe una aplicación $q : E \to Y$ tal que $r \circ q = p$ y $q(e_0) = y_0$. Se sigue del lema anterior que q es una aplicación recubridora. ∎

Ahora damos un ejemplo de un espacio que no tiene recubridor universal. Para ello se necesita el siguiente lema.

Lema 80.4. *Sean $p : E \to B$ una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Si E es simplemente conexo, entonces b_0 tiene un entorno U tal que la inclusión $i : U \to B$ induce el homomorfismo trivial*

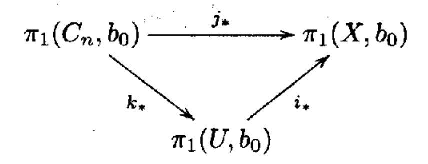
$$i_* : \pi_1(U, b_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0).$$

Demostración. Sea U un entorno de b_0 regularmente cubierto por p. Se descompone $p^{-1}(U)$ en rebanadas y sea U_α la rebanada que contiene a e_0. Sea f un lazo en U

basado en b_0. Como p define un homeomorfismo de U_α con U, el lazo f se levanta a un *lazo* $\tilde{f}$ en U_α basado en e_0. Como E es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos $\tilde{F}$ en E entre $\tilde{f}$ y un lazo constante. Entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de caminos en B entre f y un lazo constante. ■

EJEMPLO 1. Sea X nuestro familiar "pendiente infinito" en el plano; si C_n es el círculo de radio $1/n$ en el plano con centro en el punto $(1/n, 0)$, entonces X es la unión de los círculos C_n. Sea b_0 el origen; veamos que si U es un entorno cualquiera de b_0 en X, entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $i : U \to X$ no es trivial.

Dado n, existe una retracción $r : X \to C_n$ obtenida haciendo que r aplique cada círculo C_i, para $i \neq n$, en el punto b_0. Elijamos n lo suficientemente grande como para que C_n esté en U. Entonces en el siguiente diagrama de homomorfismos inducidos por la inclusión, j_* en inyectiva; por consiguiente, i_* no puede ser trivial.



Se sigue que aunque X sea conexo por caminos y localmente conexo por caminos, no posee recubridor universal.

Ejercicios

1. Dadas las aplicaciones $q : X \to Y$ y $r : Y \to Z$, sea $p = r \circ q$.

   (a) Sean q y r aplicaciones recubridoras. Demuestre que si Z tiene un espacio recubridor universal, entonces p es una aplicación recubridora. Compare con el Ejercicio 4 de §53.

   *(b) Dé un ejemplo donde q y r sean aplicaciones recubridoras pero p no.

*§81 Transformaciones recubridoras

Dada una aplicación recubridora $p : E \to B$, tiene cierto interés considerar el conjunto de todas las equivalencias de este espacio recubridor con *él mismo*. Tal equivalencia se denomina ***transformación recubridora***. Composiciones e inversas de transformaciones recubridoras son transformaciones recubridoras, por tanto este conjunto forma un grupo, que se denomina ***grupo de transformaciones recubridoras*** y se escribirá $\mathcal{C}(E, p, B)$.

A lo largo de esta sección, supondremos que $p : E \to B$ es una aplicación recubridora con $p(e_0) = b_0$ y pondremos $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$. Probaremos que

el grupo $\mathcal{C}(E, p, B)$ está completamente determinado por el grupo $\pi_1(B, b_0)$ y el subgrupo H_0. Específicamente, probaremos que si $N(H_0)$ es el mayor subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ del que H_0 es un subgrupo normal, entonces $\mathcal{C}(E, p, B)$ es isomorfo a $N(H_0)/H_0$.

Formalmente definimos $N(H_0)$ como sigue:

Definición. Si H es un subgrupo del grupo G, entonces el ***normalizador*** de H en G es el subconjunto de G definido por la ecuación

$$N(H) = \{g \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Es fácil ver que $N(H)$ es un subgrupo de G. Se sigue de la definición que él contiene a H como subgrupo normal y es el mayor de tales subgrupos de G.

La correspondencia entre los grupos $N(H_0)/H_0$ y $\mathcal{C}(E, p, B)$ se establece mediante la correspondencia de levantamientos de §54 y los resultados sobre la existencia de equivalencias demostrada en §79. Damos la siguiente definición:

Definición. Dada $p : E \to B$ con $p(e_0) = b_0$, sea F el conjunto $F = p^{-1}(e_0)$. Sea

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/H_0 \to F$$

la correspondencia de levantamientos del Teorema 54.6; es una biyección. Se define también una correspondencia

$$\Psi : \mathcal{C}(E, p, B) \to F$$

poniendo $\Psi(h) = h(e_0)$ para cada transformación recubridora $h : E \to E$. Como h queda unívocamente determinada una vez que se conoce su valor en e_0, la correspondencia Ψ es inyectiva.

Lema 81.1. *La imagen de la aplicación Ψ es igual a la imagen por Φ del subgrupo $N(H_0)/H_0$ de $\pi_1(B, b_0)/H_0$.*

Demostración. La correspondencia del levantamiento $\Phi : \pi_1(B, b_0) \to F$ se definía de la siguiente manera: dado un lazo α en B basado en b_0, sea γ su levantamiento a E partiendo de e_0. Pongamos $e_1 = \gamma(1)$. Se define Φ por $\Phi([\alpha]) = e_1$. Para probar el lema necesitamos demostrar que existe una transformación recubridora $h : E \to E$ con $h(e_0) = e_1$ si, y sólo si, $[\alpha] \in N(H_0)$.

El Lema 79.1 dice que h existe si, y sólo si, $H_0 = H_1$, donde $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Y el Lema 79.3 afirma que $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$. Por consiguiente, h existe si, y sólo si, $[\alpha] * H_0 * [\alpha]^{-1} = H_0$, que es simplemente decir que $[\alpha] \in N(H_0)$. ∎

Teorema 81.2. *La biyección*

$$\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathcal{C}(E, p, B) \to N(H_0)/H_0$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sólo necesitamos probar que $\Phi^{-1} \circ \Psi$ es un homomorfismo. Sean $h, k : E \to E$ transformaciones recubridoras, $h(e_0) = e_1$ y $k(e_0) = e_2$. Entonces

$$\Psi(h) = e_1 \quad \text{y} \quad \Psi(k) = e_2$$

por definición. Escojamos caminos γ y δ en E de e_0 a e_1 y e_2, respectivamente. Si $\alpha = p \circ \gamma$ y $\beta = p \circ \delta$, entonces

$$\Phi([\alpha]H_0) = e_1 \quad \text{y} \quad \Phi([\beta]H_0) = e_2$$

por definición. Sea $e_3 = h(k(e_0))$; entonces $\Psi(h \circ k) = e_3$. Probemos que

$$\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$$

y la demostración quedará completada.

Como δ es un camino de e_0 a e_2, el camino $h \circ \delta$ va de $h(e_0) = e_1$ a $h(e_2) = h(k(e_0)) = e_3$ (véase la Figura 81.1). Entonces el producto $\gamma * (h \circ \delta)$ está definido y es un camino de e_0 a e_3. Es un levantamiento de $\alpha * \beta$, ya que $p \circ \gamma = \alpha$ y $p \circ h \circ \delta = p \circ \delta = \beta$. Por tanto, $\Phi([\alpha * \beta]H_0) = e_3$, como deseábamos. ■

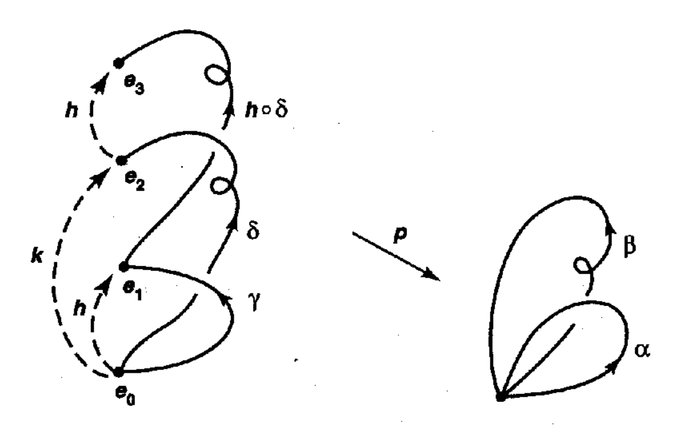


Figura 81.1

Corolario 81.3. *El grupo H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ si, y sólo si, para cada par de puntos e_1 y e_2 de $p^{-1}(b_0)$, existe una transformación recubridora $h : E \to E$ con $h(e_1) = e_2$. En este caso, existe un isomorfismo*

$$\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathcal{C}(E, p, B) \to \pi_1(B, b_0)/H_0.$$

Corolario 81.4. *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora. Si E es simplemente conexo, entonces*

$$\mathcal{C}(E,p,B) \cong \pi_1(B,b_0).$$

Si H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(B,b_0)$, entonces $p : E \to B$ se denomina ***aplicación recubridora regular***. (Aquí nos encontramos otro ejemplo de sobreuso de términos familiares. Las palabras "normal" y "regular" han sido ya utilizadas con significados completamente diferentes.)

EJEMPLO 1. Como el grupo fundamental del círculo es abeliano, cada recubridor de S^1 es regular. Si $p : \mathbb{R} \to S^1$ es la aplicación recubridora estándar, por ejemplo, las transformaciones recubridoras son los homeomorfismos $x \to x + n$. El grupo de tales transformaciones es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

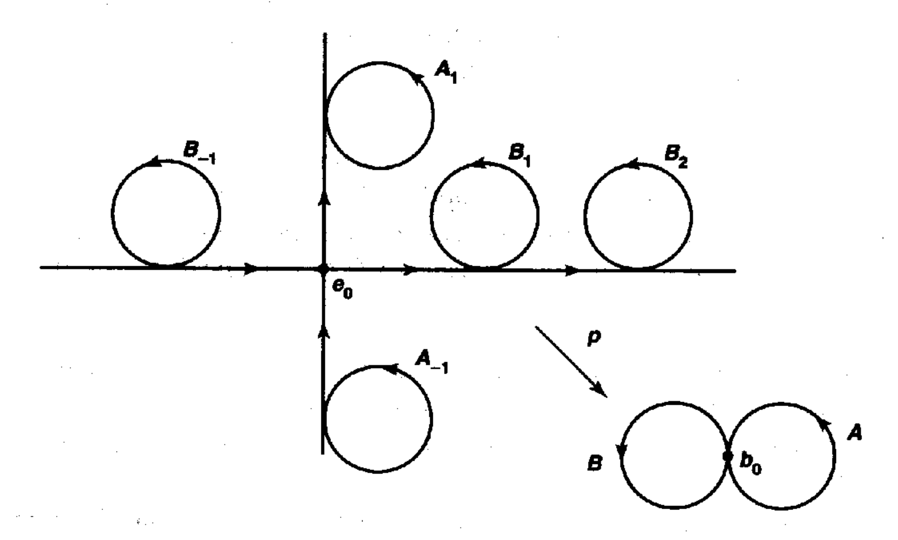


Figura 81.2

EJEMPLO 2. Para dar un ejemplo en el otro extremo, consideremos el espacio recubridor de la figura ocho indicada en la Figura 81.2. (Este recubridor ya fue considerado en §60. El eje x se envuelve alrededor del círculo A y el y alrededor del B. Los círculos A_i y B_i se aplican homeomórficamente en A y B, respectivamente.) En este caso, probamos que el grupo $\mathcal{C}(E,p,B)$ es trivial.

En general, si $h : E \to E$ es una transformación recubridora, entonces cualquier lazo en el espacio base que se levanta a un lazo en E en e_0 también se levanta a un lazo cuando el levantamiento parte de $h(e_0)$. En el presente caso, un lazo que genera el grupo fundamental de A se levanta a un no-lazo cuando el levantamiento está basado en e_0 y se levanta a un lazo cuando está basado en cualquier otro punto de $p^{-1}(b_0)$ en el eje y. Análogamente, un lazo que genera el grupo fundamental de B se levanta a un no-lazo partiendo de e_0 y a un lazo partiendo de cualquier otro punto de $p^{-1}(b_0)$ en el eje x. Se sigue que $h(e_0) = e_0$, así que h es la aplicación identidad.

Existe un método para construir espacios recubridores que conduce automáticamente a un recubridor que es regular y, en efecto, cada espacio recubridor regular se puede construir por este método. Requiere la *acción* de un grupo G sobre un espacio X.

Definición. Sean X un espacio y G un subgrupo del grupo de homeomorfismos de X consigo mismo. El ***espacio de órbitas*** X/G se define como el espacio cociente obtenido de X por medio de la relación de equivalencia $x \sim g(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$. La clase de equivalencia de x se denomina ***órbita*** de x.

Definición. Si G es un grupo de homeomorfismos de X, la acción de G sobre X se dice que es ***propiamente discontinua*** si para cada $x \in X$ existe un entorno U de x tal que $g(U)$ es disjunto con U siempre que $g \neq e$ (aquí e es el elemento neutro de G). Se sigue que $g_0(U)$ y $g_1(U)$ son disjuntos siempre que $g_0 \neq g_1$, pues de lo contrario U y $g_0^{-1}g_1(U)$ no serían disjuntos.

Teorema 81.5. *Sean X conexo por caminos y localmente conexo por caminos y G un grupo de homeomorfismos de X. La aplicación cociente $\pi : X \to X/G$ es una aplicación recubridora si, y sólo si, la acción de G es propiamente discontinua. En este caso, la aplicación recubridora π es regular y G es su grupo de transformaciones recubridoras.*

Demostración. Probemos que π es una aplicación abierta. Si U es un abierto en X, entonces $\pi^{-1}\pi(U)$ es la unión de los conjuntos abiertos $g(U)$ de X, para cada $g \in G$. Por consiguiente, $\pi^{-1}\pi(U)$ es abierto en X, así que $\pi(U)$ es abierto en X/G por definición. Así π es abierta.

Paso 1. Suponemos que la acción de G es propiamente discontinua y probamos que π es una aplicación recubridora. Dado $x \in X$, sea U un entorno de x tal que $g_0(U)$ y $g_1(U)$ son disjuntos siempre que $g_0 \neq g_1$. Entonces $\pi(U)$ está regularmente cubierto por π. En efecto, $\pi^{-1}\pi(U)$ es igual a la unión de los conjuntos abiertos disjuntos $g(U)$, para $g \in G$, cada uno de los cuales contiene a lo sumo un punto de cada órbita. Por tanto, la aplicación $g(U) \to \pi(U)$ obtenida por restricción de π es biyectiva; como es continua y abierta es un homeomorfismo. Los conjuntos $g(U)$, para $g \in G$, forman así una partición de $\pi^{-1}\pi(U)$ en rebanadas.

Paso 2. Suponemos ahora que π es una aplicación recubridora y probamos que la acción de G es propiamente discontinua. Dado $x \in X$, sea V un entorno de $\pi(x)$ que está regularmente cubierto por π. De la partición de $\pi^{-1}(V)$ en rebanadas, sea U_α la que contiene a x. Dado $g \in G$, con $g \neq e$, el conjunto $g(U_\alpha)$ debe ser disjunto con U_α, pues de lo contrario, dos puntos de U_α deberían pertenecer a la misma órbita y la restricción de π a U_α no sería inyectiva. Se sigue que la acción de G es propiamente discontinua.

Paso 3. Probamos que si π es una aplicación recubridora, entonces G es su grupo de transformaciones recubridoras. Desde luego, cualquier $g \in G$ es una transformación recubridora, pues $\pi \circ g = \pi$ ya que la órbita de $g(x)$ es igual a la de x. Por otra parte, sea h una transformación recubridora con $h(x_1) = x_2$, por ejemplo. Como $\pi \circ h = \pi$, los puntos x_1 y x_2 se aplican por π en el mismo punto; por tanto, existe un elemento $g \in G$ tal que $g(x_1) = x_2$. La parte de unicidad del Teorema 79.2 implica entonces que $h = g$.

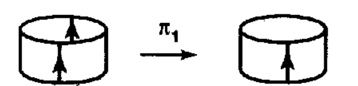
Se sigue que π es regular. Claramente, para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en la misma órbita, existe un elemento $g \in G$ tal que $g(x_1) = x_2$. Entonces se aplica el Corolario 81.3. ■

Teorema 81.6. *Si $p : X \to B$ es una aplicación recubridora y G es su grupo de transformaciones recubridoras, entonces existe un homeomorfismo $k : X/G \to B$ tal que $p = k \circ \pi$, donde $\pi : X \to X/G$ es la proyección.*

$$\begin{array}{ccc} X & = & X \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ X/G & \xrightarrow{k} & B \end{array}$$

Demostración. Si g es una transformación recubridora, entonces $p(g(x)) = p(x)$ por definición. Por tanto, p es constante sobre cada órbita, lo que induce una aplicación continua k del espacio cociente X/G en B. Por otro lado, p es una aplicación cociente porque es continua, sobreyectiva y abierta. Como p es regular, cualesquiera dos puntos de $p^{-1}(b)$ están en la misma órbita bajo la acción de G. Por consiguiente, π induce una aplicación continua $B \to X/G$ que es la inversa de k. ■

EJEMPLO 3. Sea X el cilindro $S^1 \times I$. Sean $h : X \to X$ y $k : X \to X$ los homeomorfismos definidos por $h(x,t) = (-x,t)$ y $k(x,t) = (-x, 1-t)$. Los grupos $G_1 = \{e, h\}$ y $G_2 = \{e, k\}$ son isomorfos a los enteros módulo 2; ambos actúan propiamente discontinuamente sobre X. Pero X/G_1 es homeomorfo a X, mientras que X/G_2 es homeomorfo a la cinta de Möbius, como se puede comprobar (véase la Figura 81.3).



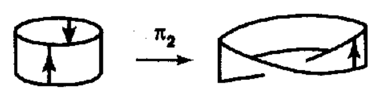


Figura 81.3

Ejercicios

1. (a) Encuentre un grupo G de homeomorfismos del toro T que tenga orden 2 tal que T/G sea homeomorfo al toro.

   (b) Encuentre un grupo G de homeomorfismos de T que tenga orden 2 y que T/G sea homeomorfo a la botella de Klein.

2. Sea $X = A \vee B$ la unión por un punto de dos círculos.

   (a) Sea E el espacio de la Figura 81.4; sea $p : E \to X$ que envuelve cada arco A_1 y A_2 alrededor de A y aplica B_1 y B_2 homeomórficamente en B. Demuestre que p es una aplicación recubridora regular.

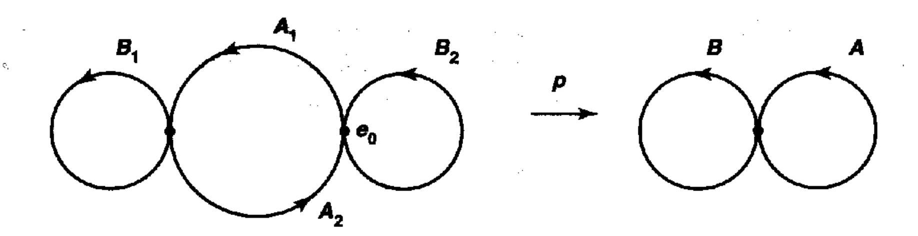


Figura 81.4

   (b) Determine el grupo de transformaciones recubridoras del recubridor de X indicado en la Figura 81.5. ¿Es un recubridor regular?

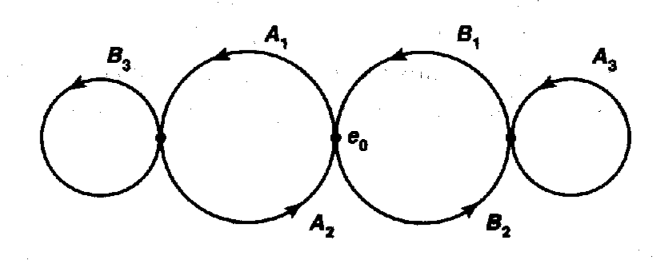


Figura 81.5

   (c) Repita (b) para el recubridor de la Figura 81.6.

   (d) Repita (b) para el recubridor de la Figura 81.7.

3. Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora (no necesariamente regular); sea G su grupo de transformaciones recubridoras.

   (a) Pruebe que la acción de G sobre X es propiamente discontinua.

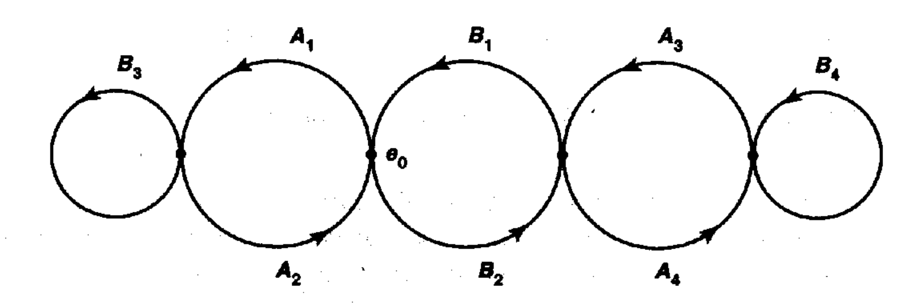


Figura 81.6

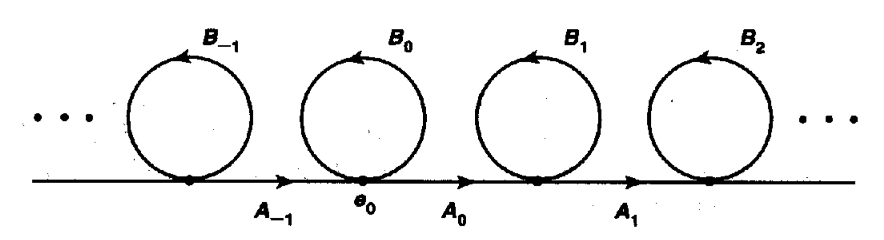
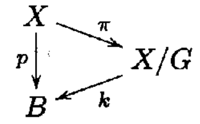


Figura 81.7

(b) Sea $\pi : X \to X/G$ la aplicación proyección. Demuestre que existe una aplicación recubridora $k : X/G \to B$ tal que $k \circ \pi = p$.



4. Sea G un grupo de homeomorfismos de X. La acción de G sobre X se dice ***sin puntos fijos*** si ningún elemento de G, que no sea el neutro e, tiene un punto fijo. Demuestre que si X es de Hausdorff y G es un grupo finito de homeomorfismos de X cuya acción es sin puntos fijos, entonces la acción de G es propiamente discontinua.

5. Consideremos S^3 como el espacio de todos los pares de números complejos (z_1, z_2) satisfaciendo la ecuación $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Dados dos enteros positivos coprimos n y k, se define $h : S^3 \to S^3$ por la ecuación

$$h(z_1, z_2) = (z_1 e^{2\pi i/n}, z_2 e^{2\pi ik/n}).$$

(a) Demuestre que h genera un subgrupo G del grupo de homeomorfismos de S^3 que es cíclico de orden n, y que sólo el elemento neutro de G tiene un punto fijo. El espacio de órbitas S^3/G se denomina ***espacio lente*** $L(n, k)$.

(b) Pruebe que si $L(n, k)$ y $L(n', k')$ son homeomorfos, entonces $n = n'$. [Un teorema dice que $L(n, k)$ y $L(n', k')$ son homeomorfos si, y sólo si,

$n = n'$ y ya $k \equiv k'$ (mód n), ya $kk' \equiv 1$ (mód n). La demostración no es trivial.]

(c) Demuestre que $L(n, k)$ es una 3-variedad compacta.

6. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto; sea G un grupo de homeomorfismos de X tal que la acción de G es sin puntos fijos. Supongamos que para cada subespacio compacto C de X, existe un número finito de elementos g de G tal que la intersección $C \cap g(C)$ es no vacía. Entonces la acción de G es propiamente discontinua y X/G es de Hausdorff localmente compacto.
Demostración.

(a) Para cada subespacio compacto C de X, demuestre que la unión de los conjuntos $g(C)$, para $g \in G$, es cerrada en X. [*Indicación:* si U es un entorno de x con $\bar{U}$ compacto, entonces $\bar{U} \cup C$ corta a $g(\bar{U} \cup C)$ solamente para un número finito de g.]

(b) Demuestre que X/G es de Hausdorff.

(c) Pruebe que la acción de G es propiamente discontinua.

(d) Demuestre que X/G es localmente compacto.

§82 Existencia de espacios recubridores

Hemos demostrado que a cada aplicación recubridora $p : E \to B$ le corresponde una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$ y que dos de tales aplicaciones recubridoras son equivalentes si, y sólo si, se corresponden con la misma clase. De este modo, tenemos una correspondencia inyectiva entre clases de equivalencia de recubridores de B y clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$. Ahora nos preguntamos si esa correspondencia es sobreyectiva, es decir, si para cada clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$ existe un recubridor de B correspondiente a esa clase.

La respuesta es “no”, en general. En §80 dimos un ejemplo de un espacio B conexo por caminos y localmente conexo por caminos que no tenía espacio recubridor simplemente conexo, es decir, que no tenía espacio recubridor correspondiente a la clase del subgrupo trivial. Este ejemplo dependía del Lema 80.4, que dio una condición que cualquier espacio que tenga un espacio recubridor simplemente conexo debe satisfacer. Ahora introducimos esta condición formalmente.

Definición. Un espacio B se dice ***semilocalmente simplemente conexo*** si para cada $b \in B$, existe un entorno U de b tal que el homomorfismo

$$i_* : \pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$$

inducido por la inclusión es trivial.

Observemos que si U satisface esta condición, también la satisface cualquier entorno más pequeño de b, así que b posee "entornos arbitrariamente pequeños" satisfaciendo esta condición. Nótese también que esta condición es más débil que la genuina conexión simple local, la cual requeriría que en cada entorno de b existiera un entorno U de b que fuera simplemente conexo.

Que B sea semilocalmente simplemente conexo es condición necesaria y suficiente para que exista, para cada clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$, un correspondiente espacio recubridor de B. La necesidad se probó en el Lema 80.4; la suficiencia se verá en esta sección.

Teorema 82.1. *Sea B conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Sea $b_0 \in B$. Dado un subgrupo H de $\pi_1(B, b_0)$, existen una aplicación recubridora $p : E \to B$ y un punto $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ tales que*

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

Demostración. *Paso 1. Construcción de E.* El procedimiento para construir E recuerda al usado en análisis complejo para la construcción de superficies de Riemann. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los caminos en B que parten de b_0. Se define una relación de equivalencia en $\mathcal{P}$ poniendo $\alpha \sim \beta$ si α y β acaban en el mismo punto de B y

$$[\alpha * \bar{\beta}] \in H.$$

Es fácil ver que se trata de una relación de equivalencia. La clase de equivalencia del camino α se indicará por $\alpha^{\#}$.

Sea E la colección de las clases de equivalencia y definamos $p : E \to B$ por la ecuación

$$p(\alpha^{\#}) = \alpha(1).$$

Como B es conexo por caminos, p es sobreyectiva. Dotaremos a E de una topología de manera que p sea una aplicación recubridora.

En primer lugar, observemos dos hechos:

(1) Si $[\alpha] = [\beta]$, entonces $\alpha^{\#} = \beta^{\#}$.

(2) Si $\alpha^{\#} = \beta^{\#}$, entonces $(\alpha * \delta)^{\#} = (\beta * \delta)^{\#}$, para cualquier camino δ en B partiendo de $\alpha(1)$.

La primera se sigue teniendo en cuenta que si $[\alpha] = [\beta]$, entonces $[\alpha * \bar{\beta}]$ es el elemento neutro, el cual pertenece a H. Y la segunda observando que $\alpha * \delta$ y $\beta * \delta$ acaban en el mismo punto de B y

$$[(\alpha * \delta) * \overline{(\beta * \delta)}] = [(\alpha * \delta) * (\bar{\delta} * \bar{\beta})] = [\alpha * \bar{\beta}]$$

que pertenece a H por hipótesis.

Paso 2. Una topología sobre E. Una manera de definir una topología sobre E consiste en dotar a $\mathcal{P}$ de la topología compacto-abierta (véase el Capítulo 7) y la correspondiente topología cociente sobre E. Pero podemos dotar a E de una topología directamente de la siguiente manera.

Sean α un elemento cualquiera de $\mathcal{P}$ y U un entorno conexo por caminos de $\alpha(1)$. Se define

$$B(U,\alpha) = \{(\alpha * \delta)^\# \mid \delta \text{ es un camino en } U \text{ partiendo de } \alpha(1)\}.$$

Observemos que $\alpha^\#$ es un elemento de $B(U,\alpha)$, ya que si $b = \alpha(1)$ entonces $\alpha^\# = (\alpha * e_b)^\#$; por definición, este elemento pertenece a $B(U,\alpha)$. Afirmamos que los conjuntos $B(U,\alpha)$ forman una base para una topología sobre E.

En primer lugar, probamos que si $\beta^\# \in B(U,\alpha)$, se tiene que $\alpha^\# \in B(U,\beta)$ y $B(U,\alpha) = B(U,\beta)$.

Si $\beta^\# \in B(U,\alpha)$, entonces $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$ para algún camino δ en U. Entonces

$$\begin{aligned}(\beta * \bar{\delta})^\# &= ((\alpha * \delta) * \bar{\delta})^\# && \text{por (2)}\\ &= \alpha^\# && \text{por (1)},\end{aligned}$$

de manera que $\alpha^\# \in B(U,\beta)$ por definición (véase la Figura 82.1). Demostramos primero que $B(U,\beta) \subset B(U,\alpha)$. Nótese que el elemento general de $B(U,\beta)$ es de la forma $(\beta * \gamma)^\#$, donde γ es un camino en U. Entonces se observa que

$$\begin{aligned}(\beta * \gamma)^\# &= ((\alpha * \delta) * \gamma)^\#\\ &= (\alpha * (\delta * \gamma))^\#,\end{aligned}$$

que pertenece a $B(U,\alpha)$ por definición. Por simetría se tiene la inclusión $B(U,\alpha) \subset B(U,\beta)$.

Ahora demostramos que los conjuntos $B(U,\alpha)$ forman una base. Si $\beta^\#$ pertenece a la intersección $B(U_1,\alpha_1) \cap B(U_2,\alpha_2)$, sólo necesitamos escoger un entorno conexo por caminos V de $\beta(1)$ contenido en $U_1 \cap U_2$. La inclusión

$$B(V,\beta) \subset B(U_1,\beta) \cap B(U_2,\beta)$$

se sigue de la definición de estos conjuntos, y la parte derecha de la ecuación es igual a $B(U_1,\alpha_1) \cap B(U_2,\alpha_2)$ por el resultado que acabamos de probar.

Paso 3. La aplicación p es continua y abierta. Es fácil ver que p es abierta, pues la imagen del elemento básico $B(U,\alpha)$ es el subconjunto abierto U de B: dado $x \in U$, elegimos un camino δ en U desde $\alpha(1)$ hasta x; entonces $(\alpha * \delta)^\#$ está en $B(U,\alpha)$ y $p((\alpha * \delta)^\#) = x$.

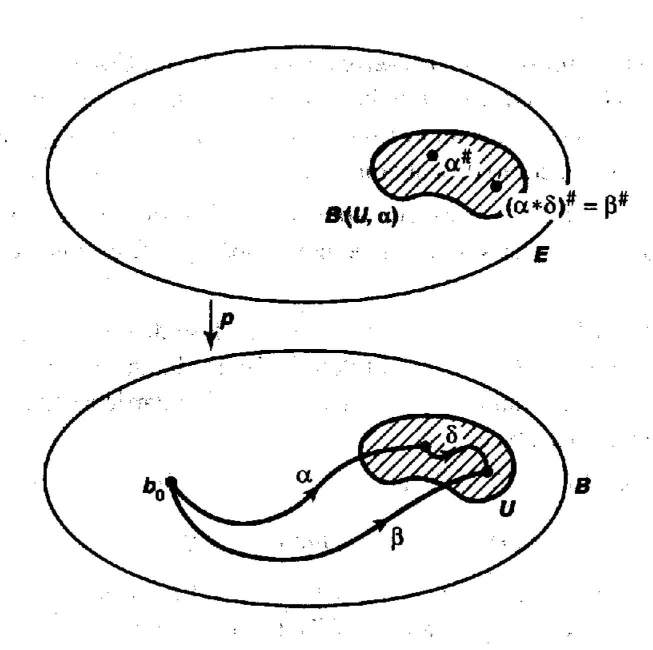


Figura 82.1

Para ver que p es continua, tomemos un elemento $\alpha^\#$ de E y un entorno W de $p(\alpha^\#)$. Elijamos un entorno conexo por caminos U del punto $p(\alpha^\#) = \alpha(1)$ en W. Entonces $B(U, \alpha)$ es un entorno de $\alpha^\#$ que p aplica en W. Así p es continua en $\alpha^\#$.

Paso 4. Cada punto de B tiene un entorno que está regularmente cubierto por p. Dado $b_1 \in B$, tomemos U un entorno conexo por caminos de b_1 que satisface la condición adicional de que el homomorfismo $\pi_1(U, b_1) \to \pi_1(B, b_1)$ inducido por la inclusión es trivial. Afirmamos que U está regularmente cubierto por p.

En primer lugar, probamos que $p^{-1}(U)$ es igual a la unión de los conjuntos $B(U, \alpha)$, cuando α recorre todos los caminos en B de b_0 a b_1. Como p aplica cada conjunto $B(U, \alpha)$ sobre U, está claro que $p^{-1}(U)$ contiene la unión. Por otra parte, si $\beta^\#$ pertenece a $p^{-1}(U)$, entonces $\beta(1) \in U$. Escojamos un camino δ en U desde b_1 hasta $\beta(1)$ y sea α el camino $\beta * \bar{\delta}$ de b_0 a b_1. Entonces $[\beta] = [\alpha * \delta]$, de manera que $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$, que pertenece a $B(U, \alpha)$. Así $p^{-1}(U)$ está contenido en la unión de los conjuntos $B(U, \alpha)$.

En segundo lugar, observemos que los distintos conjuntos $B(U, \alpha)$ son disjuntos. Pues si $\beta^\# \in B(U, \alpha_1) \cap B(U, \alpha_2)$, entonces $B(U, \alpha_1) = B(U, \beta) = B(U, \alpha_2)$, por el Paso 2.

En tercer lugar, demostramos que p define una aplicación biyectiva entre $B(U, \alpha)$ y U. Se sigue que $p|B(U, \alpha)$ es un homeomorfismo, siendo biyectiva, continua y abierta. Ya sabemos que p aplica $B(U, \alpha)$ *sobre* U. Para probar la inyectividad, supongamos que

$$p((\alpha * \delta_1)^\#) = p((\alpha * \delta_2)^\#),$$

donde δ_1 y δ_2 son caminos en U. Entonces $\delta_1(1) = \delta_2(1)$. Como el homomorfismo $\pi_1(U, b_1) \to \pi_1(B, b_1)$ inducido por la inclusión es trivial, $\delta_1 * \bar{\delta}_2$ es un camino homotópico en B al lazo constante. Entonces $[\alpha * \delta_1] = [\alpha * \delta_2]$, de manera que $(\alpha * \delta_1)^{\#} = (\alpha * \delta_2)^{\#}$, como deseábamos.

Se sigue que $p : E \to B$ es una aplicación recubridora en el sentido de los capítulos anteriores. Para ver si lo es, debemos probar que E es conexo por caminos, lo que haremos en breve.

Paso 5. Levantando un camino en B. Sea e_0 la clase de equivalencia del camino constante en b_0; entonces $p(e_0) = b_0$ por definición. Dado un camino α en B partiendo de b_0, calculamos su levantamiento a un camino en E partiendo de e_0 y probamos que este levantamiento acaba en $\alpha^{\#}$.

Para empezar, dado $c \in [0, 1]$, sea $\alpha_c : I \to B$ el camino definido por la ecuación

$$\alpha_c(t) = \alpha(tc), \quad \text{para } 0 \le t \le 1.$$

Entonces α_c es el "trozo" de α que va de $\alpha(0)$ a $\alpha(c)$. En particular, α_0 es el camino constante en b_0 y α_1 es el propio camino α. Definimos $\tilde{\alpha} : I \to E$ por la ecuación

$$\tilde{\alpha}(c) = (\alpha_c)^{\#}$$

y probamos que $\tilde{\alpha}$ es continua. Entonces $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α, puesto que $p(\tilde{\alpha}(c)) = \alpha_c(1) = \alpha(c)$; además, $\tilde{\alpha}$ comienza en $(\alpha_0)^{\#} = e_0$ y acaba en $(\alpha_1)^{\#} = \alpha^{\#}$.

Para estudiar la continuidad, introducimos la siguiente notación. Dados $0 \le c < d \le 1$, sea $\delta_{c,d}$ el camino que es igual a la aplicación lineal positiva de I sobre $[c, d]$ compuesta con α. Observemos que los caminos α_d y $\alpha_c * \delta_{c,d}$ son homotópicos porque uno es justamente una reparametrización del otro (véase la Figura 82.2).

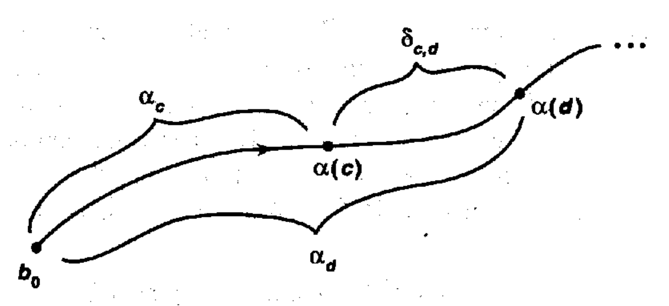


Figura 82.2

Verificamos ahora la continuidad de $\tilde{\alpha}$ en el punto c de $[0, 1]$. Sea W un elemento básico en E alrededor del punto $\tilde{\alpha}(c)$. Entonces W es igual a $B(U, \alpha_c)$ para algún entorno conexo por caminos U de $\alpha(c)$. Escojamos $\epsilon > 0$ tal que para $|c - t| < \epsilon$, el punto $\alpha(t)$ esté en U. Probamos que si d es un punto de $[0, 1]$ satisfaciendo que $|c - d| < \epsilon$, entonces $\tilde{\alpha}(d) \in W$; esto prueba la continuidad de $\tilde{\alpha}$ en c.

Suponemos pues que $|c-d|<\epsilon$. Tomemos primeramente el caso en que $d>c$. Sea $\delta=\delta_{c,d}$; entonces, como $[\alpha_d]=[\alpha_c*\delta]$, tenemos

$$\tilde{\alpha}(d)=(\alpha_d)^{\#}=(\alpha_c*\delta)^{\#}.$$

Como δ está en U, tenemos que $\tilde{\alpha}(d)\in B(U,\alpha_c)$, como deseábamos. Si $d<c$, ponemos $\delta=\delta_{d,c}$ y procedemos de manera análoga.

Paso 6. La aplicación $p:E\to B$ es una aplicación recubridora. Solamente necesitamos verificar que E es conexo por caminos, y esto es fácil. Pues si $\alpha^{\#}$ es un punto cualquiera de E, entonces el levantamiento $\tilde{\alpha}$ del camino α es un camino en E de e_0 a $\alpha^{\#}$.

Paso 7. Finalmente, $H=p_*(\pi_1(E,e_0))$. Sea α un lazo en B basado en b_0. Sea $\tilde{\alpha}$ su levantamiento a E partiendo de e_0. El Teorema 54.6 nos dice que $[\alpha]\in p_*(\pi_1(E,e_0))$ si, y sólo si, $\tilde{\alpha}$ es un *lazo* en E. Ahora bien, el punto final de $\tilde{\alpha}$ es el punto $\alpha^{\#}$, y $\alpha^{\#}=e_0$ si, y sólo si, α es equivalente al lazo constante en b_0, es decir, si, y sólo si, $[\alpha*\bar{e}_{b_0}]\in H$. Esto ocurre precisamente cuando $[\alpha]\in H$. ■

Corolario 82.2. *El espacio B tiene un espacio recubridor universal si, y sólo si, B es conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo.*

Ejercicios

1. Demuestre que un espacio simplemente conexo es semilocalmente simplemente conexo.
2. Sea X el pendiente infinito en $\mathbb{R}^2$ (véase el Ejemplo 1 de §80). Sea $C(X)$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que es la unión de todos los segmentos que unen puntos de $X\times 0$ con el punto $p=(0,0,1)$. Se denomina ***cono*** sobre X. Demuestre que $C(X)$ es simplemente conexo, pero no es localmente simplemente conexo en el origen.

*Ejercicios complementarios: propiedades topológicas y π_1

Los resultados de la sección anterior nos dicen que las hipótesis apropiadas para clasificar los espacios recubridores de B son que B sea conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Demostramos ahora que son también las hipótesis correctas para estudiar la relación entre varias propiedades topológicas de B y el grupo fundamental de B.

1. Sean X un espacio y $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X. ¿Bajo qué condiciones existe un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X que sea un refinamiento de $\mathcal{A}$ tal que para cada par B, B' de elementos de $\mathcal{B}$ que tengan intersección no vacía, la unión $B \cup B'$ está en un elemento de $\mathcal{A}$?

(a) Demuestre que tal cubrimiento $\mathcal{B}$ existe si X es metrizable. [*Indicación:* elija $\epsilon(x)$ para que $B(x, 3\epsilon(x))$ esté en un elemento de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{B}$ la colección de los abiertos $B(x, 3\epsilon(x))$.]

(b) Demuestre que tal cubrimiento $\mathcal{B}$ existe si X es de Hausdorff compacto. [*Indicación:* sea $A_1, \ldots, A_n$ una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que recubre X. Elija un cubrimiento abierto $C_1, \ldots, C_n$ de X tal que $\bar{C}_i \subset A_i$, para cada i. Para cada subconjunto no vacío J de $\{1, \ldots, n\}$, se considera el conjunto

$$B_J = \bigcap_{j \in J} A_j - \bigcup_{j \notin J} \bar{C}_j.]$$

2. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Sea X un espacio conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Si X es regular con una base numerable, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es numerable.
Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento de X por abiertos conexos por caminos A tal que para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $a \in A$, el homomorfismo $\pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ inducido por la inclusión es trivial. Sea $\mathcal{B}$ un cubrimiento abierto numerable de X por conjuntos conexos por caminos no vacíos que satisfacen la condición del Ejercicio 1. Elija un punto $p(B) \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Para cada par B, B' de elementos de $\mathcal{B}$ para los cuales $B \cap B' \neq \varnothing$, elija un camino $g(B, B')$ en $B \cup B'$ de $p(B)$ a $p(B')$. El camino $g(B, B')$ se denomina *camino selecto.*

Sean B_0 un elemento fijo de $\mathcal{B}$ y $x_0 \in p(B_0)$. Demuestre que si f es un lazo en X basado en x_0, entonces f es homotópico por caminos a un producto de caminos selectos, como sigue:

(a) Pruebe que existe una subdivisión

$$0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$$

de $[0, 1]$ tal que f aplica $[t_{n-1}, t_n]$ en B_0, y para cada $i = 1, \ldots, n-1$, f aplica $[t_{i-1}, t_i]$ en un elemento B_i de $\mathcal{B}$. Ponga $B_n = B_0$.

(b) Sea f_i la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ sobre $[t_{i-1}, t_i]$ compuesta con f. Sea $g_i = g(B_{i-1}, B_i)$. Elija un camino α_i en B_i de $f(t_i)$ a $p(B_i)$; si $i = 0$ ó n, sea α_i el camino constante en x_0. Demuestre que

$$[f_i] * [\alpha_i] = [\alpha_{i-1}] * [g_i].$$

(c) Demuestre que $[f] = [g_1] * \cdots * [g_n]$.

3. Sea $p : E \to X$ una aplicación recubridora tal que $\pi_1(X, x_0)$ es numerable. Demuestre que si X es regular con una base numerable, entonces también lo es E. [*Indicación:* sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X formada por conjuntos conexos por caminos. Sea $\mathcal{C}$ la colección de componentes conexas por caminos de $p^{-1}(B)$, para $B \in \mathcal{B}$. Compare con el Ejercicio 6 de §53.]

4. Pruebe el siguiente resultado:
Teorema. Sea X un espacio conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Si X es de Hausdorff compacto, entonces $\pi_1(X, x_0)$ está finitamente generado y, por tanto, es numerable.
Demostración. Repita la demostración esbozada en el Ejercicio 2, eligiendo que $\mathcal{B}$ sea finita. Como antes, se tiene la ecuación

$$[f] = [g_1] * \cdots * [g_n].$$

Elija, para cada $x \in X$, un camino β_x de x_0 a x; sea β_{x_0} el camino constante. Si $g = g(B, B')$, defina

$$L(g) = \beta_x * (g * \bar{\beta}_y)$$

donde $x = p(B)$ e $y = p(B')$. Demuestre que

$$[f] = [L(g_1)] * \cdots * [L(g_n)].$$

5. Sea X el pendiente infinito (véase el Ejemplo 1 de §80). Demuestre que X es un espacio de Hausdorff compacto con una base numerable cuyo grupo fundamental es no numerable. [*Indicación:* sea $r_n : X \to C_n$ una retracción. Dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de ceros y unos, demuestre que existe un lazo f en X tal que, para cada n, el elemento $(r_n)_*[f]$ es trivial si, y sólo si, $a_n = 0$.]

Capítulo 14

Aplicaciones a la teoría de grupos

En el capítulo anterior probamos cómo un problema de topología —clasificar espacios recubridores de un espacio B— se puede reducir a un problema de álgebra —clasificar los subgrupos del grupo fundamental de B—. Ahora consideramos el proceso inverso, reducir un problema de álgebra a uno de topología. El problema de álgebra en cuestión consiste en probar que cualquier subgrupo de un grupo libre es también un grupo libre. Aunque esta afirmación es desde luego creíble, no lo es tanto que su prueba es obvia. Procederemos aplicando la teoría de espacios recubridores a ciertos espacios topológicos llamados *grafos lineales*.

§83 Espacios recubridores de un grafo

Definimos aquí el concepto de grafo lineal (introducido antes en el caso finito) y probamos el teorema básico de que cualquier espacio recubridor de un grafo lineal es también un grafo lineal.

Recordemos que un *arco* A es un espacio homeomorfo al intervalo unidad $[0, 1]$. Los *extremos* de A son los puntos p y q correspondientes a 0 y 1 por el homeomorfismo; son los únicos puntos de A tales que $A - p$ y $A - q$ son conexos. El *interior* de un arco A consiste en A con sus extremos eliminados.

Definición. Un ***grafo lineal*** es un espacio X que se escribe como la unión de una colección de subespacios A_α, cada uno de los cuales es un arco, tal que:

(1) La intersección $A_\alpha \cap A_\beta$ de dos arcos es vacía o consiste en un punto que es un extremo de cada uno.

(2) La topología de X es coherente con los subespacios A_α.

Los arcos A_α se denominan ***aristas*** de X, y sus interiores ***aristas abiertas*** de X. Sus extremos se denominan ***vértices*** de X; indicamos el conjunto de vértices de X por X^0.

Si X es un grafo lineal y C es un subconjunto de X que es igual a una unión de aristas y vértices de X, entonces C es cerrado en X. La intersección de C con A_α es cerrada en A_α, puesto que es bien vacía, bien igual a A_α, bien igual a uno o ambos vértices de A_α. Se sigue que cada arista de X es un subconjunto cerrado de X. También que X^0 es un subespacio discreto cerrado de X, ya que cualquier subconjunto de X^0 es cerrado en X.

En el caso de un grafo finito, ya considerado, usamos la condición de Hausdorff en nuestra definición en lugar de la condición (2); se siguió, en aquel caso, que la topología de X era coherente con los subespacios A_α. En el caso de un grafo infinito, esto ya no sería cierto, así que tenemos que suponer la condición de coherencia como parte de la definición. También supondríamos la condición de Hausdorff, pero ya no es necesario, pues se sigue de la condición de coherencia:

Lema 83.1. *Todo grafo lineal es de Hausdorff; de hecho, es normal.*

Demostración. Sean B y C subconjuntos disjuntos de X. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que cada vértice de X está en B o en C. Escojamos, para cada α, subconjuntos disjuntos U_α y V_α de A_α que sean abiertos en A_α y que contengan a $B \cap A_\alpha$ y $C \cap A_\alpha$, respectivamente. Sean $U = \bigcup U_\alpha$ y $V = \bigcup V_\alpha$. Entonces $B \subset U$ y $C \subset V$.

Veamos que los conjuntos U y V son disjuntos. Si $x \in U \cap V$, entonces $x \in U_\alpha \cap V_\beta$, para algún $\alpha \neq \beta$. Esto implica que A_α y A_β contienen el punto x, lo que significa que x es un vértice de X. Esto es imposible, pues si $x \in B$, entonces x no está en ningún V_β, y si $x \in C$, entonces x no está en ningún U_α.

Ahora demostramos que U y V son abiertos en X. Para probar que U es abierto, probamos que $U \cap A_\alpha = U_\alpha$ para cada α. Por definición, $U \cap A_\alpha$ contiene a U_α. Si x es un punto de $U \cap A_\alpha$ que no está en U_α, entonces x pertenece a U_β, para algún $\beta \neq \alpha$. Entonces ambos A_α y A_β contienen a x, así que x debe ser un vértice de X. Esto es imposible, pues si $x \in B$, entonces $x \in U_\alpha$ por definición de U_α, y si $x \in C$, entonces x no puede pertenecer a U. ■

EJEMPLO 1. Si X es la unión por un punto de los círculos S_α, con punto común p, entonces X se puede expresar como un grafo lineal. Simplemente se necesita escribir cada S_α como un grafo con tres aristas, siendo p uno de sus vértices; entonces X es una unión de arcos. Para probar que la topología de X es coherente con la colección de arcos resultante, observamos que si $D \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α, para cada arco A_α, entonces $D \cap S_\beta$ es la unión de tres conjuntos de la forma $D \cap A_\alpha$ y por tanto es cerrado en S_β; entonces D es cerrado en X por definición (véase la Figura 83.1).

EJEMPLO 2. Sea J un espacio discreto y pongamos $E = [0,1] \times J$. Entonces el espacio cociente X obtenido de E colapsando el conjunto $0 \times J$ a un punto p es un grafo lineal.

La aplicación cociente $\pi : E \to X$ es una aplicación cerrada. Pues si C es un cerrado en E, entonces $\pi^{-1}\pi(C)$ es igual a $C \cup (\{0\} \times J)$ si C contiene un punto de $0 \times J$, y $\pi^{-1}\pi(C)$ es igual a C en otro caso. En cada caso, $\pi^{-1}\pi(C)$ es cerrado en E, así que $\pi(C)$ es cerrado en X. Se sigue que π aplica cada espacio $[0,1] \times \alpha$ homeomórficamente sobre su imagen A_α, por tanto A_α es un arco. La topología de X es coherente con los subespacios A_α, ya que π es una aplicación cociente (véase la Figura 83.2).

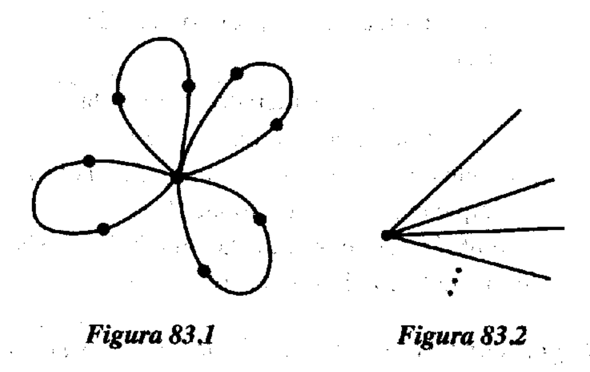


Figura 83.1 Figura 83.2

Definición. Sea X un grafo lineal. Sea Y un subespacio de X que es una unión de aristas de X. Entonces Y es cerrado en X y es, a su vez, un grafo lineal; se le denomina ***subgrafo*** de X.

Para probar que Y es un grafo lineal, necesitamos demostrar que la topología relativa sobre Y es coherente con el conjunto de aristas de Y. Si el subconjunto D de Y es cerrado en la topología relativa, entonces D es cerrado en X, de manera que $D \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α, para cada arista de X, y en particular para cada arista de Y. Recíprocamente, supongamos que, para cada arista A_β de Y, $D \cap A_\beta$ es cerrado en A_β. Tenemos que probar que $D \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α para cada arista A_α de X que *no* esté contenida en Y. Pero en este caso, $D \cap A_\alpha$ es ya vacío, ya un conjunto unipuntual. Concluimos que Y tiene la topología coherente con su conjunto de aristas.

Lema 83.2. *Sea X un grafo lineal. Si C es un subespacio compacto de X, existe un subgrafo finito Y de X que contiene a C. Si C es conexo, Y se puede elegir conexo.*

Demostración. En primer lugar, observemos que C contiene solamente un número finito de vértices de X. Pues $C \cap X^0$ es un subespacio discreto cerrado del espacio compacto C; como no tiene punto límite, debe ser finito. Análogamente, sólo existe un número finito de valores de α para los cuales C contiene un punto interior de la arista A_α. Pues si elegimos un punto x_α de C interior a A_α, para cada índice α para el cual esto es posible, obtenemos una colección $B = \{x_\alpha\}$ cuya intersección con

cada arista A_β es un conjunto unipuntual o vacía. Se sigue que cada subconjunto de B es cerrado en X, así que B es un subespacio discreto cerrado de C y, por tanto, finito.

Formamos Y eligiendo, para cada vértice x de X que pertenece a C, una arista de X que tenga a x por vértice, y añadiendo a esas aristas todos las aristas A_α cuyos interiores contienen puntos de C. Entonces Y es un subgrafo finito que contiene a C. Notemos que si C es conexo, entonces Y es la unión de una colección de arcos cada uno de los cuales interseca a C, así que Y es conexo. ∎

Lema 83.3. *Si X es un grafo lineal, entonces X es localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo.*

Demostración. *Paso 1.* Demostramos que X es localmente conexo por caminos. Si $x \in X$ es un punto interior de alguna arista de X, entonces en cada entorno de x existe otro entorno de x homeomorfo a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, que es conexo por caminos. Por otro lado, si x es un vértice de X y U es un entorno de x, entonces podemos elegir, para cada arista A_α teniendo a x como un extremo, un entorno V_α de x en A_α contenido en U que es homeomorfo al intervalo semiabierto por la derecha $[0, 1)$. Entonces $\bigcup V_\alpha$ es un entorno de x en X contenido en U, y es una unión de espacios conexos por caminos que tienen en común el punto x.

Paso 2. Veamos que X es semilocalmente simplemente conexo. Es decir, demostremos que si $x \in X$, entonces x tiene un entorno U tal que $\pi_1(U, x)$ es trivial.

Si x está en el interior de alguna arista de X, entonces el interior de esta arista es dicho entorno. Así supongamos que x es un vértice de X. Denotemos por $\overline{\mathrm{St}}(x)$ la unión de aquellas aristas de X que tienen a x como un extremo, y por $\mathrm{St}(x)$ el subespacio de $\overline{\mathrm{St}}(x)$ obtenido eliminando todos los vértices distintos de x ($\mathrm{St}(x)$ se llama la *estrella* de x en X). El conjunto $\mathrm{St}(x)$ es abierto en X, porque su complementario es una unión de arcos y vértices. Probamos que $\pi_1(\mathrm{St}(x), x)$ es trivial.

Sea f un lazo en $\mathrm{St}(x)$ basado en x. Entonces el conjunto imagen $f(I)$ es compacto, por tanto está en alguna unión finita de arcos de $\overline{\mathrm{St}}(x)$. Cualquier unión de este tipo es homeomorfa a la unión de un conjunto finito de segmentos en el plano que tienen en común un extremo. Y para cada lazo en tal espacio, la homotopía por rectas lo reduce al lazo constante en x. ∎

Ahora bien, si x es un vértice de X, es cierto que el espacio unipuntual $\{x\}$ es un retracto de deformación de $\overline{\mathrm{St}}(x)$. Pero se requiere un considerable esfuerzo para probar que la deformación es continua. Se necesita el hecho de que una aplicación

$$F : \overline{\mathrm{St}}(x) \times I \to \overline{\mathrm{St}}(x)$$

es continua si su restricción a cada subespacio $A_\alpha \times I$ es continua. Este resultado se sigue del lema del pegamiento cuando $\overline{\mathrm{St}}(x)$ es una unión de un número finito

de arcos, pero el resultado general requiere demostrar que la topología de $\overline{\text{St}}(x) \times I$ es coherente con los subespacios $A_\alpha \times I$. Y esto a su vez se sigue de un teorema básico sobre productos de aplicaciones cociente (véase el Ejercicio 11 de §29). Estas consideraciones no surgen si simplemente se desea reducir un lazo a un punto (más bien que el espacio entero $\overline{\text{St}}(x)$), ya que cualquier lazo está en la unión de un número finito de aristas, donde no hay problema.

Ahora discutiremos espacios recubridores de grafos lineales. Nótese que el convenio de que cada espacio recubridor se supone que es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, hipótesis que hicimos en el último capítulo, ya no se aplica.

Teorema 83.4. *Sea $p : E \to X$ una aplicación recubridora, donde X es un grafo lineal. Si A_α es una arista de X y B es una componente conexa de $p^{-1}(A_\alpha)$, entonces p aplica B homeomórficamente sobre A_α. Además, el espacio E es un grafo lineal, con las componentes conexas de los espacios $p^{-1}(A_\alpha)$ como sus aristas.*

Demostración. *Paso 1*. Probemos que p aplica B homeomórficamente sobre A_α. Como el arco A_α es conexo por caminos y localmente conexo por caminos, los Teoremas 53.2 y 80.1 nos dicen que la aplicación $p_0 : B \to A_\alpha$, obtenida por restricción de p, es una aplicación recubridora. Puesto que B es conexo por caminos, la correspondencia de levantamientos $\Phi : \pi_1(A_\alpha, a) \to p_0^{-1}(a)$ es sobreyectiva. Como A_α es simplemente conexo, $p_0^{-1}(a)$ consiste en un único punto (véase el Teorema 54.4). Por consiguiente p_0 es un homeomorfismo.

Paso 2. Puesto que X es la unión de los arcos A_α, el espacio E es la unión de los arcos B que son las componentes conexas de los espacios $p^{-1}(A_\alpha)$. Sean B y B' componentes conexas de $p^{-1}(A_\alpha)$ y $p^{-1}(A_\beta)$, respectivamente, con $B \neq B'$. Probemos que B y B' se cortan a lo sumo en un extremo común. Si A_α y A_β son iguales, entonces B y B' son disjuntas, y si A_α y A_β son disjuntas, así lo son B y B'. Por tanto, si B y B' se cortan, A_α y A_β deben cortarse en un extremo x de cada uno de ellos; entonces $B \cap B'$ consiste en un único punto, que deberá ser un extremo de cada una.

Paso 3. Probemos que E tiene la topología coherente con los arcos B. Ésta es la parte más difícil de la demostración. Sea W un subconjunto de E tal que $W \cap B$ es abierto en B, para cada arco B de E. Probemos que W es abierto en E.

En primer lugar, demostremos que $p(W)$ es abierto en X. Si A_α es una arista de X, entonces $p(W) \cap A_\alpha$ es la unión de los conjuntos $p(W \cap B)$, cuando B recorre todas las componentes conexas de $p^{-1}(A_\alpha)$. Cada uno de los conjuntos $p(W \cap B)$ es abierto en A_α, ya que p aplica B homeomórficamente sobre A_α; por consiguiente su unión $p(W) \cap A_\alpha$ es abierta en A_α. Como X tiene la topología coherente con los subespacios A_α, el conjunto $p(W)$ es abierto en X.

En segundo lugar, probemos nuestro resultado en el caso especial donde el conjunto W está contenido en una de las rebanadas V de $p^{-1}(U)$, donde U es un abierto

de X que está regularmente recubierto por p. Por el resultado que acabamos de probar, sabemos que el conjunto $p(W)$ es abierto en X. Se sigue que $p(W)$ es abierto en U. Como la aplicación de V sobre U obtenida por restricción de p es un homeomorfismo, W debe ser abierto en V, y por tanto abierto en E.

Finalmente, demostremos nuestro resultado en general. Escojamos un cubrimiento $\mathcal{A}$ de X por abiertos U que estén regularmente recubiertos por p. Entonces las rebanadas V de los conjuntos $p^{-1}(U)$, para $U \in \mathcal{A}$, recubren E. Para cada una de tales rebanadas V, sea $W_V = W \cap V$. El conjunto W_V tiene la propiedad de que para cada arco B de E, el conjunto $W_V \cap B$ es abierto en B, pues $W_V \cap B = (W \cap B) \cap (V \cap B)$ y los conjuntos $W \cap B$ y $V \cap B$ son abiertos en B. El resultado del párrafo anterior implica que W_V es abierto en E. Como W es la unión de los conjuntos W_V, es también abierto en E. ■

Ejercicios

1. En la demostración de normalidad de un grafo lineal X, ¿por qué hicimos la hipótesis de que cada vértice de X pertenece ya a B ya a C?

2. El ***número de Euler*** de un grafo lineal X se define como el número de vértices de X menos el número de aristas de X. Es un invariante topológico de X, como veremos más adelante. ¿Cuál es el número de Euler de un arco? ¿de un círculo? ¿de una unión por un punto de n círculos? ¿del grafo completo de n vértices? Si E es un espacio recubridor de n hojas de X, ¿cómo se relacionan los números de Euler de E y X?

§84 El grupo fundamental de un grafo

Ahora probaremos el teorema básico de que el grupo fundamental de un grafo lineal es un grupo libre. De aquí en adelante nos referiremos a un grafo lineal simplemente como un *grafo*.

Definición. Una ***arista orientada*** e de un grafo X es una arista de X junto con una ordenación de sus vértices, el primero de los cuales se denomina ***vértice inicial*** y el segundo ***vértice final*** de e. Un ***trayecto*** en X es una sucesión $e_1, \ldots, e_n$ de aristas orientadas de X tal que el vértice final de e_i coincide con el vértice inicial de e_{i+1}, para $i = 1, \ldots, n-1$. Un trayecto queda completamente especificado por la sucesión de vértices $x_0, \ldots, x_n$, donde x_0 es el vértice inicial de e_1 y x_i es el vértice final de e_i, para $i = 1, \ldots, n$. Se dice un trayecto ***de*** x_0 ***a*** x_n. Se dirá que es un ***trayecto cerrado*** si $x_0 = x_n$.

Dada una arista orientada e de X, sea f_e la aplicación lineal positiva de [0,1] sobre e; es un camino desde el punto inicial de e hasta el punto final de e. Entonces, correspondiente al trayecto $e_1, \ldots, e_n$ de x_0 a x_n, se tiene el camino

$$f = f_1 * (f_2 * (\cdots * f_n))$$

de x_0 a x_n, donde $f_i = f_{e_i}$, que está determinado de manera única por el trayecto $e_1, \ldots, e_n$. Le llamaremos ***camino correspondiente al trayecto*** $e_1, \ldots, e_n$. Si el trayecto es cerrado, entonces el camino correspondiente f es un lazo.

Lema 84.1. *Un grafo X es conexo si, y sólo si, cada par de vértices de X se puede unir por un trayecto en X.*

Demostración. Supongamos que X es conexo. Se define $x \sim y$ si existe un trayecto en X de x a y. Para cualquier arista de X, sus extremos están en la misma clase de equivalencia; sea Y_x la unión de todas las aristas cuyos extremos son equivalentes a x. Entonces Y_x es un subgrafo de X y por tanto es cerrado en X. Los subgrafos Y_x forman una partición de X en subespacios cerrados disjuntos; como X es conexo, sólo puede existir uno de tales subespacios.

Recíprocamente, supongamos que cada par de vértices de X se puede unir por un trayecto. Entonces se pueden unir por un camino en X. Por consiguiente, todos los vértices de X pertenecen a la misma componente de X. Como cada arista es conexa, también pertenece a esta componente. Así pues, X es conexo. ∎

Definición. Sea $e_1, \ldots, e_n$ un trayecto en el grafo lineal X. Puede ocurrir que para algún i, las aristas orientadas e_i y e_{i+1} sean la misma arista de X pero con orientaciones opuestas. Si esta situación *no* ocurre, entonces el trayecto se dice que es un ***trayecto reducido***.

Obsérvese que si esta situación ocurre, entonces se pueden eliminar e_i y e_{i+1} de la sucesión de aristas orientadas y tener todavía un trayecto (siempre que la sucesión original tenga al menos tres aristas). Este proceso de eliminación se denomina *reducción* del trayecto. Permite probar que en cualquier grafo conexo, cada par de vértices distintos se pueden unir por un trayecto reducido (véase la Figura 84.1).

Definición. Un subgrafo T de un grafo X se dice que es un ***árbol*** en X si T es conexo y T no contiene trayectos reducidos cerrados.

Un grafo lineal formado por una arista es un árbol. El grafo de la Figura 84.2 no es un árbol, pero la supresión del eje e lo convertiría en un árbol. El grafo de la Figura 84.3 *es* un árbol; la supresión de la arista A dejaría un nuevo árbol.

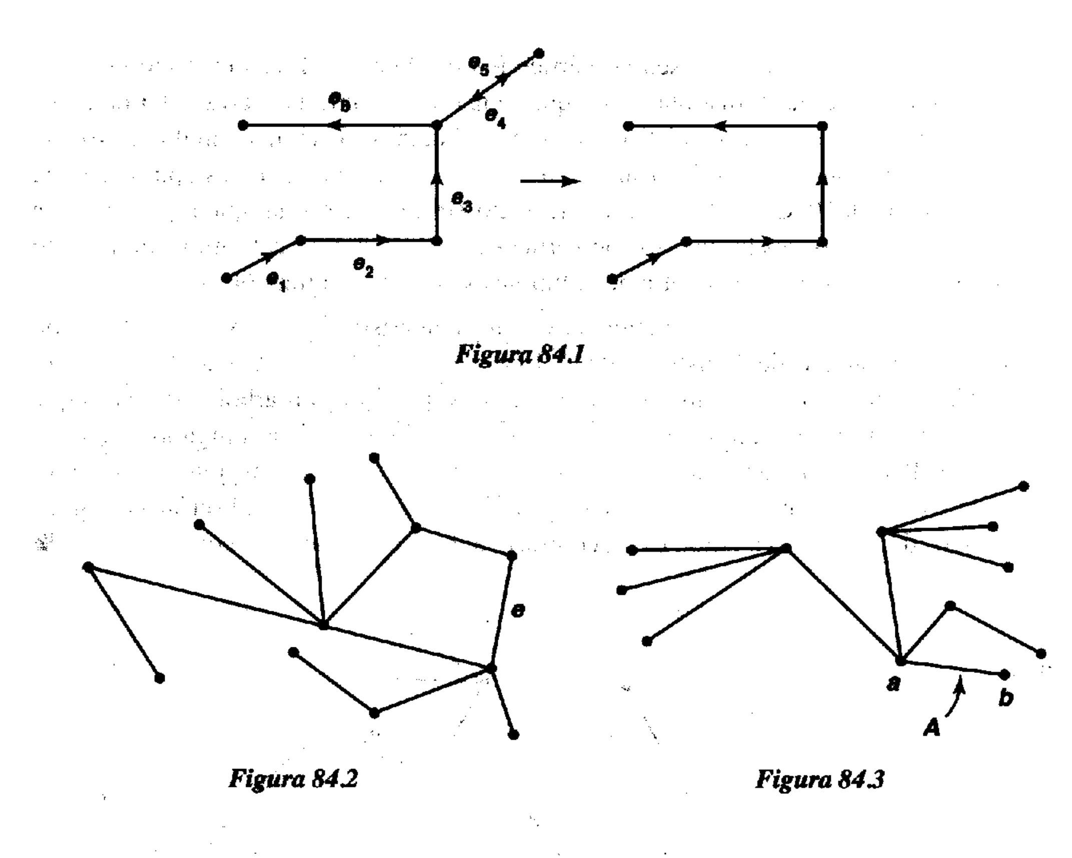


Figura 84.1

Figura 84.2

Figura 84.3

Lema 84.2. *Si T es un árbol en X y A es una arista de X que corta a T en un vértice, entonces $T \cup A$ es un árbol en X. Recíprocamente, si T es un árbol finito en X que consiste en más de una arista, entonces existen un árbol T_0 en X y una arista A de X que corta a T_0 en un vértice, tal que $T = T_0 \cup A$.*

Demostración. Supongamos que T es un árbol en X y que A es una arista que corta a T en un vértice. Está claro que $T \cup A$ es conexo; probemos que no contiene ningún trayecto reducido cerrado. Sean a y b los extremos de A, con $\{a\} = T \cap A$ (véase la Figura 84.3). Supongamos que $x_0, \ldots, x_n = x_0$ es la sucesión de vértices de un trayecto reducido en $T \cup A$. Si ninguno de los vértices x_i es igual a b, entonces el trayecto está en T, en contra de la hipótesis. Si $x_i = b$, para algún i, con $0 < i < n$, entonces debemos tener $x_{i-1} = a$ y $x_{i+1} = a$; por tanto el trayecto no es reducido, en contra de la hipótesis. Finalmente, si $x_0 = b = x_n$ y $x_i \neq b$, para $i = 1, \ldots, n-1$, entonces $x_1 = a$ y $x_{n-1} = a$, y la sucesión de vértices $x_1, \ldots, x_{n-1}$ especifica un trayecto reducido cerrado en T, de nuevo en contra de la hipótesis.

Sea ahora T un árbol finito en X con más de una arista. En primer lugar, probemos que algún vértice b de T pertenece a una sola arista de T. Si no fuera así, podemos construir un trayecto en T como sigue: comenzamos con un vértice x_0 de T; entonces escogemos una arista e_1 de T que tenga a x_0 como un extremo. Orien-

tamos e_1 de manera que x_0 sea su vértice inicial. Sea x_1 el otro extremo de e_1, y sea e_2 una arista de T distinta de e_1 que tenga a x_1 como un vértice. Orientamos e_2 de manera que x_1 sea su vértice inicial. Continuamos de manera análoga. No hay dos términos consecutivos de la sucesión $e_1, e_2, \ldots$ con orientaciones opuestas de la misma arista de T. Como T es finito, debe existir un índice n tal que $x_n = x_i$, para algún $i < n$. Entonces la sucesión de vértices $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ determina un trayecto reducido cerrado en T, en contra de la hipótesis (véase la Figura 84.4).

Sea b un vértice de T que pertenezca a una sola arista A de T, y sea T_0 formado por todas las aristas de T distintas de A. Entonces $T = T_0 \cup A$. Como T es conexo, T_0 debe cortar a A en su otro vértice a. Veamos que T_0 es un árbol. Está claro que no contiene trayectos reducidos cerrados, ya que T no contiene ninguno, y que es conexo. Pues si T_0 fuera la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos C y D, el punto a estaría en uno de ellos, por ejemplo C. Entonces $C \cup A$ y D serían conjuntos cerrados disjuntos cuya unión es T, contrario al hecho de que T es conexo. ■

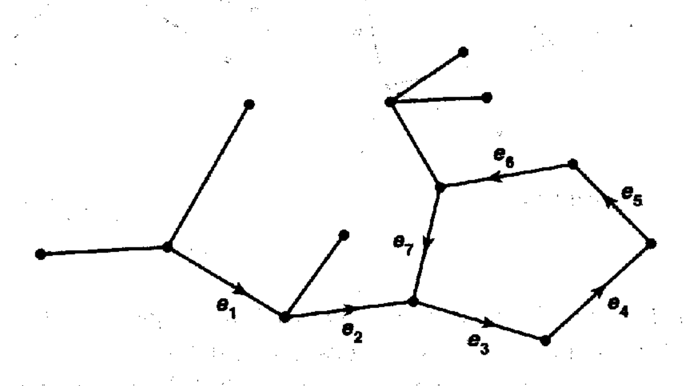


Figura 84.4

Teorema 84.3. *Todo árbol T es simplemente conexo.*

Demostración. Primero consideramos el caso en que T es un árbol finito. Si T consiste en una sola arista, entonces T es simplemente conexo. Si T tiene n aristas, con $n > 1$, existe una arista A de T tal que $T = T_0 \cup A$, donde T_0 es un árbol con $n-1$ aristas y $T_0 \cap A$ es un vértice. Entonces T_0 es un retracto de deformación de T. Como T_0 es simplemente conexo por la hipótesis de inducción, así lo es T.

Para probar el caso general, sea f un lazo en T. El conjunto imagen de f es compacto y conexo, por tanto está contenido en un subgrafo conexo finito Y de T. Ahora bien, Y no contiene ningún trayecto reducido cerrado, ya que así ocurre con T. Por tanto Y es un árbol. Como Y es finito, es simplemente conexo. Por consiguiente, f es un camino homotópicamente nulo. ■

Definición. Un árbol T en X es ***maximal*** si no existe árbol alguno en X que contenga propiamente a T.

Teorema 84.4. *Sea X un grafo conexo. Un árbol T en X es maximal si, y sólo si, contiene todos los vértices de X.*

Demostración. Supongamos que T es un árbol en X que contiene todos los vértices de X. Si Y es un subgrafo de X que contiene propiamente a T, probemos que Y contiene un trayecto reducido cerrado; se sigue que T es maximal. Sea A una arista de Y que no está en T; por hipótesis, los extremos a y b de A pertenecen a T. Como T es conexo, podemos elegir un trayecto reducido $e_1, \ldots, e_n$ en T de a a b. Si seguimos esta sucesión por la arista A, orientada de b a a, obtenemos un trayecto reducido cerrado en Y.

Sea ahora T un árbol en X que no contiene todos los vértices de X. Probemos que T no es maximal. Sea x_0 un vértice de X que no está en T. Como X es conexo, podemos elegir un trayecto en X de x_0 a un vértice de T, especificado por la sucesión de vértices $x_0, \ldots, x_n$. Sea i el menor índice tal que $x_i \in T$. Sea A la arista de X con vértices x_{i-1} y x_i. Entonces $T \cup A$ es un árbol en X, por el lema anterior, y $T \cup A$ contiene propiamente a T. ■

Teorema 84.5. *Si X es un grafo lineal, cada árbol T_0 en X está contenido en un árbol maximal en X.*

Demostración. Aplicamos el lema de Zorn a la colección $\mathcal{T}$ de todos los árboles en X que contienen a T_0, estrictamente parcialmente ordenada por la inclusión propia. Para probar que esta colección tiene un elemento maximal, solamente necesitamos demostrar lo siguiente:

> *Si $\mathcal{T}'$ es una subcolección de $\mathcal{T}$ que está simplemente ordenada por la inclusión propia, entonces la unión Y de los elementos de $\mathcal{T}'$ es un árbol en X.*

En primer lugar, observemos que como Y es una unión de subgrafos de X, es un subgrafo de X. En segundo lugar, como Y es una unión de espacios conexos que contienen al espacio conexo T_0, resulta que Y es conexo.

Finalmente, supongamos que $e_1, \ldots, e_n$ es un trayecto reducido cerrado en Y y lleguemos a una contradicción. Para cada i, escojamos un elemento T_i de $\mathcal{T}'$ que contenga a e_i. Puesto que $\mathcal{T}'$ está simplemente ordenada por la inclusión propia, uno de los árboles $T_1, \ldots, T_n$, por ejemplo T_j, contiene a todos los demás. Pero entonces $e_1, \ldots, e_n$ es un trayecto reducido cerrado en T_j, en contra de la hipótesis. ■

Ahora calculamos el grupo fundamental de un grafo. Necesitamos el siguiente resultado.

Lema 84.6. *Supongamos $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos de X. Supongamos que $U \cap V$ es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos conexos por caminos A y B, que α es un camino en U desde el punto a de A al punto b de B, y que β es un camino en V de b a a. Si U y V son simplemente conexos, entonces la clase $[\alpha * \beta]$ genera $\pi_1(X, a)$.*

Demostración. La situación es similar a la del Teorema 59.1, excepto que $U \cap V$ tiene dos componentes conexas en vez de una. La demostración es análoga.

Sea f un lazo en X basado en a. Elijamos una subdivisión $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$, tal que para cada i, $f(a_i) \in U \cap V$ y f aplica $[a_{i-1}, a_i]$ ya en U ya en V. Sea f_i la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ sobre $[a_{i-1}, a_i]$ seguida de f; entonces $[f] = [f_1] * \cdots * [f_n]$. Para $i = 1, \ldots, n-1$, escojamos un camino α_i ya en A ya en B desde a ó b hasta $f(a_i)$; elijamos α_0 y α_n los caminos constantes en a. Entonces pongamos

$$g_i = \alpha_{i-1} * (f_i * \bar{\alpha}_i).$$

Por cálculo directo $[f] = [g_1] * \cdots * [g_n]$. Como g_i es un camino ya en U ya en V con extremos en el conjunto $\{a, b\}$, y como U y V son simplemente conexos, g_i es un camino homotópico ya a una constante, ya a $\alpha, \beta, \bar{\alpha}$ ó $\bar{\beta}$. Se sigue que bien $[f]$ es trivial, bien es igual a una potencia positiva de $[\alpha * \beta]$ ó de $[\bar{\beta} * \bar{\alpha}]$. Por consiguiente, $[\alpha * \beta]$ genera el grupo $\pi_1(X, a)$ (véase la Figura 84.5). ■

Teorema 84.7. *Sea X un grafo conexo que no es un árbol. Entonces el grupo fundamental de X es un grupo libre no trivial. En realidad, si T es un árbol maximal en X, entonces el grupo fundamental de X tiene un sistema de generadores libres que está en correspondencia biyectiva con la colección de aristas de X que no están en T.*

Demostración. Sea T un árbol maximal en X; T contiene a todos los vértices de X. Sea x_0 un vértice fijo de T. Para cada vértice x de X, escojamos un camino γ_x en T de x_0 a x. Entonces para cada arista A de X que no está en T, definamos un lazo g_A en X como sigue. Orientemos A; sea f_A un camino lineal en A desde su vértice inicial x hasta su vértice final y; pongamos

$$g_A = \gamma_x * (f_A * \bar{\gamma}_y).$$

Probemos que las clases $[g_A]$ forman un sistema de generadores libres para $\pi_1(X, x_0)$.

Paso 1. En primer lugar probaremos el teorema cuando las aristas de X que no están en T son un número finito. Procederemos por inducción. El proceso de inducción es fácil, por lo que lo consideraremos primero.

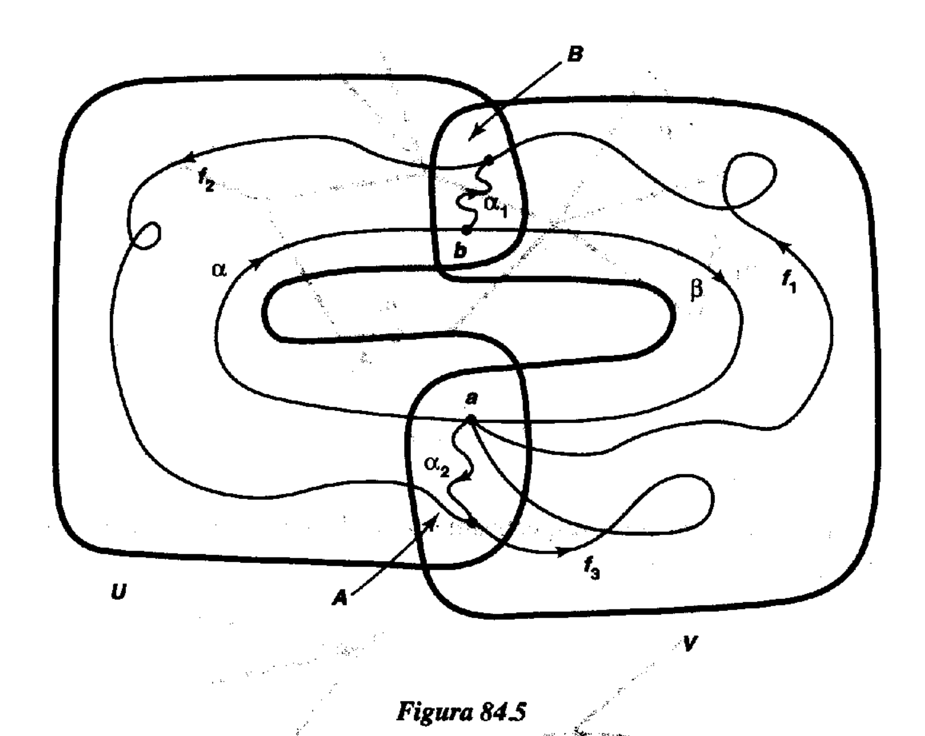


Figura 84.5

Sean $A_1, \ldots, A_n$ las aristas de X que no están en T, donde $n > 1$. Orientemos esas aristas y denotemos por g_i el lazo g_{A_i}. Para cada i, escojamos un punto p_i interior a A_i. Sean

$$U = X - p_2 - \cdots - p_n \quad \text{y} \quad V = X - p_1.$$

Entonces U y V son abiertos en X y el espacio $U \cap X = X - p_1 - \cdots - p_n$ es simplemente conexo, ya que tiene a T como un retracto de deformación. Por tanto, $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$, por el Corolario 70.3.

El espacio U tiene a $T \cup A_1$ como retracto de deformación, de manera que $\pi_1(U, x_0)$ es libre sobre el generador $[g_1]$, como demostraremos en el Paso 2. El espacio V tiene a $T \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ como retracto de deformación, así que $\pi_1(V, x_0)$ es libre sobre los generadores $[g_2], \ldots, [g_n]$, por la hipótesis de inducción. Se sigue del Teorema 69.2 que $\pi_1(X, x_0)$ es libre sobre los generadores $[g_1], \ldots, [g_n]$ (véase la Figura 84.6).

Paso 2. Ahora consideramos el caso donde hay una sola arista D de X que no está en T. Este paso es más difícil. Orientemos D. Probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ es cíclico infinito con generador $[g_D]$.

Sean a_0 y a_1 los vértices inicial y final de D, respectivamente. Escribamos D como la unión de tres arcos: D_1 con extremos a_0 y a; D_2 con extremos a y b; y D_3 con extremos b y a_1 (véase la Figura 84.7). Sean f_1, f_2 y f_3 caminos lineales en D

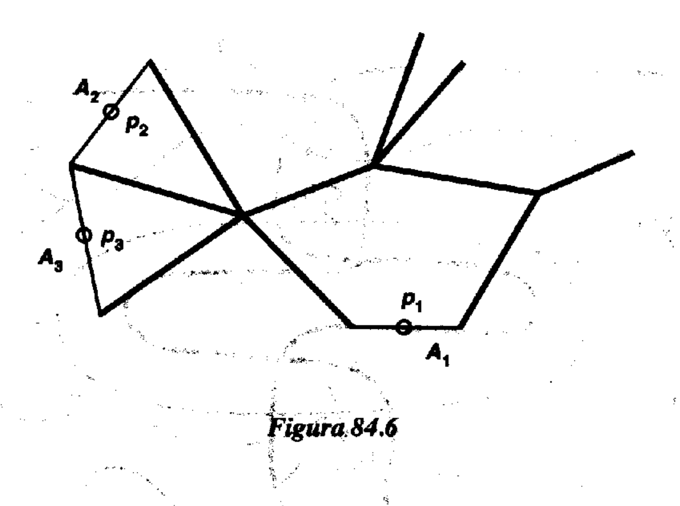


Figura 84.6

de a_0 a a, de a a b y de b a a_1, respectivamente. Aplicamos el teorema anterior para calcular $\pi_1(X, a)$.

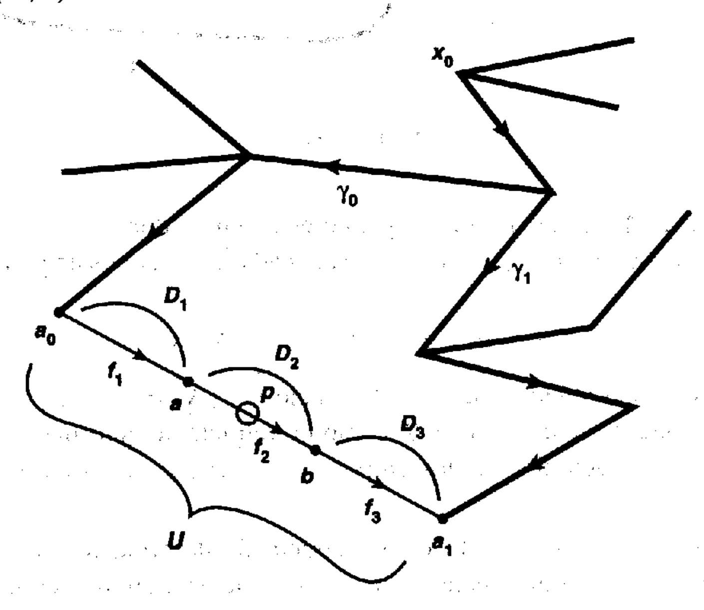


Figura 84.7

Escojamos un punto p interior al arco D_2. Sean $U = D - a_0 - a_1$ y $V = X - p$. Entonces U y V son abiertos en X cuya unión es X. El espacio U es simplemente conexo, porque es un arco abierto. Y el espacio V es simplemente conexo, porque tiene el árbol T como retracto de deformación. El espacio $U \cap V$, que es igual a $U - p$, tiene dos componentes conexas; sea A la que contiene a a y B la que contiene a b. Entonces la hipótesis del lema anterior se satisface. El camino $\alpha = f_2$ es un camino en U de a a b. Si ponemos $\gamma_0 = \gamma_{a_0}$ y $\gamma_1 = \gamma_{a_1}$, entonces el camino $\beta = (f_3 * (\bar{\gamma}_1 * (\gamma_0 * f_1)))$ es un camino en V de b a a. Por tanto, $\pi_1(X, a)$ está generado

por la clase

$$[\alpha * \beta] = [f_2] * [f_3] * [\bar{\gamma}_1] * [\gamma_0] * [f_1].$$

Se sigue que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por $\hat{\delta}[\alpha * \beta]$, donde δ es el camino $\bar{f}_1 * \bar{\gamma}_0$ de a a x_0. Calculamos esta clase de homotopía de caminos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}[\alpha * \beta] &= [\gamma_0 * f_1] * [\alpha * \beta] * [\bar{f}_1 * \bar{\gamma}_0] \\ &= [\gamma_0] * [f_1 * (f_2 * f_3)] * [\bar{\gamma}_1] \\ &= [\gamma_0] * [f_D] * [\bar{\gamma}_1] \\ &= [g_D].\end{aligned}$$

Por tanto, $[g_D]$ genera $\pi_1(X, x_0)$.

Falta demostrar que el elemento $[g_D]$ tiene orden infinito, de manera que $\pi_1(X, x_0)$ es cíclico infinito. Se puede aplicar el Teorema 63.1 (que utilizamos para probar el teorema de la curva de Jordan), según el cual el elemento $[\alpha * \beta]$ tiene orden infinito en $\pi_1(X, a)$. Alternativamente (y más fácil), se puede considerar la aplicación $\pi : X \to S^1$ que colapsa el árbol T en un punto p y aplica homeomórficamente el arco abierto Int$D$ sobre $S^1 - p$. Entonces $\pi \circ \gamma_0$ y $\pi \circ \bar{\gamma}_1$ son caminos constantes, así que

$$\pi_*([g_D]) = [\pi \circ f_D].$$

Esta clase genera $\pi_1(S^1, p)$. Se sigue que $[g_D]$ tiene orden infinito en $\pi_1(X, x_0)$.

Paso 3. Ahora consideramos la situación donde la colección de aristas de X que no están en T es infinita. La demostración en este caso es muy similar a la correspondiente para una unión infinita por un punto de círculos y por tanto se omiten los detalles (véase el Teorema 71.3). Los hechos cruciales son: cualquier lazo en X basado en x_0 está en el espacio

$$X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = T \cup A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n}$$

para algún conjunto finito de índices α_i, y cualquier homotopía de caminos entre tales lazos también está en tal espacio. Pero esto significa que el caso general se reduce al caso finito. ∎

Ejercicios

1. Encuentre un ejemplo para probar que la segunda parte del Lema 84.2 no es válida si T es infinito.
2. ¿Cuál es el cardinal de un sistema de generadores libres para el grupo fundamental del grafo completo sobre n vértices? ¿Y el del grafo de servicios? (véase §64).

3. Sean X la unión por un punto de dos círculos y $p : E \to X$ una aplicación recubridora. El grupo fundamental de E se aplica isomórficamente por p_* en un subgrupo H del grupo fundamental de X; éste último es libre sobre dos generadores α y β.
   (a) Para cada uno de los cuatro espacios recubridores E dados en el Ejercicio 2 de §81, determine el cardinal de un sistema de generadores libres para el grupo fundamental de E.
   (b) Para cada uno de esos espacios recubridores, halle, en términos de α y β, un sistema de generadores libres para el subgrupo H del grupo fundamental de X.

§85 Subgrupos de grupos libres

Demostramos ahora nuestro teorema principal, que un subgrupo de H de un grupo libre F es también libre. El método de demostración, bastante notable, nos proporcionará alguna información acerca del cardinal de un sistema de generadores libres para H, cuando se conoce el cardinal de un sistema de generadores libres para F.

Teorema 85.1. *Si H es un subgrupo de un grupo libre F, entonces H es libre.*

Demostración. Sea $\{\alpha \mid \alpha \in J\}$ un sistema de generadores libres para F. Sea X una unión por un punto de círculos S_α, uno para cada $\alpha \in J$; sea x_0 el punto común. Podemos dar a X la estructura de grafo lineal descomponiendo cada círculo S_α en tres arcos, dos de los cuales tienen a x_0 como extremo. La función que asigna a cada α un lazo generando $\pi_1(S_\alpha, x_0)$ induce un isomorfismo de F con $\pi_1(X, x_0)$. Por tanto, podemos también suponer que F es igual al grupo $\pi_1(X, x_0)$.

El espacio X es conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Por tanto el Teorema 82.1 se aplica para probar que existe un espacio recubridor $p : E \to X$ de X tal que, para algún punto e_0 de $p^{-1}(x_0)$,

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

Como p_* es un monomorfismo, $\pi_1(E, e_0)$ es isomorfo a H.

El espacio E es un grafo lineal por el Teorema 83.4. Entonces el Teorema 84.7 implica que su grupo fundamental es un grupo libre. ∎

Definición. Si X es un grafo lineal finito, se define el ***número de Euler*** de X como el número de vértices de X menos el número de aristas de X. Se suele representar por $\chi(X)$.

Lema 85.2. *Si X es un grafo lineal conexo finito, entonces el cardinal de un sistema de generadores finito para el grupo fundamental de X es $1 - \chi(X)$.*

Demostración. *Paso 1.* En primer lugar probamos que para cualquier árbol finito T, se tiene que $\chi(T) = 1$. Se procede por inducción sobre el número n de aristas de T. Si $n = 1$, entonces T tiene una arista y dos vértices, por tanto $\chi(T) = 1$. Si $n > 1$, podemos escribir $T = T_0 \cup A$, donde T_0 es un árbol con $n - 1$ aristas y A es una arista que corta a T_0 en un vértice. Tenemos que $\chi(T_0) = 1$ por la hipótesis de inducción. El grafo T tiene una arista más y un vértice más que T_0; por consiguiente $\chi(T) = \chi(T_0)$.

Paso 2. Ahora probamos el teorema. Dado X, sea T un árbol maximal en X. Si $X = T$, ya hemos terminado. En otro caso, sean $A_1, \ldots, A_n$ las aristas de X que no están en T. Entonces el grupo fundamental de X tiene un sistema de n generadores libres. Por otro lado, X y T tienen exactamente el mismo conjunto de vértices, y X tiene n aristas más que T. Por tanto,

$$\chi(X) = \chi(T) - n = 1 - n,$$

así que $n = 1 - \chi(X)$. ■

Definición. Sea H un subgrupo de un grupo G. Si la colección G/H de clases por la derecha de H en G es finita, su cardinal se denomina ***índice*** de H en G. (La colección de clases por la izquierda de H en G tiene, por supuesto, el mismo cardinal.)

Teorema 85.3. *Sean F un grupo libre con $n+1$ generadores libres y H un subgrupo de F. Si H tiene índice k en F, entonces H tiene $kn + 1$ generadores libres.*

Demostración. Aplicamos la construcción dada en la demostración del Teorema 85.1. Podemos suponer que $F = \pi_1(X, x_0)$, donde X es un grafo lineal cuyo espacio subyacente es una unión por un punto de $n + 1$ círculos. Dado H, escogemos un espacio recubridor conexo por caminos $p : E \to X$ tal que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$. Ahora la correspondencia de levantamientos

$$\Phi : \pi_1(X, x_0)/H \to p^{-1}(x_0)$$

es una biyección. Por tanto, E es un recubridor de k hojas de X.

El espacio E es también un grafo lineal. Dada una arista A de X, las componentes conexas por caminos de $p^{-1}(A)$ son aristas de E y cada una de ellas se aplica homeomórficamente por p sobre A. Así E tiene k veces tantas aristas como X y k veces tantos vértices. Se sigue que $\chi(E) = k\chi(X)$. Como el grupo fundamental de

X tiene $n+1$ generadores libres, el lema anterior nos dice que $\chi(X) = -n$. Entonces el número de generadores libres del grupo fundamental de E, que es isomorfo a H, es

$$1 - \chi(E) = 1 - k\chi(X) = 1 + kn. \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que si F es un grupo libre con un sistema finito de generadores libres y H es un subgrupo de F tal que F/H es infinito, entonces nada se puede decir acerca de el cardinal de un sistema de generadores libres para H. Podría ser finito (por ejemplo, si H es el subgrupo trivial) o infinito (por ejemplo, si H es el grupo fundamental del espacio recubridor del Ejemplo 2 de §81).

Ejercicios

1. Demuestre que el número de Euler de un grafo lineal finito X es un invariante topológico de X. [*Indicación:* primero considere el caso donde X es conexo.]

2. Sea F un grupo libre sobre dos generadores α y β. Sea H el subgrupo generado por α. Demuestre que H tiene índice infinito en F.

3. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ la aplicación recubridora estándar; considere la aplicación recubridora $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$. Sea $b_0 = (1, 0) \in S^1$; escribamos $X = (b_0 \times S^1) \cup (S^1 \times b_0)$; sean $E = (p \times p)^{-1}(X)$ y $q : E \to X$ la aplicación recubridora obtenida por restricción de $p \times p$. El grupo fundamental de X tiene generadores libres α y β, donde α está representado por un lazo en $b_0 \times S^1$ y β por un lazo en $S^1 \times b_0$. Encuentre un sistema de generadores libres para el subgrupo $q_*(\pi_1(E, e_0))$, donde e_0 es el origen de $\mathbb{R}^2$.

Bibliografía

[A] L.V. Ahlfors. *Complex Analysis, 3rd edition*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.

[A-S] L.V. Ahlfors y L. Sario. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.

[C] P.J. Campbell. The origin of "Zorn's lemma". *Historia Mathematica*, 5:77–89, 1978.

[D-M] P.H. Doyle y D.A. Moran. A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Inventiones Math.*, 5:160–162, 1968.

[D] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[F] M. Fuchs. A note on mapping cylinders. *Michigan Mathematical Journal*, 18:289–290, 1971.

[G-P] V. Guillemin y A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[H] P.R. Halmos. *Naive Set Theory*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1960.

[H-S] D.W. Hall y G.L. Spencer. *Elementary Topology*. John Wiley & Sons. Inc., New York, 1955.

[H-W] W. Hurewicz y H. Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[H-Y] J.G. Hocking y G.S. Young. *Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1961.

[K] J.L. Kelley. *General Topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[K-F] A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, vol. 1*. Graylock Press, Rochester, New York, 1957.

[M] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[Mo] G.H. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[Mu] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Perseus Books, Reading, Mass., 1993.

[M-Z] D. Montgomery y L. Zippin. *Topological Transformation Groups*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1955.

[RM] M.E. Rudin. The box product of countably many compact metric spaces. *General Topology and its Applications*, 2:293–298, 1972.

[RW] W. Rudin. *Real and Complex Analysis, 3rd edition*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[S-S] L.A. Steen y J.A. Seebach Jr. *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1970.

[Sm] R.M. Smullyan. The continuum hypothesis. In *The Mathematical Sciences, A Collection of Essays*. The M.I.T. Press. Cambridge, Mass., 1969.

[S] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[T] J. Thomas. A regular space, not completely regular. *American Mathematical Journal*, 76:181–182, 1969.

[W] R.L. Wilder. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965.

[Wd] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1970.

Índice analítico

D

E

S



2ª Edición

Topología

Munkres

La **Topología**, además del interés que tiene por sí misma, sirve para establecer los fundamentos de futuros estudios en otras disciplinas, fundamentalmente en análisis y geometría. Existen muchos temas que son apropiados para un curso de topología; en la elección del material considerado se ha tratado de establecer un equilibrio entre los diferentes puntos de vista que existen en la actualidad.

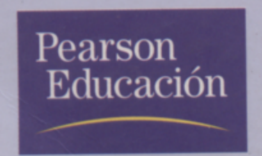
La Parte I, formada por los primeros ocho capítulos, está dedicada a lo que ordinariamente se conoce como Topología General. En los primeros cuatro capítulos, considerados el "núcleo irreducible" de la asignatura, se estudia teoría de conjuntos, espacios topológicos, conexión, compacidad y los axiomas de numerabilidad y separación. Los restantes cuatro capítulos exploran temas menos básicos, aunque no de menor importancia.

La Parte II constituye una introducción a la Topología Algebraica. Esta parte del libro trata con cierta minuciosidad los conceptos de grupo fundamental y espacio recubridor, junto con sus muchas y variadas aplicaciones. El capítulo dedicado a la clasificación de superficies compactas y conexas merece una especial atención por su cuidado y detallado tratamiento.

Los problemas constituyen una parte crucial del aprendizaje de las matemáticas. La dificultad de ellos en este texto varía, siendo los primeros los más fáciles. Algunos son de verificación rutinaria, diseñados para poner a prueba si el lector ha comprendido las definiciones y ejemplos de la sección que les precede; otros son de menor rutina. Ciertos ejercicios, que son más difíciles que el resto, están señalados con asterisco; pero ninguno llega a ser tan difícil como para que un buen estudiante no lo pueda resolver.

ISBN 84-205-3180-4

9 788420 531809



www.pearsoneducacion.com